ΘΕΜΑ 1: **α)** Ορισμός Μεταβλητών

Έστω $x_i$ η εβδομάδα που εκκινεί το $i$ έργο, $i=1,\dots,5$ (Δηλαδή αν $x_3=2$ τότε έχουμε ότι το 3ο έργο (εταιρεία C) αρχίζει να εξυπηρετείται από την ΕΛΟ την 2η εβδομάδα και φυσικά αφού η διάρκειά του είναι 6 εβδομάδες θα ολοκληρωθεί την 7η εβδομ.)

Θεωρούμε ακόμα τις σταθερές $t_i$, $i=1,\dots,5$ που παριστάνουν τις εβδομάδες που απαιτούνται για την ολοκλήρωση του $i$ έργου, και τις σταθερές $c_i$, $i=1,\dots,5$ που δείχνουν τον αριθμό των υπαλλήλων που απαιτούνται για το $i$ έργο. Οι σταθερές $t_i, c_i$, $i=1,\dots,5$ δίδονται από την εκφώνηση π.χ. $c_5=3$, $t_5=2$.

Επιπλέον ορίζουμε τις δυαδικές (binary) μεταβλητές

$$Y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν το } i \text{ έργο εξυπηρετείται την } j \text{ εβδομάδα} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$i=1,\dots,5$, $j=1,\dots,8$.

Έστω ότι με $W_j$ παριστάνεται το πλήθος των εργαζομένων την $j$ εβδομάδα.

**β)** Μοντελοποίηση του προβλήματος

Αντικειμενική Συνάρτηση

$$\min W = \max_{1\le j\le 8} W_j$$

$$\text{όπου} \quad W_j = \sum_{i=1}^{5} Y_{ij} c_i \quad , j=1,\dots,8$$

$$\text{και} \quad Y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν } X_i \le j < X_i + t_i \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad , \begin{matrix} i=1,\dots,5 \\ j=1,\dots,8 \end{matrix}$$

**γ)** Περιορισμοί

$$1 \le X_i \le 8 - t_i + 1 \quad , i=1,\dots,5$$

Επεξήγηση: Το νωρίτερο που μπορεί να αρχίσει ένα έργο είναι την 1η εβδομάδα και το αργότερο εκείνη την εβδομάδα που θα του επιτρέπει να έχει ολοκληρωθεί την 8η εβδ.

ΘΕΜΑ Ε i) Αλγόριθμος Simplex (Γενικός)

1. Αν το πρόβλημά μας είναι "Ελαχιστοποίησε το m", τότε το μετατρέπουμε πολ/ντας με −1 την αντικειμενική συνάρτηση σε "Μεγιστοποίησε το −m".
2. Αν υπάρχει περιορισμός της μορφής
   (γραμμικό πολυώνυμο) $\geq a$
   τότε πολλαπλασιάζοντας με −1 τον μετατρέπουμε σε
   (γραμμικό πολυώνυμο) $\leq -a$
3. Αν δεν υπάρχει καμμία αρνητική τιμή στην τελευταία στήλη (εκτός από την τελευταία τιμή - που δεν ενοχλεί) τότε πηγαίνουμε στο βήμα 6.
4. Αν υπάρχει μια (τουλάχιστον) αρνητική τιμή στην τελευταία στήλη (εκτός απο την τελευταία τιμή), τότε την αλλάζουμε σε θετική κάνοντας οδήγηση ως ακολούθως:
   (α) Επιλέγουμε μια αρνητική τιμή στην ίδια γραμμή με τον αρνητικό αριθμό της τελευταίας στήλης. Αυτή η στήλη του αρνητικού αριθμού γίνεται η οδηγός στήλη.
   (β) Υπολογίζουμε όλους τους λόγους (ακόμα και αυτούς που αντιστοιχούν σε αρνητικές τιμές στην οδηγό στήλη. Η οδηγός γραμμή είναι εκείνη με τον μικρότερο θετικό λόγο.
   (γ) Εκτελούμε την οδήγηση γύρω απο τον οδηγό στοιχείο.
5. Πήγαινε στο βήμα 3
6. Τώρα το tableau Simplex είναι στην τυποποιημένη μορφή του. Εφαρμόζουμε τον έλεγχο βελτιστότητας (maximality test). Εάν η βασική εφικτή λύση είναι βέλτιστη (maximal) το πρόβλημα λύθηκε. Αλλιώς πηγαίνουμε στο βήμα 7.

