1 ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

1.1 Παραδείγματα προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού

Τα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού ασχολούνται με καταστάσεις όπου ένας αριθμός πλουτοπαραγωγικών πηγών, όπως άνθρωποι, υλικά, μηχανές και ακίνητα τα οποία είναι διαθέσιμα πρέπει να συνδυαστούν για να παραχθούν ένα ή περισσότερα προϊόντα. Στην διαδικασία παραγωγής οι πηγές αυτές υπόκεινται σε περιορισμούς όπως στην συνολική ποσότητα των διαθέσιμων πηγών, τον αριθμό κάθε προϊόντος που παράγεται, τον αριθμό κάθε προϊόντος που διατίθεται. Σκοπός του γραμμικού προγραμματισμού είναι από όλες τις δυνατές κατανομές των πηγών να υπολογίσουμε εκείνη ή εκείνες οι οποίες μεγιστοποιούν ή ελαχιστοποιούν μια αριθμητική ποσότητα όπως το κέρδος ή το κόστος

Το πρόβλημα της δίαιτας

Ένα από τα κλασικά προβλήματα εφαρμογής του γραμμικού προγραμματισμού είναι το πρόβλημα της δίαιτας. Το πρόβλημα θεωρείται ότι παρέχει ένα ελάχιστο κόστος μιας επαρκούς δίαιτας για ένα άτομο να μπορεί να συντηρήσει τον εαυτό του. Δηλαδή ποιος είναι ο φθηνότερος τρόπος σύνθεσης ποικίλων ποσοτήτων από διαθέσιμα τρόφιμα σε μια δίαιτα η οποία μπορεί να ικανοποιεί τις θρεπτικές απαιτήσεις ενός ανθρώπινου οργανισμού.

Ας υποθέσουμε ότι οι τροφές οι διαθέσιμες που έχουμε είναι γάλα, κρέας και αυγά και ότι αυτές οι τροφές περιέχουν βιταμίνες A, C, και D. Έστω ότι ο αριθμός των χιλιοστών γραμμαρίου (mg) της κάθε βιταμίνης που περιέχεται σε μονάδα κάθε τροφής και το αντίστοιχο κόστος είναι τα εξής:

Βιταμίνη	Λίτρο γάλακτος	Κιλό κρέατος	Δωδεκάδα αυγών
A	0,2	2	10
C	20	20	10
D	2	200	10
Κόστος	5	50	15

Υποθέτουμε ότι η ελάχιστη απαιτούμενη ημερήσια κατανάλωση βιταμινών A, C και D είναι αντίστοιχα 1mg, 50mg και 10mg. Για να κατασκευάσουμε το μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού ονομάζουμε $\mathbf{x_γ}$, $\mathbf{x_κ}$, και $\mathbf{x_α}$ τον αριθμό των λίτρων γάλακτος, κιλών κρέατος και δωδεκάδων αυγών αντίστοιχα. Ο σκοπός μας είναι να ελαχιστοποιήσουμε το κόστος αφού βέβαια λάβουμε υπόψη μας τους περιορισμούς του προβλήματος. Οι περιορισμοί εδώ έχουν την μορφή κατώτατων ορίων.

Η αντικειμενική συνάρτηση για ελαχιστοποίηση είναι:

$Z = 5\, x_γ + 50\, x_κ + 15\, x_α$

Οι περιορισμοί μπορούν να διατυπωθούν με μαθηματική μορφή ως εξής:

$0{,}2\, x_γ + 2\, x_κ + 10\, x_α \geq 1$ (Βιταμίνη A)

$20\, x_γ + 20\, x_κ + 10\, x_α \geq 50$ (Βιταμίνη C)

$2\, x_γ + 200\, x_κ + 10\, x_α \geq 10$ (Βιταμίνη D)

και $x_γ \geq 0$, $x_κ \geq 0$, $x_α \geq 0$

όπου οι τελευταίοι περιορισμοί αναφέρονται στην μη αρνητικότητα των μεταβλητών

$x_γ$, $x_κ$, $x_α$.

Το πρόβλημα μεταφοράς

Το πρόβλημα μεταφοράς είναι ένα από τα πρώτα είδη προβλημάτων που αναλύθηκαν με την χρήση του γραμμικού προγραμματισμού. Το γενικό πρόβλημα εμφανίστηκε όταν τα διαθέσιμα αγαθά αποθηκευμένα σε διάφορες πηγές έπρεπε να διανεμηθούν σε ποικίλους προορισμούς. Το πρόβλημα είναι να βρούμε τον βέλτιστο τρόπο μεταφοράς έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το κόστος μεταφοράς. Συγκεκριμένα, διαθέτουμε ποσότητες ενός ομοιόμορφου προϊόντος σε έναν αριθμό αποθηκών και θέλουμε να μεταφέρουμε καθορισμένες ποσότητες του προϊόντος σε έναν αριθμό από διαφορετικούς προορισμούς. Το κόστος για την μεταφορά μιας μονάδας ποσότητας από οποιαδήποτε αποθήκη σε οποιοδήποτε κατάστημα είναι γνωστό, ενώ η μεταφορά από κάθε αποθήκη σε κάθε κατάστημα είναι δυνατή. Θέλουμε να υπολογίσουμε το ελάχιστο κόστος μεταφοράς από τις αποθήκες στα καταστήματα λιανικής πώλησης

Παράδειγμα

Τρία παραρτήματα ενός εργοστασίου, τα Α, Β, Γ, που παράγουν το ίδιο προϊόν, βρίσκονται σε τρεις διαφορετικές περιοχές της χώρας, που απέχουν πολύ μεταξύ τους. Οι αγοραστές του προϊόντος βρίσκονται σε πέντε διαφορετικές πόλεις. Τα παραρτήματα παράγουν ποσότητες αντίστοιχα 150, 350 και 280 μονάδων του προϊόντος, ενώ οι αγοραστές έχουν παραγγείλει αντίστοιχα 100, 130, 160, 210, και 150 μονάδες. Το κόστος μεταφοράς του προϊόντος από τα παραρτήματα Α, Β , Γ δίνεται στον πίνακα:

Παράρτημα	Αγοραστές				
	1	2	3	4	5
Α	10	22	8	14	9
Β	12	16	26	20	19
Γ	18	21	15	11	17

Θέλουμε να υπολογίσουμε τις απαραίτητες ποσότητες (μεταβλητών αποφάσεως) x_{ij} που θα πρέπει να μεταφερθούν από το παράρτημα i στον αγοραστή j ώστε να ελαχιστοποιηθεί το κόστος μεταφοράς. Άγνωστες είναι οι ποσότητες x_{ij} , όπου i είναι τα Α, Β, Γ και j τα 1, 2, 3, 4, 5. Η αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος (κόστος μεταφοράς), της οποίας αναζητάμε το ελάχιστο, γράφεται

$$Z = 10\,x_{A1} + 22\,x_{A2} + 8\,x_{A3} + 14\,x_{A4} + 9x_{A5} +$$

$$+ 12\,x_{B1} + 16\,x_{B2} + 26\,x_{B3} + 20\,x_{B4} + 19\,x_{B5} +$$

$$+ 18\,x_{\Gamma1} + 21\,x_{\Gamma2} + 15\,x_{\Gamma3} + 11\,x_{\Gamma4} + 17\,x_{\Gamma5}$$

Είναι φανερό ότι δεν μπορούμε να φορτώσουμε περισσότερα προϊόντα από ένα παράρτημα από όσα παράγονται στο παράρτημα αυτό. Συνεπώς έχουμε τους περιορισμούς:

$x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4} + x_{A5} \leq 150$ (παραγωγή παραρτήματος Α)

$x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} + x_{B4} + x_{B5} \leq 350$ (παραγωγή παραρτήματος Β)

$x_{\Gamma 1} + x_{\Gamma 2} + x_{\Gamma 3} + x_{\Gamma 4} + x_{\Gamma 5} \leq 280$ (παραγωγή παραρτήματος Γ)

Επίσης κάθε αγοραστής πρέπει να εφοδιαστεί με τον επιθυμητό αριθμό μονάδων. Συνεπώς έχουμε τους περιορισμούς:

$x_{A1} + x_{B1} + x_{\Gamma 1} = 100$ (ζήτηση αγοραστή 1)

$x_{A2} + x_{B2} + x_{\Gamma 2} = 130$ (ζήτηση αγοραστή 2)

$x_{A3} + x_{B3} + x_{\Gamma 3} = 160$ (ζήτηση αγοραστή 3)

$x_{A4} + x_{B4} + x_{\Gamma 4} = 210$ (ζήτηση αγοραστή 4)

$x_{A5} + x_{B5} + x_{\Gamma 5} = 150$ (ζήτηση αγοραστή 5)

Επίσης

$x_{ij} \geq 0$, με $i = A, B, \Gamma$, και $j = 1, 2, 3, 4, 5$

1.2 Γενική διατύπωση προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού

Το γενικό πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Να βρεθούν οι τιμές των μεταβλητών $x_1, x_2, ..., x_r$ που μεγιστοποιούν ή ελαχιστοποιούν την συνάρτηση

$$z = f\left(x\right) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_r x_r$$

Οι μεταβλητές πρέπει να ικανοποιούν τους περιορισμούς

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1r}x_r \ \{\le, =, \ge\} \ \mathrm{b}_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2r}x_r \ \{\le, =, \ge\} \ \mathrm{b}_2 \\
&a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3r}x_r \ \{\le, =, \ge\} \ \mathrm{b}_3 \\
&.... \\
&.... \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mr}x_r \ \{\le, =, \ge\} \ \mathrm{b}_\mathrm{m}
\end{aligned}$$

και $\quad x_j \ge 0,\ j = 1, 2, ..., r$

όπου τα $α_{ij}$,b_i, c_j είναι γνωστές σταθερές. Η συνάρτηση:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{r} c_j x_j$$

ονομάζεται αντικειμενική συνάρτηση (objective function). Αυτή η συνάρτηση είναι γραμμική ως προς τις μεταβλητές x_j, j=1,2,…,r. Επίσης, κάθε περιορισμός είναι μια γραμμική συνάρτηση ως προς τις μεταβλητές x_j, j=1,2,…,r. Οι συντελεστές c_j, j=1,2…r αναφέρονται και ως **συντελεστές κόστους** και αντιπροσωπεύουν μοναδιαίο κόστος. Η συνθήκη $x_j \ge 0,\ j = 1, 2, ..., r$ αναφέρεται και ως **συνθήκη της μη αρνητικότητας**.

Λύση ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού θα ονομάζεται κάθε σύνολο x_j, j=1,2,…,r. το οποίο ικανοποιεί τους περιορισμούς του προβλήματος .

Εφικτή ή δυνατή λύση είναι κάθε λύση που ικανοποιεί τους περιορισμούς μη αρνητικότητας.

Βέλτιστη λύση είναι κάθε εφικτή λύση η οποία βελτιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση**.**

Συνήθως σε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού υπάρχουν άπειρες λύσεις και επιδιώκουμε την εύρεση της βέλτιστης δυνατής λύσης.

Αν όλοι οι περιορισμοί είναι εξισώσεις ή ανισώσεις της ίδιας φοράς, ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού μπορεί να διατυπωθεί με την χρήση πινάκων ως εξής:

$$\boxed{\begin{array}{l} z = \max f(\mathrm{x}) = \mathrm{c}^T \mathrm{x} \\ \mathrm{Ax} \{\leq, =, \geq\} \mathrm{b} \\ \mathrm{x} \geq 0 \end{array}}$$

όπου:

$$\mathrm{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_r \end{pmatrix} \in M_{r\times 1}, \qquad \mathrm{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ . \\ . \\ c_r \end{pmatrix} \in M_{r\times 1}, \qquad 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix} \in M_{r\times 1}, \qquad \mathrm{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix} \in M_{m\times 1}$$

και $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mr} \end{pmatrix} \in M_{m\times r}$

Με $M_{m\times r}$ παριστάνουμε το διανυσματικό χώρο των $m\times r$ πινάκων.

Η σπουδαιότητα της διατύπωσης αυτής έγκειται στο ότι μπορεί με τον παραπάνω τρόπο να διατυπωθεί με σαφήνεια μια μεγάλη ποικιλία οικονομικών, επιστημονικών, βιομηχανικών, επιχειρηματικών και κοινωνικών προβλημάτων.

