ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΟΙ ΜΗΧΑΝΙΚΟΙ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ - 12-2-2000

1. Εστω η γενική επαναληπτική μέθοδος $x_{k+1} = g(x_k)$, x_0 δεδομένο, επίλυσης μιας εξίσωσης της μορφής $x = g(x)$. Να διατυπωθεί με τις κατάλληλες υποθέσεις και να αποδειχθεί το σχετικό θεώρημα τοπικής σύγκλισης.

2. Δίνεται η εξίσωση $f(x) = x^2 - 3 = 0$.

α) Να δειχθεί ότι η μέθοδος Newton-Raphson συγκλίνει στη θετική ρίζα $\bar{x} = \sqrt{3}$ της εξίσωσης αυτής, για κάθε αρχικό $x_0 > 0$ (Δείξτε πρώτα, με τον τύπο Taylor, ότι το γράφημα της f βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της, και μετά ότι η ακολουθία (x_k) που παράγει η μέθοδος είναι φθίνουσα, για $k \geq 1$, και κάτω φραγμένη). Να ελεγχθεί επιπλέον αν η σύγκλιση είναι τετραγωνική, για μεγάλο k.

β) Να γίνουν δύο επαναλήψεις της μεθόδου, με αρχικό $x_0 = 1.75$, και να δοθεί μια εύχρηστη (χωρίς σταθερά α) εκτίμηση του σφάλματος στη δεύτερη επανάληψη.

3. Δίνονται οι πίνακες και τα διανύσματα

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 1 & 10 & 1 \\ 0 & 1 & 9 \end{bmatrix}, \quad \Delta A = \begin{bmatrix} 0.001 & -0.001 & 0.002 \\ -0.001 & 0.003 & -0.001 \\ 0.002 & -0.001 & 0.001 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \Delta b = \begin{bmatrix} 0.001 \\ -0.002 \\ 0.003 \end{bmatrix}.$$

α) Να υπολογιστεί ακριβώς ο δείκτης κατάστασης μ του πίνακα A, με τη νόρμα ∞.

β) Εστω x η λύση του γραμμικού συστήματος $Ax = b$ και $x + \Delta x$ η λύση του διαταραγμένου συστήματος $(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b + \Delta b$. Να δοθεί μια εκτίμηση του σχετικού σφάλματος $\|\Delta x\|_\infty / \|x\|_\infty$ (ελέγξτε πρώτα αν ισχύει η εκτίμηση αυτή).

4. Να δειχθεί ότι για $n+1$ ισαπέχοντα σημεία $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ ισχύει η ανισότητα

$$\left| \prod_0^n (x - x_i) \right| \leq n!\, h^{n+1} / 4.$$

(Δείξτε πρώτα ότι η συνάρτηση $\left| \prod_0^n (x - x_i) \right|$ παίρνει τη μέγιστη τιμή στα δύο διαστήματα $[x_0, x_1]$, $[x_{n-1}, x_n]$). Συμπεράνετε μια εκτίμηση του μέγιστου σφάλματος παρεμβολής Lagrange μιας συνάρτησης $f \in C^{n+1}$ στο διάστημα $[x_0, x_n]$.

5. Να γραμμικοποιηθεί κατάλληλα το μοντέλο $y = ax^b$ και να εφαρμοστεί η μέθοδος των Ελαχίστων Τετραγώνων για την εκτίμηση των παραμέτρων a και b βάσει μετρήσεων x_i, y_i, $i = 1, \ldots, m$.

6. α) Να εφαρμοστεί η μέθοδος Taylor δεύτερης τάξης στη διαφορική εξίσωση

$$y' = x + 2y + xy, \quad y(1) = 2,$$

με βήμα $h = 0.02$, για να βρεθεί μια προσέγγιση της τιμής της λύσης $y(1.02)$.

β) Ιδιο ερώτημα με το α), αλλά με τη μέθοδο Runge-Kutta δεύτερης τάξης.

Τα θέματα 1, 2, 3 είναι υποχρεωτικά. Επιλέξτε δύο από τα θέματα 4, 5, 6.
Τα θέματα είναι ισοδύναμα. Διάρκεια εξέτασης: 2.5 ώρες. Καλή επιτυχία!