7. Υπολογίζουμε ένα νέο tableau Simplex με την ακόλουθη διαδικασία:
(α) Επιλέγουμε την οδηγό στήλη ως εκείνη με την πιο αρνητική τιμή στην τελευταία γραμμή.
(β) Επιλέγουμε την οδηγό γραμμή ως εξής: Για κάθε γραμμή, πλήν της τελευταίας, με μια θετική τιμή στην οδηγό στήλη, υπολογίζουμε τον λόγο του αριθμού στην τελευταία στήλη προς τον αριθμό στην οδηγό στήλη. Η οδηγός γραμμή είναι εκείνη με τον μικρότερο μη αρνητικό λόγο.
(γ) Κάνουμε οδήγηση γύρω απο το οδηγό στοιχείο.

8. Επιστρέφουμε στο βήμα 6.

**ΘΕΜΑ 2 (ii)** $\min Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3$

υπο τους περιορισμούς:

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 \quad\quad\; &\le 40 \\
x_1 - x_2 + x_3 &= 30 \\
x_1 - 3x_2 - 2x_3 &\ge -50 \\
x_2 + x_3 &\ge 25 \\
x_1, x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

Για τη μεταβλητή $x_3$ δεν δίνεται περιορισμός μη αρνητικότητας άρα για το $x_3 \in \mathbb{R}$ θεωρούμε δύο νέες μεταβλητές

$$x_3 = x_3^+ - x_3^- \;,\quad x_3^+, x_3^- \ge 0$$

**Τυποποιημένη Μορφή**

$$\max(-z) = -x_1 - 2x_2 - 3x_3^+ + 3x_3^-$$

υπο:

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 \quad\quad\quad\quad\quad\quad + S_1 \quad\quad\quad &= 40 \\
x_1 - x_2 + x_3^+ - x_3^- \quad\quad\quad\quad\quad &= 30 \\
-x_1 + 3x_2 + 2x_3^+ - 2x_3^- \quad + S_2 \quad &= 50 \\
-x_2 - x_3^+ + x_3^- \quad\quad + S_3 &= -25 \\
x_1, x_2, x_3^+, x_3^- &\ge 0
\end{aligned}
$$

(iii) Σχηματίζουμε το αρχικό tableau της Simplex

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3^+$ | $x_3^-$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | Z | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 40 |
| 1 | −1 | 1 | −1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 30 |
| −1 | 3 | 2 | −2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 50 |
| 0 | −1 | −1 | +1 | 0 | 0 | 1 | 0 | −25 ← Αρνητικός |
| 1 | 2 | 3 | −3 | 0 | 0 | 0 | −1 | 0 |

↑ οδηγός στήλη (Δικής μου επιλογής λόγω του −1)

Δημιουργούμε τους λόγους $30/1 = 30$, $50/2 = 25$, $-25/-1 = 25$

Επιλέγουμε τον μικρότερο θετικό λόγο π.χ. θεωρούμε οδηγό στοιχείο το −1

Εκτελούμε τους μετασχηματισμούς

$$
\begin{aligned}
R_4' &\leftarrow -R_4 \\
R_2' &\leftarrow R_2 + R_4 \\
R_3' &\leftarrow R_3 + 2R_4 \\
R_5' &\leftarrow R_5 + 3R_4
\end{aligned}
$$

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3^+$ | $x_3^-$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $z$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 40 |
| 1 | -2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 5 |
| -1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | -1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 25 |
| 1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | -1 | -75 |