1.3 Προϋποθέσεις εφαρμογής του γραμμικού προγραμματισμού

Έχοντας εξετάσει κάποιες περιπτώσεις όπου είναι δυνατό να εφαρμοστεί ο γραμμικός προγραμματισμός και τη γενική διατύπωση ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού είναι σημαντικό να εξετάσουμε τις απαιτούμενες προϋποθέσεις για την εφαρμογή του σ' ένα οποιοδήποτε πρόβλημα βελτιστοποιήσεως. Αυτές είναι που περιορίζουν γενικά το φάσμα των δυνατοτήτων εφαρμογής του γραμμικού προγραμματισμού. Οι προϋποθέσεις που πρέπει να ισχύουν για να διατυπωθεί ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού είναι οι εξής: α) Γραμμικότητα β) Διαιρετότητα και γ) Βεβαιότητα.

Γραμμικότητα

Όλες οι συναρτήσεις του προβλήματος, αντικειμενική συνάρτηση και περιορισμοί πρέπει να είναι γραμμικές ως προς τις άγνωστες μεταβλητές $x_1, x_2, \ldots, x_r$. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να ισχύουν οι ιδιότητες της αναλογικότητας και της προσθετικότητας, δηλαδή εάν y είναι μια συνάρτηση r μεταβλητών και $a_1, a_2, \ldots, a_r$ είναι σταθερές, πρέπει να ισχύει:

$$y(a_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_r x_r) = a_1 y(x_1) + \alpha_2 y(x_2) + \ldots + \alpha_r y(x_r)$$

Σε πολλές περιπτώσεις στις οποίες δεν ισχύει απόλυτα η προϋπόθεση της γραμμικότητας μπορεί να γίνει μια αρκετά καλή προσέγγιση με γραμμικές συναρτήσεις.

Διαιρετότητα

Το μοντέλο του γραμμικού προγραμματισμού υποθέτει ότι κάθε δραστηριότητα (δηλ μεταβλητή) είναι συνεχής και επομένως άπειρα διαιρετή. Αυτό συνεπάγεται ότι όλα τα επίπεδα δραστηριοτήτων και όλες οι χρήσεις πόρων επιτρέπεται να πάρουν κλασματικές τιμές ή ακέραιες τιμές. Όταν η υπόθεση της διαιρετότητας δεν ισχύει υπάρχουν δύο ενδεχόμενα :

α) Να αγνοηθεί η υπόθεση αυτή, να λυθεί το πρόβλημα με μεθόδους γραμμικού προγραμματισμού, και οι τιμές των μεταβλητών να στρογγυλευθούν στην κοντινότερη ακέραια μονάδα. Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται κυρίως όταν οι τιμές των μεταβλητών είναι μεγάλες.

β) Όταν οι τιμές των μεταβλητών είναι μικρές (π.χ. 0 ή 1) όπως σε πολλά προβλήματα επενδύσεων τότε πρέπει να χρησιμοποιηθούν τεχνικές του ακέραιου προγραμματισμού.

Βεβαιότητα

Το μοντέλο του γραμμικού προγραμματισμού. προϋποθέτει ότι όλοι οι παράμετροι του προβλήματος είναι γνωστές με απόλυτη βεβαιότητα.

Στην περίπτωση που μερικοί ή όλοι οι συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης ή των περιορισμών είναι τυχαίες μεταβλητές το πρόβλημα γίνεται πρόβλημα στοχαστικού προγραμματισμού.

1.4 Γραφική επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού

Προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού με δύο μόνο μεταβλητές μπορούν να λυθούν εύκολα γραφικά.

Τυπική περίπτωση μεγιστοποίησης

Έστω το πρόβλημα Γ.Π.

$\max z = 5x_1 + 3x_2$

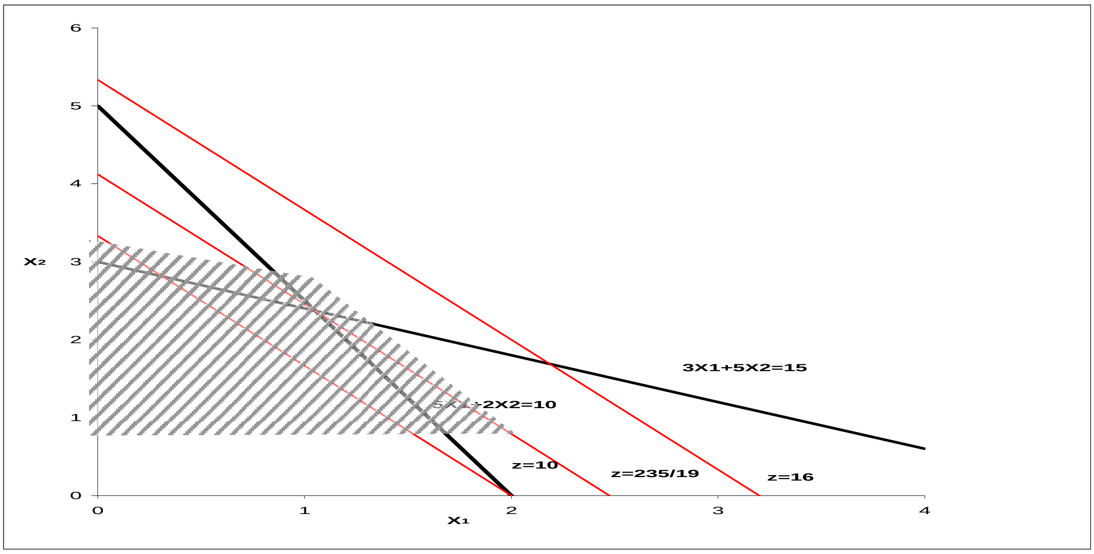
με τους περιορισμούς:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 &\le 15 \\ 5x_1 + 2x_2 &\le 10 \end{aligned}$$

και $\quad x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0$

Αρχικά, θα βρούμε τα ζεύγη τιμών των x_1, x_2 που αποτελούν δυνατές λύσεις του προβλήματος. Εισάγουμε σύστημα ορθογωνίων συντεταγμένων x_1, x_2 και παρατηρούμε ότι κάθε σημείο που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο έχει συντεταγμένες $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$ και συνεπώς ικανοποιεί τους περιορισμούς μη αρνητικότητας των μεταβλητών. Αντίστροφα, κάθε σημείο που αποτελεί δυνατή λύση θα βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο.

Για να βρούμε το σύνολο των ζευγών του πρώτου τεταρτημόριου που ικανοποιεί τους περιορισμούς, θα πρέπει να ερμηνεύσουμε γεωμετρικά ανισότητες της μορφής $3x_1 + 5x_2 \le 15$ και $5x_1 + 2x_2 \le 10$. Σχεδιάζοντας τις ευθείες που παριστάνουν οι αντίστοιχες ισότητες μπορούμε να βρούμε το χωρίο που περιλαμβάνουν οι παραπάνω ανισότητες.



Παρατηρούμε ότι τα σημεία που ικανοποιούν την συνθήκη μη αρνητικότητας και την πρώτη ανισότητα είναι τα σημεία που βρίσκονται κάτω από την ευθεία με εξίσωση $3x_1 + 5x_2 = 15$ και στο πρώτο τεταρτημόριο. Αντίστοιχα τα σημεία που βρίσκονται κάτω από την ευθεία με εξίσωση $5x_1 + 2x_2 = 10$ και στο πρώτο τεταρτημόριο ικανοποιούν τις συνθήκες μη αρνητικότητας και την δεύτερη ανισότητα. Συνεπώς το σύνολο των σημείων που ικανοποιούν όλους τους περιορισμούς και συνθήκες είναι το γραμμοσκιασμένο χωρίο του σχήματος. Κάθε σημείο του χωρίου αυτού και μόνο αυτά τα σημεία αποτελούν δυνατή λύση του προβλήματος. Για να επιλύσουμε το πρόβλημα θα πρέπει να βρούμε από το σύνολο των δυνατών λύσεων εκείνη που μεγιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση. Για κάθε σταθερή τιμή της z παρατηρούμε ότι η εξίσωση $z = 5x_1 + 3x_2$ είναι ευθεία και μάλιστα οι ευθείες που προκύπτουν από διαφορετικές τιμές του z είναι παράλληλες. Επιθυμούμε να βρούμε την ευθεία με την μεγαλύτερη τιμή της z, που να έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με το χωρίο των δυνατών λύσεων. Παρατηρούμε από το σχήμα ότι η ευθεία αυτή που τέμνει το χωρίο και έχει το μέγιστο z είναι η z_2 η οποία περνάει από το σημείο τομής των ευθειών $3x_1 + 5x_2 = 15$ και $5x_1 + 2x_2 = 10$. Άρα λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε ότι $x_1 = \frac{20}{19}$ και $x_2 = \frac{45}{19}$ και αντικαθιστώντας στην αντικειμενική συνάρτηση βρίσκουμε ότι το $z = \frac{235}{19}$. Αυτή είναι και η μέγιστη δυνατή λύση του προβλήματος.

Άπειρες εναλλακτικές βέλτιστες λύσεις

Θεωρούμε το πρόβλημα:

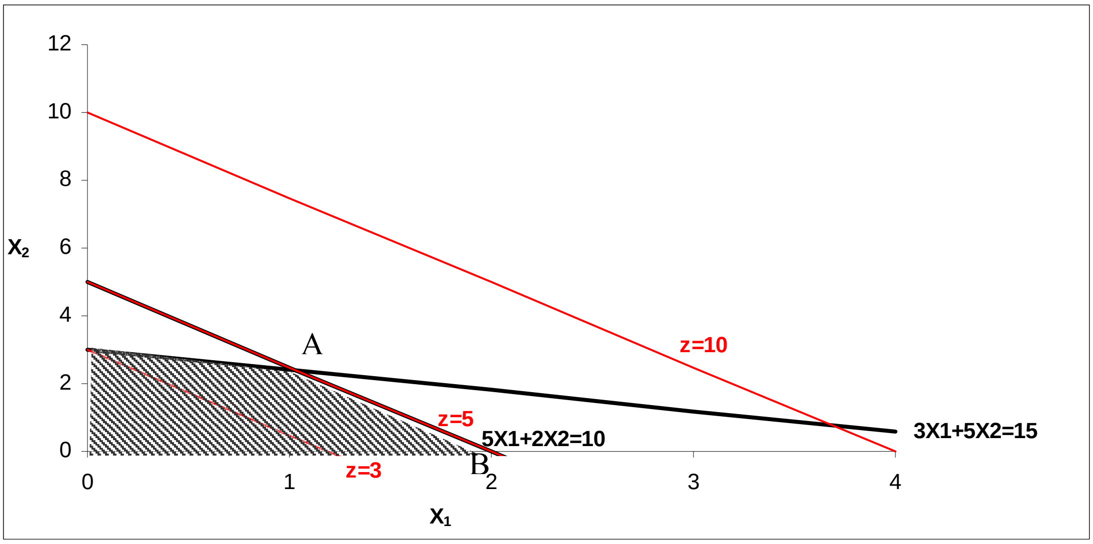
$\max z = 2.5x_1 + x_2$

με τους περιορισμούς:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 &\leq 15 \\ 5x_1 + 2x_2 &\leq 10 \end{aligned}$$

Και $\quad x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0$

Κάνοντας πάλι εδώ το χωρίο των δυνατών λύσεων και την αντικειμενική συνάρτηση για τις διάφορες τιμές έχουμε:



Παρατηρούμε ότι η z=5 είναι η μέγιστη βέλτιστη λύση. Η διαφορά είναι ότι εδώ η βέλτιστη λύση συμπίπτει με μια πλευρά του πολυγώνου του χωρίου των δυνατών λύσεων. Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει ένα μόνο ζεύγος τιμών των x_1, x_2 που να μεγιστοποιεί την z. Κάθε σημείο της πλευράς ΑΒ του πολυγώνου δίνει την μέγιστη τιμή. Δηλαδή η μέγιστη αυτή τιμή της z είναι μοναδική, αλλά υπάρχει άπειρος αριθμός δυνατών λύσεων. Η κορυφή Α του πολυγώνου αποτελεί και αυτή ένα ζευγάρι τιμών που δίνουν την μέγιστη λύση στο πρόβλημα. Επομένως λύνοντας το σύστημα των δύο εξισώσεων $3x_1 + 5x_2 = 15$ και $5x_1 + 2x_2 = 10$ παίρνουμε

$x_1 = \frac{20}{19}$ και $x_2 = \frac{45}{19}$ από όπου παίρνουμε ότι maxz=5. Όταν ένα πρόβλημα Γ.Π έχει περισσότερες από μία βέλτιστες λύσεις, τότε λέμε ότι υπάρχουν εναλλακτικές βέλτιστες λύσεις αυτό σημαίνει ότι τα διαθέσιμα μέσα είναι δυνατόν να συνδυαστούν κατά περισσότερους από ένα τρόπους προς μεγιστοποίηση του κέρδους.

