ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΟΙ ΜΗΧΑΝΙΚΟΙ - 3ο ΕΞΑΜΗΝΟ **11/2/1997**
ΕΞΕΤΑΣΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

1. α) Να δοθει ο αλγοριθμος της μεθοδου απαλοιφης Gauss με μερικη οδηγηση κατα στηλη και με αποθηκευση των πολλαπλασιαστων.
β) Να εφαρμοστει η μεθοδος απαλοιφης Gauss με μερικη οδηγηση κατα γραμμη στο γραμμικο συστημα με επαυξημενο πινακα

$$\left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 8 & 8 & 5 \\ 3 & 4 & 4 & 7 & 7 \end{array}\right|$$

για να δειχθει αν ειναι αδυνατο, αοριστο, ή ομαλο. Αν το συστημα ειναι αοριστο, να βρεθει η γενικη λυση, και αν ειναι ομαλο, να βρεθει η μοναδικη λυση.
γ) Εστω μ ο δεικτης καταστασης (ως προς τη νορμα απειρο) του πινακα

$$\begin{array}{cc} 3 & 3 \\ 2 & 1.9999 \end{array}$$

Να βρεθει οσο το δυνατο μεγαλυτερη σταθερα C τετοια ωστε $\mu \geq C$.

2. α) Να διατυπωθει και να αποδειχθει το θεωρημα σφαλματος παρεμβολης Lagrange.
β) Να δειχθει οτι για ισαπεχοντα σημεια $x_0<x_1<...<x_n$ ισχυει η ανισοτητα

$$\left|\Pi_0^n (x-x_i)\right| \leq n!\, h^{n+1}/4.$$

(Να δειχθει πρωτα οτι η συναρτηση $\left|\Pi_0^n (x-x_i)\right|$ παιρνει τη μεγιστη τιμη στα δυο διαστηματα $[x_0,x_1]$, $[x_{n-1},x_n]$). Συμπερανετε μια εκτιμηση του μεγιστου σφαλματος παρεμβολης Lagrange.
γ) Χρησιμοποιωντας την παραπανω εκτιμηση, να δοθει μια εκτιμηση του μεγιστου σφαλματος παρεμβολης Lagrange της συναρτησης $f(x) = \cos x$ στα σημεια 0, π/8, π/4, 3π/8, π/2.

3. α) Εστω μια εξισωση $f(x)=0$, οπου η f ειναι αρκετα ομαλη, και εστω z μια ριζα της f. Υποθετουμε οτι $f'(z)\neq 0$. Να δειχθει πρωτα οτι η μεθοδος Newton-Raphson συγκλινει υπεργραμμικα για x_0 αρκετα κοντα στο z, και μετα οτι η συγκλιση ειναι τετραγωνικη.
β) Εστω η εξισωση $f(x) = \cos x - e^x +1$ (το x σε ακτινια). Να δειχθει οτι η εξισωση αυτη εχει μια μοναδικη ριζα z στο διαστημα [0.1]. Να γινουν αρκετες επαναληψεις της μεθοδου Newton-Raphson, με αρχικο σημειο επιλεγμενο γραφικα, για να υπολογιστει η ριζα z με ακριβεια τεσσαρων σημαντικων ψηφιων.

4. α) Να κατασκευαστει ο συνθετος τυπος ολοκληρωσης Simpson βασει του απλου τυπου με ορο σφαλματος, και να δοθει μια αντιστοιχη εκτιμηση του σφαλματος ολοκληρωσης.
β) Να υπολογιστει μια προσεγγιση του ολοκληρωματος της συναρτησης $f(x) = \ln x$ στο διαστημα [1,2] με τη συνθετη μεθοδο Simpson με βημα h=0.25, καθως και μια εκτιμηση του σφαλματος ολοκληρωσης.

5. α) Να κατασκευαστει η μεθοδος Taylor δευτερης ταξης για την αριθμητικη επιλυση μιας διαφορικης εξισωσης της μορφης

$$y' = f(x,y(x)), \qquad y(a) = y_0.$$

β) Να γινουν δυο επαναληψεις της παραπανω μεθοδου για να υπολογιστει μια προσεγγιση της λυσης της διαφορικης εξισωσης

$$y' = 1/(1+x+y), \quad y(0) = 1$$

στο σημειο $x_2=0.02$, με βημα h=0.01.

Να επιλεγουν τα θεματα 1,2,3 και ενα εκ των 4,5.