↑ Αποτυγχάνει το maximality test

Δημιουργούμε τους λόγους $40/2 = 20$, $25/1 = 25$

Επιλέγουμε για οδηγό στοιχείο το 2 της 2ης στήλης

Εκτελούμε τους μετασχηματισμούς:

$$R_1' \leftarrow \frac{1}{2} R_1$$
$$R_2' \leftarrow R_2 + R_1$$
$$R_3' \leftarrow -(R_3 - R_1')$$
$$R_4' \leftarrow R_4 - R_1'$$
$$R_5' \leftarrow R_5 + R_1'$$

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3^+$ | $x_3^-$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $z$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1/2 | 1 | 0 | 0 | 1/2 | 0 | 0 | 0 | 20 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 45 |
| +3/2 | 0 | 0 | 0 | +1/2 | -1 | -2 | 0 | 20 |
| -1/2 | 0 | 1 | -1 | -1/2 | 0 | -1 | 0 | 5 |
| 3/2 | 0 | 0 | 0 | 1/2 | 0 | 3 | -1 | -55 |

Πετυχαίνει το maximality test

Άρα $\max(-z) = -55$ οπότε $\min z = 55$

για $(x_1, x_2, x_3^+, x_3^-, s_1, s_2, s_3) = (0, 20, 5, 0, 0, 0, 0)$

Γενικά κάθε προσπάθεια μετά το 2ο tableau Simplex θα θεωρείται σωστή.

ΘΕΜΑ 3 Α)

1. Ετήσια ζήτηση σταθερή και εκ των προτέρων γνωστή. (Ρεαλιστική υπόθεση ειδικά άν λάβουμε υπ' όψιν μας ότι το αποτέλεσμα δεν είναι ιδιαίτερα ευαίσθητο ακόμα και σε σχετικά μεγάλες μεταβολές της ζήτησης).
2. Κόστη παραγγελίας και αποθήκευσης σταθερά και γνωστά.
(Ρεαλιστική υπόθεση, επηρεάζεται απο έκτακτα γεγονότα πχ. υπέρμετρη αύξηση του μεταφορικού κόστους λόγω της ανόδου της τιμής του πετρελαίου. Σε αυτή τη περίπτωση το κόστος παραγγελίας μπορεί να αλλάξει και μάλιστα αρκετές φορές μέσα στο ίδιο έτος και να καταστήσει την υπόθεση μη ρεαλιστική).
3. Ο χρόνος παράδοσης μιας παραγγελίας είναι γνωστός και σταθερός. (Μη ρεαλιστική υπόθεση που γίνεται τελείως απαράδεκτη υπόθεση για ορισμένες περιοχές του κόσμου πχ. εμπόλεμες ζώνες).
4. Το κόστος εξάντλησης του αποθέματος υποτίθεται ότι είναι κόστος ανα μονάδα προϊόντος. (Ρεαλιστική).
5. Η ζήτηση κατά τη διάρκεια του χρόνου αναμονής για την παράδοση μιας παραγγελίας δεν είναι σταθερός αλλά ακολουθεί κανονική κατανομή. (Αρκετά ρεαλιστική)
6. Το βέλτιστο σημείο παραγγελίας ειναι μεγαλύτερο απο τη μέση ζήτηση κατα τη διάρκεια του χρόνου αναμονής. (Απολύτως ρεαλιστική).

7) Το απόθεμα ασφαλείας R−$\bar{M}$ είναι θετικό. (Ρεαλιστική σύμφωνα και με την προηγούμενη).

8. Το απόθεμα ασφαλείας επιβαρύνεται με κόστος αποθήκευσης. (Απολύτως ρεαλιστική υπόθεση στην πλειονότητα των περιπτώσεων. Υπάρχουν και εξαιρέσεις π.χ. Οι Τράπεζες εκμεταλλεύονται τη νύχτα που δεν λειτουργούν τα χρηματικά τους αποθέματα τοκίζοντάς τα στην διατραπεζική αγορά με το λεγόμενο over-night επιτόκιο).

9. Το μέγεθος παραγγελίας Q είναι σταθερό. (Ρεαλιστική υπόθεση).

10. Δεν υπάρχουν εκπτώσεις ως προς το μέγεθος παραγγελίας. (Μη ρεαλιστική υπόθεση, δεν εφαρμόζεται σχεδόν καθόλου στο λιανεμπόριο).