Περίπτωση ελαχιστοποίησης

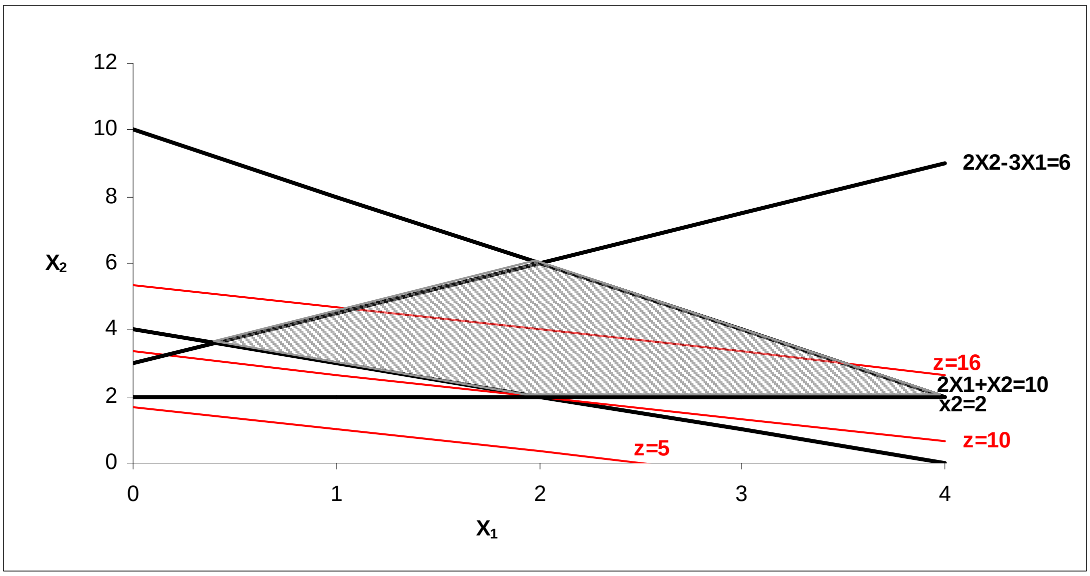
Θεωρούμε το πρόβλημα:

min z=2 x_1 +3 x_2

με τους περιορισμούς:

$$\begin{aligned}
&2x_1 + x_2 \leq 10 \\
&x_1 + x_2 \geq 4 \\
&-3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\
&x_2 \geq 2 \\
&\text{και} \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Η γεωμετρική ερμηνεία του παραπάνω προβλήματος είναι:



Η ελάχιστη τιμή της z είναι η ευθεία z=10 η οποία περνάει από το σημείο $x_1 = 2$ και $x_2 = 2$, δηλαδή από την τομή των δύο ευθειών $x_1 + x_2 = 4$, $x_2 = 2$.

Μη πεπερασμένη λύση

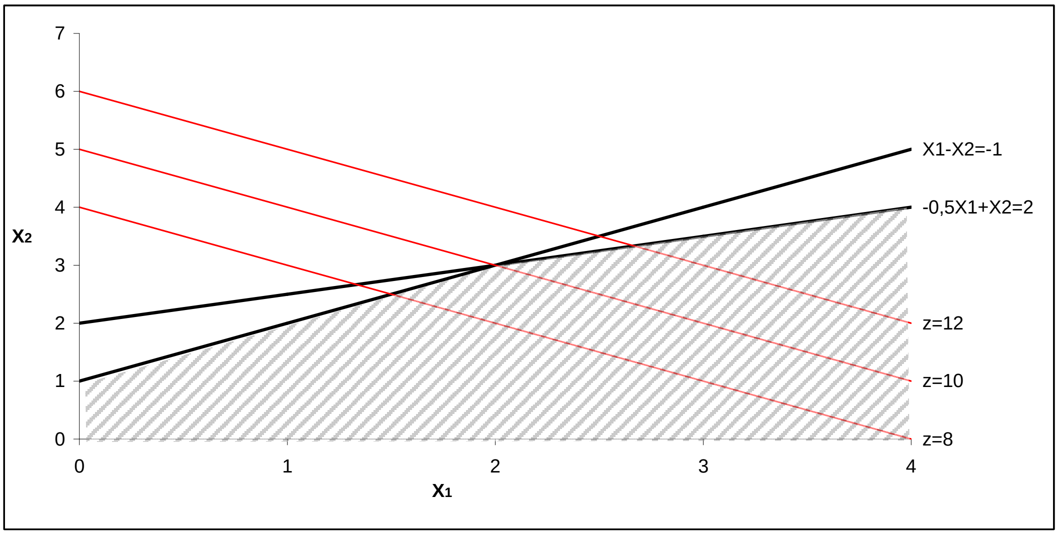
Θεωρούμε το πρόβλημα:

$$\max z = 2x_1 + 2x_2$$

με τους περιορισμούς

$$\begin{aligned} & x_1 - x_2 \geq -1 \\ & -0.5x_1 + x_2 \leq 2 \\ & \kappa\alpha\iota \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Η γεωμετρική ερμηνεία του παραπάνω προβλήματος είναι:



Στο συγκεκριμένο πρόβλημα παρατηρούμε ότι η ευθεία της αντικειμενικής συνάρτησης μπορεί να μετακινηθεί παράλληλα προς την κατεύθυνση όπου αυξάνεται το z μέχρι το άπειρο χωρίς να σταματήσει να έχει κοινά σημεία με το χωρίο των δυνατών λύσεων. Συνεπώς η z μπορεί να γίνει οσοδήποτε μεγάλη και το πρόβλημα δεν έχει πεπερασμένη μέγιστη τιμή της z. Σε μια τέτοια περίπτωση λέμε ότι το πρόβλημα δεν έχει πεπερασμένη λύση ή ότι έχει μια μη φραγμένη λύση.

Μη πεπερασμένη λύση με πεπερασμένες βέλτιστες τιμές ορισμένων μεταβλητών

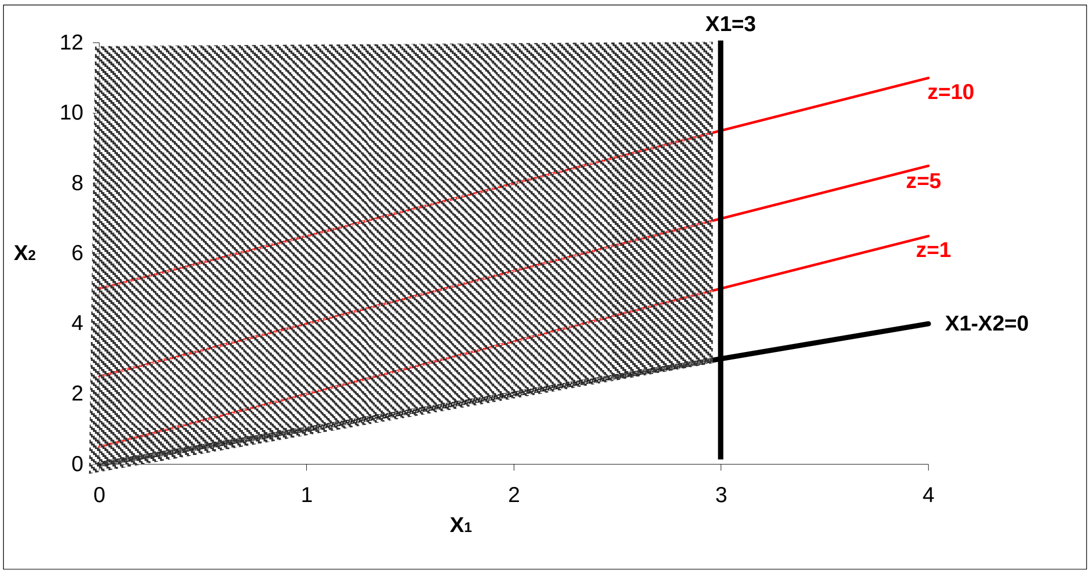
Στο προηγούμενο παράδειγμα και οι δύο μεταβλητές μπορούν να λάβουν απεριόριστα μεγάλες τιμές καθώς αυξάνεται η z. Μια μη φραγμένη λύση όμως μπορεί να έχει και μεταβλητές με πεπερασμένη τιμή. Στο ακόλουθο πρόβλημα μπορούμε να το παρατηρήσουμε:

$\max z = -3x_1 + 2x_2$

Με τους περιορισμούς:

$$
\begin{aligned}
&x_1 - x_2 \leq 0 \\
&x_1 \leq 3 \\
&\kappa\alpha\iota \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Η γραφική του επίλυση είναι:



Παρατηρούμε ότι ενώ η αντικειμενική συνάρτηση μπορεί να αυξάνεται απεριόριστα η μεταβλητή x_1 είναι πεπερασμένη.

Πεπερασμένη βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης με μη πεπερασμένες τιμές των μεταβλητών

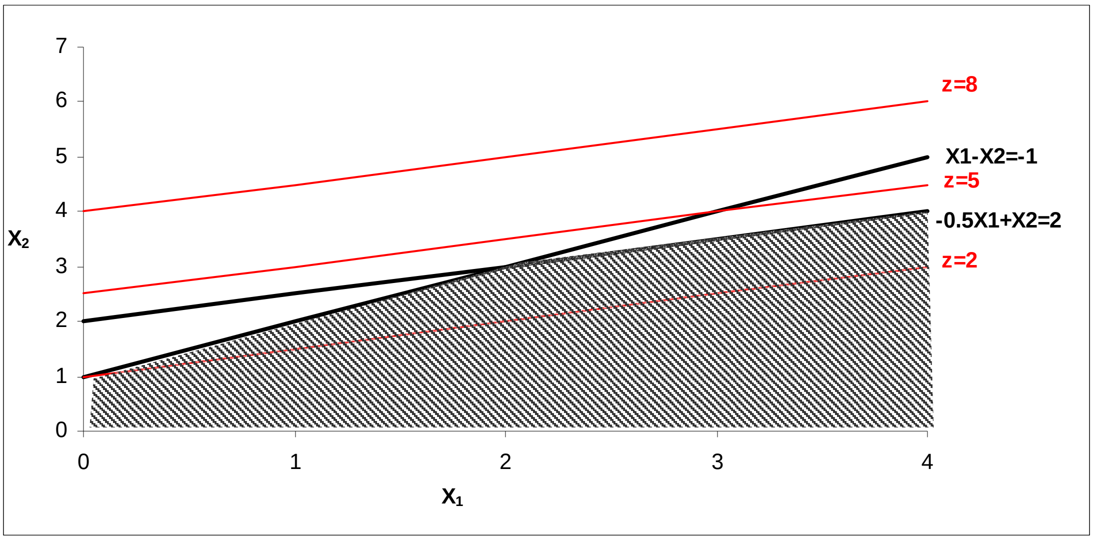
Έστω το παρακάτω πρόβλημα Γ.Π.:

$\max z = -x_1 + 2x_2$

Με τους περιορισμούς:

$$
\begin{aligned}
&x_1 - x_2 \geq -1 \\
&-0.5x_1 + x_2 \leq 2 \\
&\kappa\alpha\iota \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Και με γραφική επίλυση:



Παρατηρούμε ότι Στην συγκεκριμένη περίπτωση παρατηρούμε ότι ενώ η z έχει πεπερασμένη μέγιστη τιμή z=4 οι τιμές των μεταβλητών είναι απεριόριστα μεγάλες.

Καμία λύση - ασυμβίβαστοι περιορισμοί

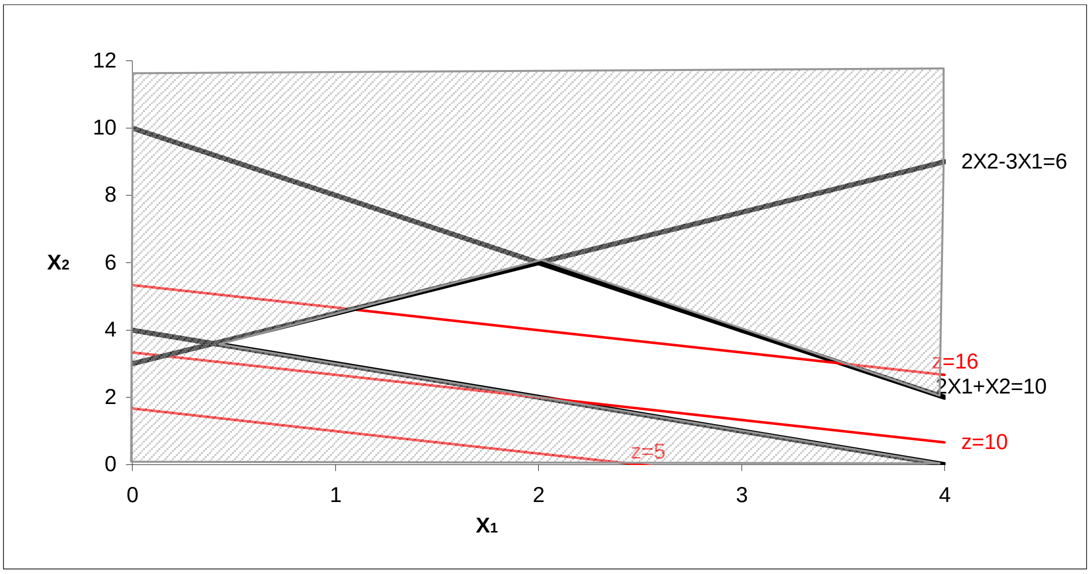
Έστω το πρόβλημα Γ.Π.:

$\max z = 2x_1 + 3x_2$

Με τους περιορισμούς:

$$\begin{aligned} &2x_1 + x_2 \geq 10 \\ &x_1 + x_2 \leq 4 \\ &-3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ &\kappa\alpha\iota \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Με γραφική επίλυση:



Παρατηρούμε ότι οι περιορισμοί σε αυτή την περίπτωση είναι μη συμβιβαστοί και έτσι δεν υπάρχει χωρίο δυνατών λύσεων. Δηλαδή δεν υπάρχει σημείο (x_1, x_2) που να ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς.

Γενικά, η διαδικασία γραφικής επίλυσης ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού είναι πολύ σημαντική γιατί μας δίνει τη δυνατότητα να σχεδιάσουμε την περιοχή των εφικτών λύσεων και να κατανοήσουμε τον τρόπο που λειτουργούν οι διάφορες μέθοδοι επίλυσης προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού. Επίσης μας βοηθά να διερευνήσουμε την ευαισθησία της βέλτιστης λύσης του προβλήματος. Πρακτικά, βέβαια δεν έχει εφαρμογή αφού τα προβλήματα έχουν πολλές μεταβλητές και πολλούς περιορισμούς.

1.5 Λύση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού

Αν και η γεωμετρική ερμηνεία των προβλημάτων είναι αρκετά σημαντική δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για όλα τα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού και αυτό γιατί στην πράξη τα περισσότερα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού έχουν περισσότερες από δύο μεταβλητές. Η κύρια μέθοδος επίλυσης προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού είναι η μέθοδος Simplex, ένας αλγόριθμος αριστοποίησης ο οποίος χαρακτηρίζεται από ένα αριθμό επαναλαμβανόμενων βημάτων τα οποία μπορούν να κωδικοποιηθούν στον Η/Υ. Πριν παρουσιάσουμε την μέθοδο αυτή θα διατυπώσουμε κάποιους βασικούς ορισμούς.

Το **γενικό μοντέλο του γραμμικού προγραμματισμού** είναι:

$z = \max f(\mathrm{x}) = \mathrm{c}^{\mathrm{T}}\mathrm{x}$

$\mathrm{Ax}\ \{\leq, =, \geq\}\ \mathrm{b}$

$\mathrm{x} \geq 0$

$\mathrm{x} \in M_{r\times 1},\ \mathrm{c} \in \mathrm{M}_{\mathrm{r}\times 1},\ 0 \in \mathrm{M}_{\mathrm{r}\times 1},\ \mathrm{b} \in \mathrm{M}_{\mathrm{m}\times 1},\ \mathrm{A} \in \mathrm{M}_{\mathrm{m}\times \mathrm{r}},$

Η **κανονική μορφή** του προβλήματος είναι:

$z = \max f(\mathrm{x}) = \mathrm{c}^{\mathrm{T}}\mathrm{x}$

$\mathrm{Ax}=\mathrm{b}$

$\mathrm{x} \geq 0$

$\mathrm{x} \in M_{r\times 1},\ \mathrm{c} \in \mathrm{M}_{\mathrm{r}\times 1},\ 0 \in \mathrm{M}_{\mathrm{r}\times 1},\ \mathrm{b} \in \mathrm{M}_{\mathrm{m}\times 1},\ \mathrm{A} \in \mathrm{M}_{m\times r}$ και $\mathrm{b} \geq 0$.

Υποθέτουμε ότι m<r και ότι οι γραμμές του πίνακα A είναι ανεξάρτητες

Κάθε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού μπορεί να αναχθεί στην κανονική μορφή με την χρήση στοιχειωδών μετασχηματισμών όπως οι παρακάτω:

Μετασχηματισμοί προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού σε κανονική μορφή

Περιθώριες μεταβλητές

Περιορισμοί που εκφράζονται με ανισώσεις μπορούν να μετατραπούν σε εξισώσεις με την εισαγωγή νέων μη αρνητικών μεταβλητών οι οποίες μπορούν να μετατρέψουν τις ανισώσεις σε εξισώσεις. Οι μεταβλητές αυτές ονομάζονται περιθώριες. Υπάρχουν δύο είδη περιθώριων μεταβλητών οι χαλαρές και οι πλεονασματικές.

- Χαλαρή μεταβλητή

Σε ένα περιορισμό της μορφής $\sum_{j=1}^{r} a_{kj}x_j \leq b_k$ θεωρούμε μια νέα μεταβλητή $x_{r+k} \geq 0$,

όπου

$$\boxed{x_{r+k} = b_k - \sum_{j=1}^{r} a_{kj}x_j}$$

και η οποία προστίθεται στο πρώτο μέλος της ανισότητας ώστε να έχουμε την ισότητα:

$$\sum_{j=1}^{r} a_{kj}x_j + x_{r+k} = b_k$$

Θα ονομάζουμε την x_{r+k} μια χαλαρή μεταβλητή.

Για παράδειγμα ένας περιορισμός της μορφής $x_1 + 5x_2 + 7x_3 \leq 6$ θα γραφεί στην μορφή $x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 6$ όπου η $x_4 \geq 0$ είναι μια χαλαρή μεταβλητή.

- Πλεονασματική μεταβλητή

Σε ένα περιορισμό της μορφής $\sum_{j=1}^{r} a_{kj}x_j \geq b_k$ θεωρούμε μια νέα μεταβλητή $x_{r+k} \geq 0$

όπου

$$\boxed{x_{r+k} = \sum_{j=1}^{r} a_{kj}x_j - b_k}$$

και η οποία αφαιρείται από το πρώτο μέλος της ανισότητας ώστε να έχουμε την ισότητα:

$$\sum_{j=1}^{r} a_{kj}x_j - x_{r+k} = b_k$$

Θα ονομάζουμε την x_{r+k} μια πλεονασματική μεταβλητή.

Για παράδειγμα, ο περιορισμός της μορφής $x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 10$ θα γραφεί στην μορφή $x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = 10$ όπου η $x_4 \geq 0$ είναι μια πλεονασματική μεταβλητή.

Μετασχηματισμός προβλήματος ελαχιστοποίησης

Όταν ζητάμε να προσδιορίσουμε το ελάχιστο της αντικειμενικής συνάρτησης $f(x)$ τότε θέτουμε $f(x)= -g(x)$ και μεγιστοποιούμε την συνάρτηση $g(x)$. Άρα $\min f(x) = -\max g(x)$.

Για παράδειγμα η $\min z = f(x) = x_1 + 2x_2 + 5x_3$ θα γίνει $-Maxz = g(x) = -x_1 - 2x_2 - 5x_3$.

Μεταβλητές χωρίς περιορισμό στο πρόσημο

Αυτές οι μεταβλητές $x_i \in \mathbb{R}$ δεν υπόκεινται στον περιορισμό $x_i \geq 0$. Στην περίπτωση αυτή θέτουμε $x_i = x_i^+ - x_i^-$ όπου $x_i^+, x_i^- \geq 0$. Αν η μεταβλητή x_j είναι μη θετική, θέτουμε $x_j = -x_j^+$, όπου $x_j \geq 0$.

Για παράδειγμα εάν έχω τον περιορισμό $x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 10$ με $x_1, x_2 \geq 0$ και x_3 αγνώστου πρόσημου, τότε θέτω $x_3 = x_3^+ - x_3^-$ και ο περιορισμός γίνεται $x_1 + 3x_2 + 5x_3^+ - 5x_3^- = 10$.

Αρνητικοί σταθεροί όροι σε περιορισμούς

Εάν σε κάποιο περιορισμό ο σταθερός όρος είναι αρνητικός τότε πολλαπλασιάζοντας με (-1) γίνεται θετικός.

Δηλαδή ο περιορισμός $x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -10$ θα γίνει $-x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 10$

Στην κανονική μορφή του προβλήματος το σύστημα Ax=b έχει r μεταβλητές και m γραμμικές εξισώσεις με m<r.

Βασική λύση είναι μία λύση που προκύπτει αν θέσουμε r-m μεταβλητές ίσες με το μηδέν και λύσουμε ως προς τις υπόλοιπες m μεταβλητές υπό τον όρο το γραμμικό σύστημα που προκύπτει να περιλαμβάνει m από τις στήλες (διανύσματα) του πίνακα Α έτσι ώστε τα διανύσματα αυτά να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Δηλαδή ο πίνακας Α να περιέχει έναν υποπίνακα διάστασης $m \times m$ για τον οποίο ισχύει ότι η ορίζουσα του είναι διάφορη του μηδενός. Η τετραγωνική μήτρα $m \times m$, που προκύπτει από τον Α και έχει m γραμμικά ανεξάρτητες στήλες καλείται **βάση** του συστήματος ενώ οι m μεταβλητές που αντιστοιχούν στις στήλες της βάσεως καλούνται **βασικές μεταβλητές.** Οι υπόλοιπες r-m μεταβλητές που δεν περιλαμβάνονται στη βάση καλούνται **μη βασικές μεταβλητές.** Αν συμβολίσουμε τον υποπίνακα των m γραμμικά ανεξάρτητων στηλών του Α με Β, επειδή det(B) $\neq 0$, η **βασική λύση** μπορεί να υπολογιστεί από την σχέση $\mathbf{x_B} = \mathbf{B^{-1}b}$, όπου $\mathbf{x_B}$ είναι το διάνυσμα των βασικών μεταβλητών. Ο πίνακας Β ονομάζεται και **βασικός πίνακας.**

Βασική εφικτή λύση είναι μία βασική λύση όπου όλες οι βασικές μεταβλητές είναι μη αρνητικές.

Μη εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση είναι μία βασική εφικτή λύση με ακριβώς m θετικά x_i. Επομένως, μία εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση έχει λιγότερα από m θετικά x_i.