11. Η παραγγελία παραδίδεται ολόκληρη. (Υπάρχουν πολλές περιπτώσεις σταδιακής παράδοσης πχ. Αεροπλάνα F16 στην ελληνική αεροπορία).

ΘΕΜΑ 3 Β) α) M/M/1

$\mu_A = 0.4$ ημερ. $\sigma_A = 0.4$ ημερ. $CV_A = 1$

$\mu_S = 0.25$ ημερ. $\sigma_S = 0.25$ ημερ. $CV_S = 1$

$$\rho = \frac{\mu_S}{\mu_A} = \frac{0.25\text{ ημ}}{0.40\text{ ημ}} = \frac{5}{8} = 0.625$$

Άρα το σύστημα δουλεύει στο 62.5% της ικανότητάς του.

$$WTM = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0.625}{1-0.625} = 1.667$$

(ii) $\mu_W = \mu_S \cdot WTM = 0.25 \cdot 1.667 \simeq 0.417$ ημερ.

(i) $\mu_L = \frac{\mu_W}{\mu_A} = \frac{0.42}{0.40} = 1.05$ πλοία

(iii) $\mu_W + \mu_S = 0.417 + 0.25 = 0.667$ ημερ.

β) M/G/1

$\mu_A = 0.4$ ημερ. $\sigma_A = 0.4$ ημερ. $CV_A = 1$

$\mu_S = 0.2$ ημερ. $\sigma_S = 0.1$ ημερ. $CV_S = \frac{0.1}{0.2} = 0.5$

$$\rho = \frac{\mu_S}{\mu_A} = \frac{0.2}{0.4} = 0.5$$

$$WTM = \frac{\rho}{1-\rho} \cdot \frac{1+CV_S^2}{2} = \frac{0.5}{1-0.5} \cdot \frac{1+0.5^2}{2} = 0.625$$

(i) $\mu_W = \mu_S \cdot WTM = 0.2 \cdot 0.625 = 0.125$ ημερ.

(ii) $\mu_W + \mu_S = 0.125 + 0.2 = 0.325$ ημερ.

(iii) $\mu_L = \frac{\mu_W}{\mu_A} = \frac{0.125\text{ ημ.}}{0.40\text{ ημ}} = 0.3125$ πλοία

(iv) $\Delta(\mu_W + \mu_S) = 0.667 - 0.325 = 0.342$ της ημέρας γλυτώνει κάθε ένα πλοίο, κατά την εξυπηρέτησή του συνολικά.

$$\frac{1}{\mu_A} = \frac{1}{0.4} = 2.5 \text{ πλοία την ημέρα φτάνουν}$$

$2.5$ πλοία/ημέρα $\times 0.342$ ημέρ/πλοίο $= 0.855$ ημέρας/ημέρα Χρόνος που εξοικονομείται κάθε ημέρα

$0.855$ ημ $\times 4000$€/ημέρα $= 3420$€/ημέρα εξοικονομούνται $< 5250$€

Άρα δεν συμφέρει η ενοικίαση.

ΘΕΜΑ 4: α) Ορισμός Μεταβλητών

$X_i$ := τα ρολά που θα κοπούν με τη μέθοδο $i$, $i=1,\dots,13$

β) Αντικειμενική Συνάρτηση

$$\min Z = x_1 + x_2 + \dots + x_{13}$$

γ) Περιορισμοί

$$2x_1 + x_3 + x_5 \geq 760$$
$$2x_2 + x_4 + 2x_6 + 2x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} \geq 520$$
$$x_3 + 3x_4 + 2x_6 + x_7 + 2x_8 + x_9 + 4x_{11} + x_{12} \geq 850$$
$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_5 + x_7 + x_8 + 3x_9 + 4x_{10} + x_{11} + 3x_{12} + 6x_{13} \geq 980$$

Παρατήρηση: Αφού τον μήνα Σεπτέμβριο 2008 η ALCOM επέλεξε να αγοράσει ρολά μήκους 1.5m η μέθοδος κοπής 6 που δίνει συνολικό πλάτος 1.6m δεν μπορεί να εφαρμοστεί.