Ορισμός: Ένα υποσύνολο S του $\mathbb{R}^r$ λέγεται κυρτό αν για οποιοδήποτε στοιχεία $\mathbf{x},\mathbf{y} \in S$, και για κάθε $\lambda \in [0,1]$, ισχύει $\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} \in S$

Θεώρημα 1: Το σύνολο όλων των εφικτών λύσεων ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού είναι ένα κυρτό σύνολο

Απόδειξη

Έστω u,v εφικτές λύσεις. Τότε Au=b, u≥0 και Av=b, v≥0. Για 0≤λ≤1 πρέπει να δείξουμε ότι λu + (1-λ)v είναι εφικτή λύση. Έχουμε ότι

λu + (1-λ)v≥0 και

A(λu + (1-λ)v)=λ Au+(1-λ)Av=λb+(1-λ)b=b.

Άρα το λu + (1-λ)v είναι εφικτή λύση.

Ορισμός: Ένα σημείο x ενός κυρτού συνόλου S καλείται ακραίο σημείο (extreme point) αν δεν υπάρχουν $u, v \in S$ διαφορετικά μεταξύ τους, τέτοια ώστε x= λu + (1-λ)v για κάποιο λ με 0<λ<1.

Ορισμός: Ένα πολύεδρο του $\mathbb{R}^r$ είναι ένα σύνολο της μορφής

$$W = \left\{ x \in \mathbb{R}^r \left| \sum a_{ij} x_j \le (\acute{\eta} = \acute{\eta} \ge) b_i, \text{ i=1,2,...,m} \right. \right\}$$

Ένα ακραίο σημείο ενός πολυέδρου καλείται κορυφή του πολυέδρου.

Θεώρημα 2: Υποθέτουμε ότι το σύνολο $U=\{x \in \mathbb{R}^r | Ax=b, x \ge 0\}$ είναι φραγμένο και μη κενό. Τότε η αντικειμενική συνάρτηση $f(x)=c^T x$ λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της σε ένα ακραίο σημείο του U.

Απόδειξη

Το U είναι κλειστό και φραγμένο άρα συμπαγές και η f λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της σε κάποιο σημείο $\overline{x} \in U$. Αν το $\overline{x}$ είναι ακραίο σημείο, το θεώρημα έχει αποδειχθεί. Αν υποθέσουμε ότι το $\overline{x}$ δεν είναι ακραίο σημείο, τότε είναι γνωστό ότι μπορούμε να εκφράσουμε το $\overline{x}$ σαν κυρτό συνδυασμό ακραίων σημείων του U. Δηλαδή αν x_j είναι ακραία σημεία του U τότε $\overline{x} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j$, με $\lambda_j \ge 0$ και $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$.

Έστω $f(x_p) = \max_j f(x_j)$.

Τότε

$$f(\overline{x}) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \ldots + \lambda_n f(x_n) \le \lambda_1 f(x_p) + \lambda_2 f(x_p) + \ldots + \lambda_n f(x_p) = f(x_p)$$

και επειδή $f(\overline{x}) \ge f(x), \forall x \in U$ πρέπει να έχουμε $f(\overline{x}) = f(x_p)$ δηλαδή υπάρχει ακραίο σημείο x_p στο οποίο η αντικειμενική συνάρτηση λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της.

Έστω $A=(A_1\,A_2\ldots A_r)$, όπου A_j η j στήλη του πίνακα A και A_j διάνυσμα διάστασης m.

Θεώρημα 3:(Ισοδυναμία ακραίων σημείων και βασικών εφικτών λύσεων)

Για $x\in U$ ορίζουμε το $I(x)=\{j \mid 1\le j\le r,\ x_j>0\}$. Ένα σημείο $x\in U$, $x\neq 0$ είναι κορυφή του U αν και μόνο αν οι στήλες A_j, $j\in I(x)$ του πίνακα A είναι ανεξάρτητες, δηλαδή αν το x είναι βασική εφικτή λύση.

Απόδειξη

Έστω x βασική εφικτή λύση δηλαδή οι στήλες A_j, $j\in I(x)$ είναι ανεξάρτητες και έστω ότι x= λu + (1-λ)v , 0≤λ≤1, $u,v\in U$. Τότε για $j\notin I(x) \Rightarrow$ $x_j=0 \Rightarrow u_j=v_j=0$ και

$Au=Av=b \Rightarrow A(u-v)=0 \Rightarrow \sum(u_j-v_j)A_j=0 \Rightarrow$ $u_j=v_j$ για $j\in I(x)$, επειδή οι στήλες A_j, $j\in I(x)$ είναι ανεξάρτητες. Άρα u=v και x ακραίο σημείο του U.

Έστω ότι x δεν είναι βασική εφικτή λύση, δηλαδή οι στήλες A_j, $j\in I(x)$ είναι εξαρτημένες. Τότε $\sum_{j\in I(x)} u_j A_j = 0$ με u_j όχι όλα μηδέν. Συμπληρώνοντας το διάνυσμα u με $u_j=0$ για κάθε $j\notin I(x)$ έχουμε ότι υπάρχει $u\neq 0$ τέτοιο ώστε Au=0.

Επειδή $x_j>0$ για $j\in I(x)$ μπορούμε να διαλέξουμε $\theta\neq 0$ τέτοιο ώστε $x\pm\theta u\geq 0$. Επίσης $A(x\pm\theta u)=Ax+\theta Au=Ax=b$ δηλαδή $x\pm\theta u\in U$.

Τότε x=1/2(x+θu)+1/2(x-θu), θu≠0 που σημαίνει ότι το x δεν είναι ακραίο σημείο του U.

Θεώρημα 4

Αν υπάρχει βέλτιστη λύση σε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού τότε υπάρχει βέλτιστη βασική εφικτή λύση.

.

Μέθοδος Simplex

Η βέλτιστη λύση όπως παρατηρήθηκε προηγουμένως αντιστοιχεί σε μια κορυφή στη γεωμετρική απεικόνιση του εφικτού συνόλου. Η μέθοδος simplex ξεκινώντας από μια αρχική κορυφή μπορεί να πάει σε άλλες γειτονικές κορυφές κατά μήκος των ακμών του πολυγώνου του εφικτού συνόλου. Σε κάθε μετάβαση της μεθόδου από μία κορυφή σε μια άλλη η μέθοδος simplex κατορθώνει να βρει την ακμή που την οδηγεί σε μια κορυφή, η οποία δίνει βελτιωμένη τιμή στην αντικειμενική συνάρτηση. Συνεχίζοντας κατά αυτό τον τρόπο η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης από κορυφή σε κορυφή βελτιώνεται και τελικά φτάνουμε σε μια κορυφή όπου η αντικειμενική συνάρτηση βελτιστοποιείται. Οποιαδήποτε άλλη κορυφή δίνει χειρότερη λύση και έτσι η διαδικασία τερματίζεται.

Η μέθοδος simplex είναι μια αλγεβρική επαναληπτική διαδικασία όπου σε κάθε βήμα έχουμε μια νέα βασική εφικτή λύση προβλημάτων της μορφής:

$z = \max f(\mathrm{x}) = \mathrm{c}^{\mathrm{T}}\mathrm{x}$

$\mathrm{Ax}=\mathrm{b}$

$\mathrm{x} \geq 0$

Στη συνέχεια πρέπει να εξετάσουμε αν η τρέχουσα βασική εφικτή λύση είναι και η βέλτιστη. Συνεπώς χρειαζόμαστε έναν έλεγχο για το αν η λύση είναι η βέλτιστη. Αν είναι τότε η διαδικασία τερματίζεται. Αν η τρέχουσα βασική λύση δεν είναι βέλτιστη τότε χρειαζόμαστε μια μέθοδο με την οποία θα μπορούμε να βρούμε μία καλύτερη βασική βέλτιστη λύση. Η διαδικασία θα περατωθεί ως ένα πεπερασμένο πλήθος βημάτων, επειδή ο αριθμός των βασικών εφικτών λύσεων είναι πεπερασμένος, και αν η λύση δεν επιστρέψει σε κάποια προηγούμενη τελικά θα φθάσουμε στην βέλτιστη.

Ο Αλγόριθμος Simplex

Τα βασικά σημεία του αλγόριθμου simplex είναι:

1. Υπολογίζουμε μια αρχική βασική λύση x_B, επιλέγοντας τη βάση B από τις στήλες του πίνακα A, με κατάλληλη επιλογή μεταξύ των γραμμικώς ανεξάρτητων στηλών του πίνακα A.

2. Εκφράζουμε τα διανύσματα του πίνακα A που δεν ανήκουν στην βάση συναρτήσει των διανυσμάτων της βάσης και υπολογίζουμε τα αντίστοιχα y_j σύμφωνα με την σχέση: $y_j = B^{-1} \cdot A_j$, όπου A_j η j στήλη του πίνακα A.

3. Υπολογίζουμε τις τιμές z_j για τα διανύσματα εκτός βάσης εφαρμόζοντας τη σχέση $z_j = \mathrm{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} \mathrm{y}_j$

4. Υπολογίζουμε τις ποσότητες z_j-c_j. Αν για όλα τα j ισχύει ότι z_j-$c_j \geq 0$, τότε έχουμε βέλτιστη λύση

5. Αν ένα ή περισσότερα z_j-c_j<0, επιλέγουμε ένα διάνυσμα a_k από τα εκτός βάσης για να εισέλθει στη βάση, εφαρμόζοντας το επόμενο κριτήριο:

$$z_k - c_k = \min_j \left\{ z_j - c_j \middle| z_j - c_j < 0 \right\}$$

6. Αν όλα τα $y_{ik} \leq 0$, τότε υπάρχει μια μη φραγμένη λύση. Αν ένα τουλάχιστον $y_{ik} > 0$, επιλέγουμε το διάνυσμα b_r που θα φύγει από τη βάση σύμφωνα με το κριτήριο: $\dfrac{x_{Br}}{y_{rk}} = \min\limits_i \left\{ \dfrac{x_{Bi}}{y_{ik}}, y_{ik} > 0 \right\} = \theta$

7. Υπολογίζουμε την νέα βάση B η οποία προκύπτει από την προηγούμενη αντικαθιστώντας το διάνυσμα b_r με το νέο a_k. Υπολογίζουμε την νέα βασική εφικτή λύση $\hat{x}_B$, με τις σχέσεις :

$$\hat{x}_{Bi} = x_{Bi} - x_{Br} \frac{y_{ij}}{y_{rj}}, \ i \neq r$$

$$\hat{x}_{Br} = \frac{x_{Br}}{y_{rj}}$$

και τις νέες τιμές των $y_{ij,}$ z_j-c_j και z .

8. Επιστρέφουμε στο δεύτερο βήμα και επαναλαμβάνουμε την διαδικασία .

Ο πίνακας Simplex

Ο πίνακας simplex αποτελεί ένα συστηματικό τρόπο καταχώρησης των απαραίτητων ποσοτήτων, έτσι ώστε τα αναγκαία βήματα εφαρμογής του αλγορίθμου simplex να μπορούν να εκτελούνται με ποιο απλό , σύντομο και αποτελεσματικό τρόπο. Ένας αρχικός και ένας μετασχηματισμένος πίνακας είναι :

			c_1	c_2	$\cdots$	c_m	$\cdots$	c_n
$\mathbf{c}_B$	$\mathbf{B}$	$\mathbf{x_B}$	$\mathbf{y_1}$	$\mathbf{y}_2$	$\cdots$	$\mathbf{y}_m$	$\cdots$	$\mathbf{y_n}$
c_{B1}	$\mathbf{b}_1$	x_{B1}	y_{11}	y_{12}	$\cdots$	y_{1m}	$\cdots$	y_{1n}
c_{B2}	$\mathbf{b}_2$	x_{B2}	y_{21}	y_{22}	$\cdots$	y_{2m}	$\cdots$	y_{2n}
.	.	.	.	.	$\cdots$	.	$\cdots$	.
.	.	.	.	.	$\cdots$	.	$\cdots$	.
.	.	.	.	.	$\cdots$	.	$\cdots$	.
c_{Bm}	$\mathbf{b}_m$	x_{Bm}	y_{m1}	y_{m2}	$\cdots$	y_{mm}	$\cdots$	y_{mn}
		z	z_1-c_1	z_2-c_2	$\ldots$	z_m-c_m	$\ldots$	z_n-c_n

Και ο μετασχηματισμένος:

			c_1	.	c_k	.	c_n
$\mathrm{c_B}$	$\mathbf{B}$	$\mathrm{x_B}$	y_1	.	y_k	.	y_n
c_{B1}	$\mathbf{b_1}$	$x_{B1}-y_{1k}\dfrac{y_{r1}}{y_{rk}}$	$y_{11}-y_{1k}\dfrac{y_{r1}}{y_{rk}}$	.	0	.	$y_{1n}-y_{1k}\dfrac{y_{rn}}{y_{rk}}$
c_{B2}	$\mathbf{b_2}$	$x_{B2}-y_{2k}\dfrac{x_{Br}}{x_{rk}}$	$y_{21}-y_{2k}\dfrac{y_{r1}}{y_{rk}}$	.	0	.	$y_{2n}-y_{2k}\dfrac{y_{rn}}{y_{rk}}$
.	.	.	.	.	.	.	.
c_{Br}	$\mathbf{b_r}=\mathbf{a_k}$	$\dfrac{x_{Br}}{x_{rk}}$	$\dfrac{y_{r1}}{y_{rk}}$	.	1	.	$\dfrac{y_{rn}}{y_{rk}}$
.	.	.	.	.	.	.	.
c_{Bm}	$\mathbf{b_m}$	$x_{Bm}-y_{2m}\dfrac{x_{Br}}{x_{rk}}$	$y_{m1}-y_{mk}\dfrac{y_{r1}}{y_{rk}}$	.	0	.	$y_{mn}-y_{mk}\dfrac{y_{rn}}{y_{rk}}$
		$z-\dfrac{x_{Br}}{y_{rk}}(z_k-c_k)$	$(z_1-c_1)-\dfrac{y_{r1}}{y_{rk}}(z_k-c_k)$	.	0	.	$(z_n-c_n)-\dfrac{y_{rn}}{y_{rk}}(z_k-c_k)$

Ο Αλγόριθμος Simplex είναι εκθετικού χρόνου.

Αν και υπάρχουν παραδείγματα που επιβεβαιώνουν το παραπάνω, στην πράξη κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει γι' αυτό και η μέθοδος Simplex χρησιμοποιείται ευρύτατα. Το 1979 ο Khachiyan ανακάλυψε τον πρώτο πολυωνυμικό αλγόριθμο για τον γραμμικό προγραμματισμό την ελλειψοειδή μέθοδο, η οποία δεν είχε όμως μεγάλο πρακτικό ενδιαφέρον γιατί στις περισσότερες πρακτικές εφαρμογές έδινε χειρότερα αποτελέσματα από την μέθοδο Simplex. Τελικά το 1984 ο Karmarkar ανακάλυψε έναν άλλον πολυωνυμικό αλγόριθμο που είχε και πρακτικά αποτελέσματα καλύτερα από την μέθοδο Simplex.

1.6 Ανάλυση ευαισθησίας

Η ανάλυση ευαισθησίας είναι μία μέθοδος η οποία εφαρμόζεται για να προσδιορίσει την ευαισθησία της λύσης ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού στις μεταβολές των παραμέτρων του.

Το πλέον διαδεδομένο μέσο για εύρεση της βέλτιστης λύσης ενός προβλήματος καθώς και την ανάλυση ευαισθησίας του είναι το Microsoft Excel και πιο συγκεκριμένα το εργαλείο Solver. Το Solver μας δίνει την αναφορά απάντησης (Answer Report), την ανάλυση ευαισθησίας (Sensitivity Report) και την αναφορά ορίων (Limits Report).

Αναφορά απάντησης

Κελί προορισμού

Κελί	Όνομα	Αρχική τιμή	Τελική τιμή

Στη θέση Κελί αναγράφεται το κελί του Excel που έχω ορίσει την αντικειμενική συνάρτηση και στο Όνομα το όνομα που έχω δώσει στην αντικειμενική συνάρτηση. Στην Αρχική τιμή αναγράφεται η τιμή που είχε η αντικειμενική συνάρτηση πριν την λύση, ενώ στην Τελική τιμή η τιμή που πήρε μετά την λύση του προβλήματος.

Ρυθμιζόμενα κελιά

Στα ρυθμιζόμενα κελιά αντίστοιχα, αναγράφονται το κελί, το όνομα, η αρχική και η τελική τιμή της κάθε μεταβλητής.

Κελί	Όνομα	Αρχική τιμή	Τελική τιμή

Περιορισμοί

Κελί	Όνομα	Τιμή κελιού	Τύπος	Κατάσταση	Απόκλιση

Το μέρος αυτό της αναφοράς απάντησης αναφέρεται στους περιορισμούς. Δείχνει το κελί που βρίσκονται, το όνομα τους, την τιμή που παίρνουν καθώς και τον τύπο που έχει ο κάθε περιορισμός. Στην Κατάσταση, αναφέρεται αν ένας περιορισμός είναι ενεργός (υποχρεωτικός) ή μη ενεργός (μη υποχρεωτικός).

Ένας περιορισμός θεωρείται **binding (ενεργός)** όταν στην βέλτιστη λύση ισχύει σαν ισότητα. Οι περιορισμοί αυτοί είναι εκείνοι των οποίων η τομή των αντίστοιχων ευθειών τους καθορίζει την κορυφή που αποτελεί την βέλτιστη λύση. Στην περίπτωση που ο περιορισμός αυτός είναι της μορφής {≤} δείχνει έναν πόρο ο οποίος έχει στη βέλτιστη λύση καταναλωθεί πλήρως ενώ όταν είναι της μορφής {≥} δείχνει έναν πόρο ο οποίος έχει καταναλωθεί στο ελάχιστο, δηλαδή στην βέλτιστη λύση ικανοποιείται το κατώτατο όριο του περιορισμού. Ένας περιορισμός που δεν είναι ενεργός λέγεται **not binding (μη ενεργός)** και στην περίπτωση που είναι της μορφής {≤} εκφράζει ένα πόρο ο οποίος δεν έχει καταναλωθεί πλήρως, δηλαδή υπάρχει περίσσευμα του πόρου αυτού. Ένας μη ενεργός περιορισμός της μορφής {≥} εκφράζει μια απαίτηση της οποίας όχι μόνο έχει ικανοποιηθεί η ελάχιστη απαιτούμενη ποσότητα αλλά και έχει ξεπεραστεί. Οι μη ενεργοί περιορισμοί δεν μετέχουν στη βέλτιστη λύση.

Η απόκλιση είναι η διαφορά τις τιμής που παίρνει ένας μη ενεργός περιορισμός από την ελάχιστη η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει.

Ανάλυση ευαισθησίας

Το Solver παρουσιάζει την ανάλυση ευαισθησίας σε δύο μέρη. Το πρώτο είναι τα Ρυθμιζόμενα Κελιά (Changing Cells) και το δεύτερο οι Περιορισμοί (Constraints).

Ρυθμιζόμενα Κελιά

Κελί	Όνομα	Τελική Τιμή	Μειωμένο κόστος	Αντικειμενικός Συντελεστής	Επιτρεπόμενη αύξηση	Επιτρεπόμενη μείωση

Τα ρυθμιζόμενα κελιά δίνουν πληροφορίες για τις μεταβλητές του προβλήματος και για την αντικειμενική συνάρτηση. Περιέχει τα κελιά, τα ονόματα των μεταβλητών, την τελική βέλτιστη τιμή τους, το μειωμένο κόστος (Reduced Cost), τους συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης (Objective Coefficient) και την επιτρεπόμενη αύξηση και μείωση των συντελεστών της αντικειμενικής συνάρτησης.

Αν αλλάξουμε τον περιορισμό $x_j \geq 0$, για κάποιο j=1,2,…,r (συνθήκη μη αρνητικότητας), όπως για παράδειγμα η συγκεκριμένη μεταβλητή να είναι μεγαλύτερη ή ίση της μονάδας, δηλαδή $x_j \geq 1$, τότε η μεταβολή της αντικειμενικής συνάρτησης θα ονομάζεται **Μειωμένο κόστος (Reduced cost).**

Η **επιτρεπτή αύξηση (allowable increase)** και **επιτρεπτή μείωση (allowable decrease)** δείχνει το πόσο οι συντελεστές των μεταβλητών της αντικειμενικής συνάρτησης μπορούν να αλλάξουν χωρίς να αλλάξει η τιμή οποιασδήποτε μεταβλητής. Ωστόσο η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης θα αλλάξει εάν ένας συντελεστής αλλάξει και η αντίστοιχη μεταβλητή του παραμείνει αμετάβλητη.

Περιορισμοί

Κελί	Όνομα	Τελική τιμή	Σκιώδης τιμή	Περιορισμός R.H Side	Επιτρεπόμενη αύξηση	Επιτρεπόμενη μείωση

Στο δεύτερο μέρος της ανάλυσης ευαισθησίας τα τρία πρώτα κελιά αναφέρονται στο κελί, το όνομα και την τελική τιμή του αριστερού μέλους κάθε περιορισμού για τη βέλτιστη λύση. Τα υπόλοιπα κελιά αναλύονται ως εξής:

Σκιώδης τιμή (Shadow price) είναι η μεταβολή της αντικειμενικής συνάρτησης για κάθε μεταβολή ενός περιορισμού κατά μία μονάδα. Όταν η αντικειμενική συνάρτηση είναι κέρδος, μπορούμε να πούμε ότι εκφράζει την μοναδιαία αύξηση ή μείωση του κέρδους όταν ο περιορισμός αυξάνεται ή μειώνεται αντίστοιχα κατά μία μονάδα. Η σύγκριση των shadow prices κάθε περιορισμού μπορεί να παρέχει πολύτιμη πληροφορία για το που και πως μπορούμε να διαθέσουμε πιο αποδοτικά επιπρόσθετους πόρους έτσι ώστε να πετύχουμε καλύτερη βέλτιστη λύση της αντικειμενικής συνάρτησης.

Ο **περιορισμός R.H Side** είναι η τιμή του δεξιού μέλους του περιορισμού**.**

Η επιτρεπόμενη αύξηση και μείωση δείχνει το πόσο μπορεί να αυξηθεί ή να μειωθεί το δεξί μέλος ενός περιορισμού έτσι ώστε η σκιώδης τιμή του να ισχύει.

Ανάλυση Ευαισθησίας γραφικά

Έστω ότι έχουμε το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού

$\max z = 1.5x_1 + x_2$

με περιορισμούς:

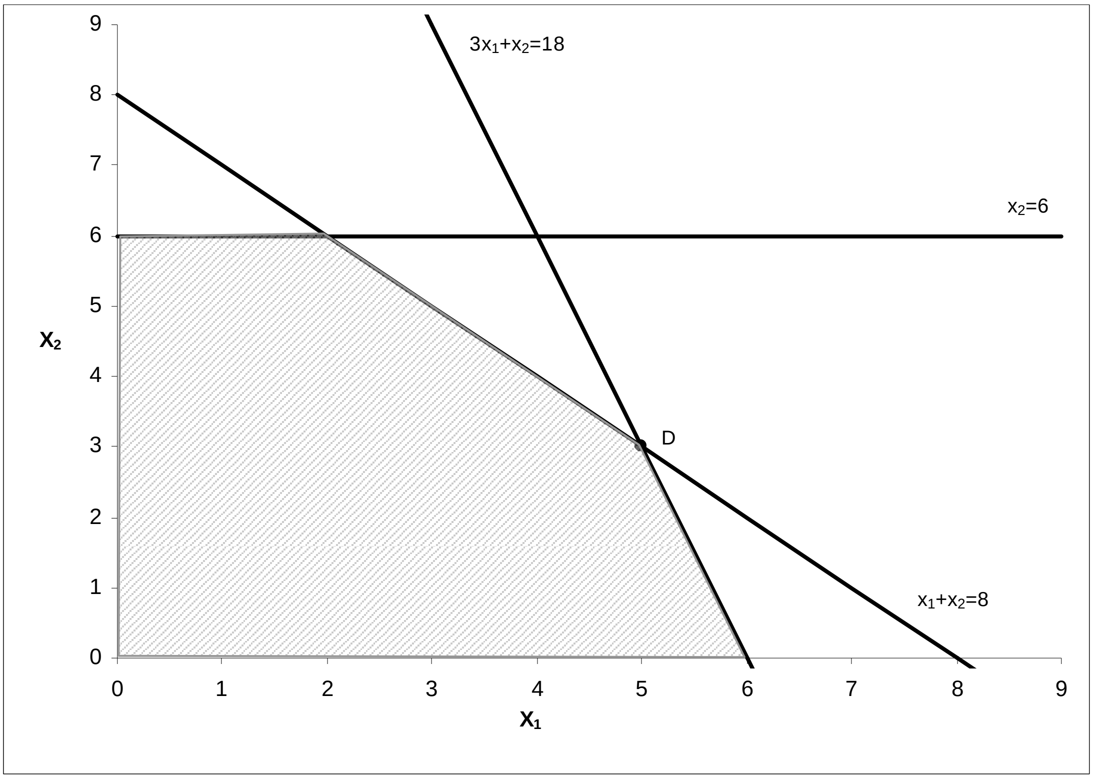
$x_1 + x_2 \leq 8$

$3x_1 + x_2 \leq 18$

$x_2 \leq 6$

$x_1, x_2 \geq 0$

Η γραφική λύση του προβλήματος είναι:



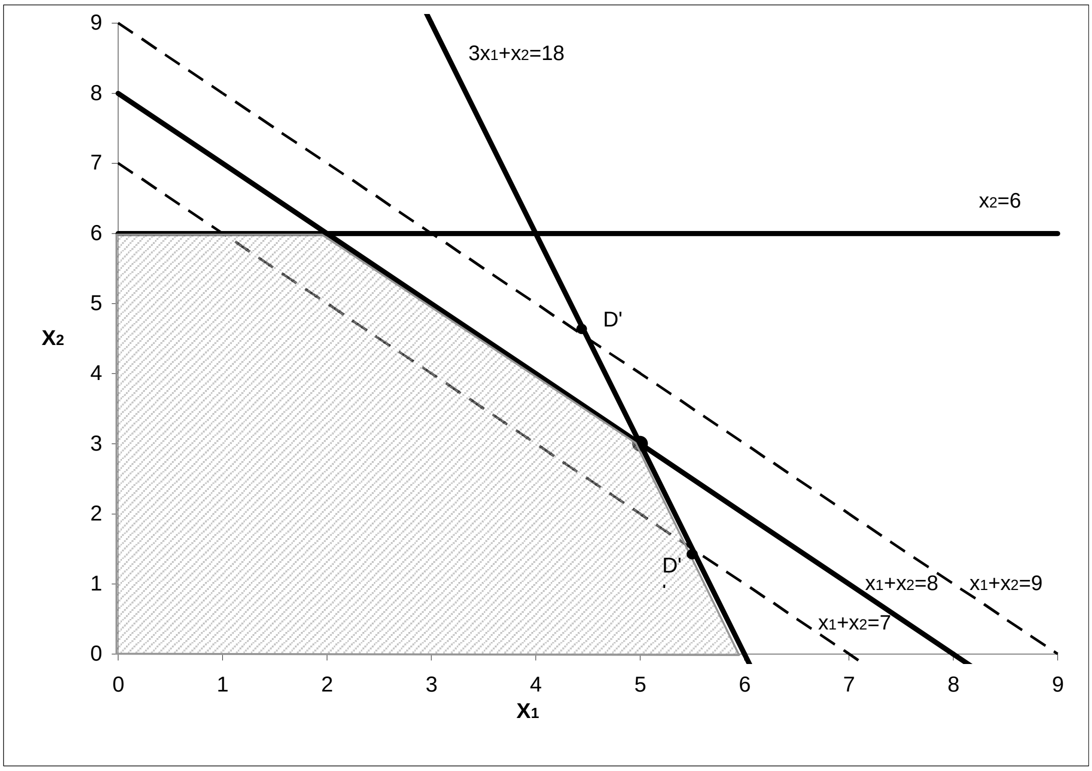
Το σημείο D είναι η βέλτιστη λύση του προβλήματος με $x_1 = 5$ και $x_2 = 3$. Έστω ότι αυξάνουμε το δεξί μέρος του περιορισμού $x_1 + x_2 \leq 8$ κατά μία μονάδα. Ο περιορισμός τότε θα γίνει $x_1 + x_2 \leq 9$.

Στην περίπτωση αυτή παρατηρούμε ότι η βέλτιστη λύση μεταφέρεται από το D στο D’ το οποίο έχει συντεταγμένες $x_1 = 4.5$ και $x_2 = 4.5$. Η αύξηση δηλαδή του περιορισμού κατά μία μονάδα επιφέρει μια μείωση του x_1 κατά 0.5 και μια αύξηση του x_2 κατά 1.5. Επομένως η συνολική αύξηση της αντικειμενικής συνάρτησης είναι: -(0.5)*1.5+(1.5)*1=0.75

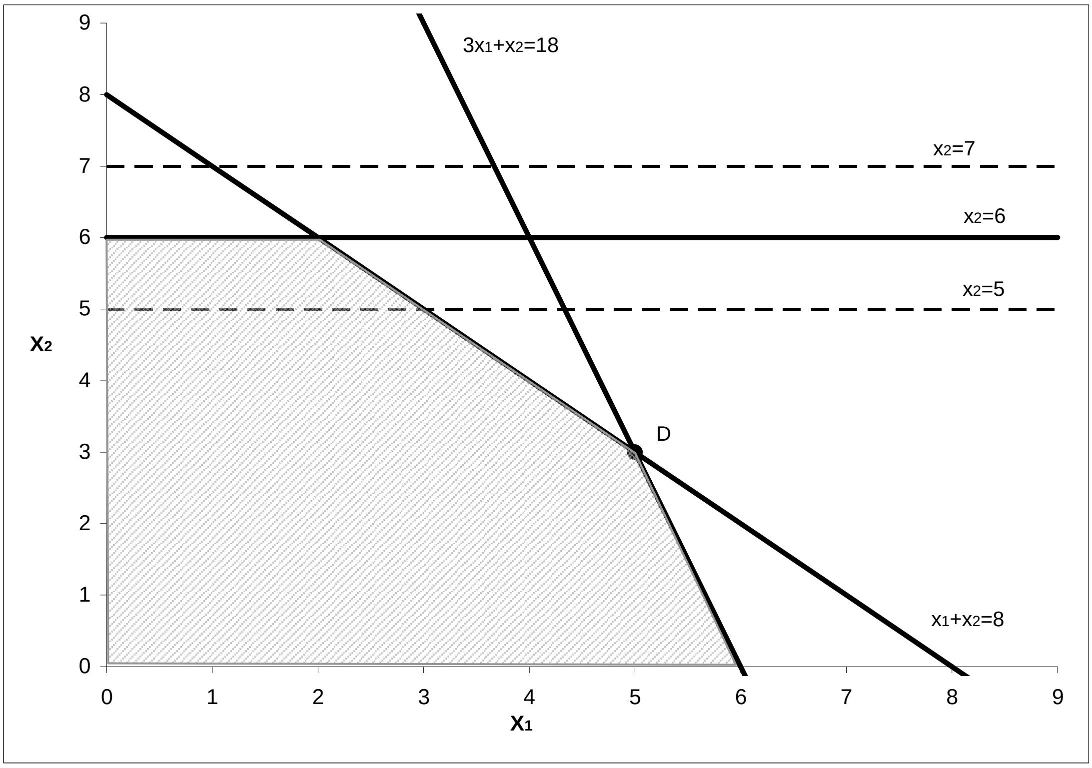
Η αύξηση αυτή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι η Σκιώδης τιμή.

Παρόμοια, αν μειωθεί ο περιορισμός κατά μία μονάδα, δηλαδή γίνει $x_1 + x_2 \leq 7$, τότε το D θα μετακινηθεί στο D’’ με συντεταγμένες $x_1 = 5.5$, $x_2 = 1.5$ και η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης θα μειωθεί κατά 0.75.

Τα παραπάνω απεικονίζονται στο ακόλουθο διάγραμμα:



Έστω ότι αυξάνουμε ή μειώνουμε το δεξί σκέλος του περιορισμού $x_2 \leq 6$. Όπως παρατηρούμε στο παρακάτω διάγραμμα, είτε γίνει $x_2 \leq 7$ είτε $x_2 \leq 5$ η αλλαγή αυτή δεν επηρεάζει τη λύση του προβλήματος διότι ο περιορισμός $x_2 \leq 6$ είναι μη ενεργός (not binding). Η βέλτιστη λύση αντιστοιχεί σε τρείς μονάδες του x_2 και έτσι το όριο των έξι μονάδων δεν επηρεάζει τη λύση. Γι’ αυτό και η Σκιώδης τιμή είναι μηδέν. Στην πραγματικότητα η Σκιώδης τιμή οποιουδήποτε μη ενεργού περιορισμού είναι πάντοτε μηδενική.



Αναφορά ορίων

Η αναφορά ορίων προσδιορίζει τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει κάθε μεταβλητή ώστε κρατώντας τις άλλες μεταβλητές σταθερές οι περιορισμοί να εξακολουθούν να ικανοποιούνται.

1.7 Παράδειγμα γραμμικού προγραμματισμού

Μια εταιρία παράγει τέσσερα προϊόντα: A, B, C και D. Κάθε μονάδα προϊόντος A απαιτεί 2 ώρες επεξεργασίας, 1 ώρα συναρμολόγησης και απόθεμα σε εξέλιξη αξίας 10€. Κάθε μονάδα προϊόντος B απαιτεί 1 ώρα επεξεργασίας, 3 ώρες συναρμολόγησης και απόθεμα σε εξέλιξη αξίας 5€. Κάθε μονάδα προϊόντος C απαιτεί 2.5 ώρες επεξεργασίας, 2.5 ώρες συναρμολόγησης και απόθεμα σε εξέλιξη αξίας 2€. Τέλος, κάθε μονάδα προϊόντος D απαιτεί 5 ώρες επεξεργασίας, καμία ώρα συναρμολόγησης και απόθεμα σε εξέλιξη αξίας 12€.

Η εταιρία διαθέτει 1200 ώρες επεξεργασίας και 1600 ώρες συναρμολόγησης. Επιπλέον, μπορεί να διαθέσει απόθεμα σε εξέλιξη αξίας το πολύ 10000€. Η κάθε μονάδα προϊόντος A αποφέρει κέρδος 40€, προϊόντος B κέρδος 24€, προϊόντος Γ κέρδος 36€ και προϊόντος D κέρδος 23€. Επίσης, από το προϊόν A μπορούν να πουληθούν το πολύ 200 μονάδες ενώ από το C το πολύ 160. Από τα B και D μπορούν να πωληθούν οσοδήποτε. Ωστόσο από το προϊόν D μπορούν να πουληθούν το λιγότερο 100 μονάδες, όρος συμβολαίου. Να βρεθεί το μέγιστο κέρδος, από την πώληση των τεσσάρων προϊόντων.

Ανάλυση Λύσης

<u>Μεταβλητές.</u>

Ως μεταβλητές ορίζουμε τη ποσότητα κάθε προϊόντος που παράγεται δηλαδή,

X_A= ποσότητα A προϊόντος

X_B= ποσότητα B προϊόντος

X_C= ποσότητα C προϊόντος

X_D= ποσότητα D προϊόντος

<u>Περιορισμοί</u>

Μέγιστος αριθμός ωρών επεξεργασίας

$2X_A + 1X_B + 2.5X_C + 5X_D \leq 1200$

Μέγιστος αριθμός ωρών συναρμολόγησης

$1X_A + 3X_B + 2.5X_C + 0X_D \leq 1600$

Κόστος αποθέματος σε εξέλιξη

$10X_A + 5X_B + 2X_C + 12X_D \leq 10000$

Ποσότητες του κάθε προϊόντος που μπορεί να πουληθεί

$X_A \leq 200$

$X_C \leq 160$

$X_D \geq 100$

Αντικειμενική συνάρτηση

Στο πρόβλημα ζητείται να μεγιστοποιηθεί το κέρδος. Επομένως

$$\boxed{\text{Max } Z = f(x) = 40\, X_A + 24\, X_B + 36\, X_C + 23\, X_D}$$

Λύση προβλήματος

Χρησιμοποιώντας το Solver του Excel (γραμμικό μοντέλο) βρήκαμε την λύση $X_A = 100$, $X_B = 500$, $X_C = 0$, $X_D = 100$ και μέγιστο κέρδος 18300€. Στο παράρτημα φαίνονται η αναλυτική παρουσίαση του προβλήματος, οι εξισώσεις που χρησιμοποιήθηκαν, η αναφορά απάντησης, η αναφορά ευαισθησίας και η αναφορά ορίων.

Η Ανάλυση Ευαισθησίας του προβλήματος είναι:

Ρυθμιζόμενα κελιά

Κελί	Όνομα	Τελική τιμή	Μειωμένο κόστος	Αντικειμενικός συντελεστής	Επιτρεπόμενη αύξηση	Επιτρεπόμενη μείωση
K4	ΧΑ	100	0	40	8	16
K5	ΧΒ	500	0	24	73	4
K6	ΧΓ	0	-16	36	16	1E+30
K7	ΧΔ	100	0	23	73	1E+30

Περιορισμοί

Κελί	Όνομα	Τελική τιμή	Σκιώδης τιμή	Περιορισμός R.H. Side	Επιτρεπόμενη αύξηση	Επιτρεπόμενη μείωση
B14	Μέγιστος αριθμός ωρών επεξεργασίας	1200	19,2	1200	166,667	166,667
B17	Μέγιστος αριθμός ωρών συναρμολόγησης	1600	1,6	1600	500	500
B20	Κόστος αποθεμάτων σε εξέλιξη	4700	0	10000	1E+30	5300
B24	Ποσότητα ΧΑ που μπορεί να πουληθεί	100	0	200	1E+30	100
B25	Ποσότητα ΧΒ που μπορεί να πουληθεί	0	0	160	1E+30	160
B26	Ποσότητα ΧΓ που μπορεί να πουληθεί	100	-73	100	33,333	33,333

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Για την καλύτερη κατανόηση της ανάλυσης ευαισθησίας μπορούμε να απαντήσουμε στα παρακάτω ερωτήματα με την βοήθεια των αποτελεσμάτων που μας δίνει ο Solver.

1) Πόσο θα αλλάξει το κέρδος αν προσθέσουμε α)μία ώρα επεξεργασίας, β)μία ώρα συναρμολόγησης και γ) αν αυξήσουμε το κόστος αποθέματος σε εξέλιξη κατά €1;

Απάντηση

α) Αν ο περιορισμός για τον μέγιστο αριθμό ωρών επεξεργασίας αλλάξει και από 1200 γίνει 1201 τότε η αντικειμενική συνάρτηση (κέρδος) θα αυξηθεί κατά το ποσό που αναφέρεται στην Σκιώδη τιμή. Δηλαδή το κέρδος θα αυξηθεί κατά 19,2. Άρα από 18300 το συνολικό κέρδος θα γίνει 18319,2.

β) Αν ο περιορισμός για τον μέγιστο αριθμό ωρών συναρμολόγησης αλλάξει κατά μία μονάδα και από 1600 γίνει 1601 τότε η αντικειμενική συνάρτηση θα αυξηθεί κατά 1.6 όσο είναι δηλαδή η Σκιώδης τιμή. Άρα το συνολικό κέρδος θα γίνει από 18300 σε 18301,6 γ) Αν ο περιορισμός για το κόστος αποθεμάτων σε εξέλιξη αυξηθεί κατά μία μονάδα τότε από 10000 το κόστος θα γίνει 10001. Επειδή η Σκιώδης τιμή είναι μηδενική το συνολικό κέρδος δεν θα αλλάξει.

2) Υποθέτουμε ότι το συμβόλαιο για το προϊόν D απαιτεί να παραχθούν τουλάχιστον 130 μονάδες και όχι 100. Τι επίπτωση θα έχει αυτή η αλλαγή στο κέρδος;

Απάντηση

Από την ανάλυση ευαισθησίας παρατηρούμε ότι αν από 100 μονάδες γίνουν 130, η Σκιώδης τιμή ανά μονάδα προϊόντος δεν θα αλλάξει. Αυτό το συμπεραίνουμε από την επιτρεπόμενη αύξηση που είναι 33.33. Οι 30 μονάδες είναι μέσα στο επιτρεπτό διάστημα γι' αυτό και η Σκιώδης τιμή για τον περιορισμό του προϊόντος D δεν θα αλλάξει παρά μόνο αν προστεθούν παραπάνω από 33.33 μονάδες προϊόντος. Επομένως αν αυξήσουμε τον περιορισμό κατά μία μονάδα, τότε το συνολικό κέρδος θα μειωθεί κατά 73. Άρα το συνολικό κέρδος για 30 μονάδες θα μειωθεί κατά 30*(73)=2190€ και θα γίνει 18300-2190=16110€

3) Υποθέτουμε ότι το κέρδος ανά μονάδα προϊόντος C είναι 46€ και όχι 36€. Πόσο θα αλλάξει α) η λύση, β) το κέρδος;

Απάντηση

α) Αν αλλάξει το κέρδος ανά μονάδα προϊόντος C από 36€ σε 46€ δηλαδή για 10€ τότε θα αλλάξει ο συντελεστής του C στην αντικειμενική. Από τα ρυθμιζόμενα κελιά στην αναφορά ευαισθησίας παρατηρούμε ότι η επιτρεπόμενη αύξηση του αντικειμενικού συντελεστή είναι 16. Επομένως αν αυξήσουμε τον συντελεστή κατά 10, είναι μέσα στα επιτρεπτά όρια και γι' αυτό η λύση δεν θα αλλάξει.

β) Αντιθέτως, το κέρδος θα αλλάξει γιατί άλλαξε η αντικειμενική συνάρτηση και έγινε : $\text{Max } Z = f(x) = 40\ X_A + 24\ X_B + \boxed{\mathbf{46}}\ X_C + 23\ X_D$. Αντικαθιστώντας τα X_A, X_B, X_C, X_D βρίσκουμε τη νέα τιμή του κέρδους. Στην συγκεκριμένη περίπτωση η τιμή του κέρδους δεν θα αλλάξει λόγω του ότι η τελική τιμή του X_C είναι μηδέν.

4) Η εταιρία σκέφτεται να προσθέσει ένα νέο προϊόν Ε. Το προϊόν αυτό χρειάζεται 2 ώρες επεξεργασίας, 5 ώρες συναρμολόγησης, και απαιτεί 20€ κόστος αποθέματος σε εξέλιξη. Το κέρδος ανά μονάδα προϊόντος Ε είναι 50€. Συμφέρει την εταιρία να το παράγει;

Απάντηση

Για να απαντήσουμε σ' αυτό το ερώτημα θα πρέπει πρώτα να βρούμε ένα ευκαιριακό κόστος για το νέο προϊόν. Το ευκαιριακό αυτό κόστος είναι το συνολικό άθροισμα της Σκιώδη τιμής του κάθε περιορισμού επί τις αντίστοιχες μονάδες που απαιτεί το νέο προϊόν. Δηλαδή στην συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε:

EK_1= (Σκιώδης τιμή)*(Απαιτούμενο αριθμό επεξεργασίας)=19.2*2 = 38.4

EK_2= (Σκιώδης τιμή)*(Απαιτούμενο αριθμό συναρμολόγησης)=1.6*5=8

EK_3= (Σκιώδης τιμή)*(Απαιτούμενο κόστος αποθέματος σε εξέλιξη)=0*20=0

Άρα συνολικά:

$EK = EK_1 + EK_2 + EK_3 = 46{,}4$

Το ΕΚ το συγκρίνω με το κέρδος ανά μονάδα προϊόντος Ε και αν είναι μικρότερο τότε έχουμε κέρδος άρα συμφέρει την εταιρία ενώ εάν είναι μεγαλύτερο τότε δεν έχουμε κέρδος και δεν συμφέρει την εταιρία να το παράγει. Στην συγκεκριμένη περίπτωση παρατηρώ ότι $46.4<50$. Άρα την εταιρεία την συμφέρει να παράγει αυτό το νέο προϊόν. Βέβαια το πρόβλημα πρέπει να διατυπωθεί από την αρχή με το νέο προϊόν και να λυθεί ξανά για να βρεθεί η ποσότητα του προϊόντος Ε που πρέπει να παραχθεί.

2 ΓΕΝΙΚΗ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ

Οι τεχνικές λύσεων που αναφέρθηκαν, υποθέτουν ότι το πρόβλημα μπορεί να διαμορφωθεί σαν γραμμικό, έχοντας την αντικειμενική συνάρτηση αλλά και τους περιορισμούς γραμμικούς. Πολλά όμως σημαντικά προβλήματα οικονομίας και διοίκησης περιέχουν μη γραμμικές σχέσεις. Έχουν όμως βρεθεί τεχνικές γενικής βελτιστοποίησης, γραμμικών και μη γραμμικών μοντέλων. Μία από αυτές είναι με την χρήση της μαθηματικής ανάλυσης. Με τη μαθηματική ανάλυση, μπορούμε να βελτιστοποιήσουμε μια σχέση παίρνοντας την παράγωγο της και θέτοντας τη ίσο με μηδέν. Στη συνέχεια λύνοντας τη σχέση μπορούμε να βρούμε το μέγιστο ή το ελάχιστο της. Εάν υπάρχουν περιορισμοί, χρησιμοποιείται η μέθοδος των πολλαπλασιαστών Lagrange. Αυτές οι μέθοδοι μπορούν να εφαρμοστούν περισσότερο σε μικρά προβλήματα και σε απλές σχέσεις. Ωστόσο υπάρχει μια μεγάλη ποικιλία από τεχνικές που έχουν αναπτυχθεί κυρίως για την λύση μη γραμμικών προβλημάτων. Για παράδειγμα, τετραγωνικός προγραμματισμός (quadratic programming) είναι μια τεχνική για να λύνονται προβλήματα με γραμμικούς περιορισμούς αλλά με τετραγωνική αντικειμενική συνάρτηση.

2.1 Γενική διαδικασία βελτιστοποίησης

Για την βελτιστοποίηση γενικών προβλημάτων ο υπολογιστής χρησιμοποιεί ένα γενικό αλγόριθμο, που κάνει τα εξής βήματα:

1. **Ξεκίνα με ένα δοκιμαστικό σημείο και υπολόγισε το**.
2. **Διάλεξε κατεύθυνση βασιζόμενος στο σημείο που βρήκες**. Η κατεύθυνση που διαλέγεται εξαρτάται από το αν το πρόβλημα είναι μεγιστοποίησης ή ελαχιστοποίησης.
3. **Κάνε ένα βήμα συγκεκριμένου μεγέθους προς την κατεύθυνση που βρέθηκε στο προηγούμενο βήμα και βρες νέο δοκιμαστικό σημείο**. Το μέγεθος του βήματος ποικίλει κατά τη διάρκεια του ψαξίματος.
4. **Επανέλαβε τα βήματα 1 έως 3 αλλά**,

5. **Σταμάτα όταν υπολογίσεις ένα σημείο από το οποίο καμία διεύθυνση δεν υπάρχει η οποία να μπορεί να βρει βελτιωμένη λύση.** Αυτό σημαίνει ότι οποιαδήποτε διεύθυνση και να διαλέξουμε αυτή οδηγεί προς τα κάτω σε περίπτωση μεγιστοποίησης ή προς τα πάνω σε περίπτωση ελαχιστοποίησης.

Υπάρχουν πολλά προγράμματα γενικής βελτιστοποίησης διαθέσιμα. Ένα από αυτά είναι το Solver το οποίο μπορεί να λύσει και προβλήματα μη γραμμικού προγραμματισμού.

Βιβλιογραφία

1. Ζάχος Στ., "*Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα*", Εκδόσεις Ε.Μ.Π, 2004.
2. Μπακόπουλος Α., Χρυσοβέργης Ι., "*Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση*", Εκδόσεις ΣΥΜΕΩΝ.
3. Ξηρόκωστας Δ., "*Γραμμικός Προγραμματισμός*" Αθήνα, 1980
4. Παπαγεωργίου Γ., "*Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα, Γραμμικός Προγραμματισμός και Εφαρμογές*", Εκδόσεις Ε.Μ.Π, 2004.
5. C.P. Bonini, W.H. Hausman, H. Bierman., "*Quantitive Analysis for Management*" 9th edition, IRWIN.
6. Gass S.I, "*Γραμμικός Προγραμματισμός*" μετάφραση Κάκουλλος Θ., Αθήνα 1974.
7. Luenberger D., "*Introduction to Linear and Nonlinear Programming*", Addison Wesley, 1973