ΘΕΜΑ 1 :

(i)

	κοτόπουλο	ρύζι	σπανάκι		
πρωτεΐνη (gr/δόση)	10	2	1	$\geq$	30
σίδηρο (mgr/δόση)	5	0	20	$\geq$	50
άμυλο (mgr/δόση)	0	10	0	$\geq$	40
λίπος (gr/δόση)	20	15	5		

Μεταβλητές

$x_1 :=$ # δόσεων κοτόπουλου / μενού
$x_2 :=$ # " ρυζιού / μενού
$x_3 :=$ # " σπανακιού / μενού

Αντικειμενική Συνάρτηση (ελαχιστοποίηση λίπους)

$$\min z = 20x_1 + 15x_2 + 5x_3$$

Περιορισμοί

Ελάχιστης απαιτούμενης ποσότητας
$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 30 \\ 5x_1 \qquad + 20x_3 \geq 50 \\ \qquad 10x_2 \qquad \geq 40 \end{cases}$$

Μη αρνητικότητας $\{ x_1, x_2, x_3 \geq 0$

(ii) Αλγόριθμος Simplex προβλημάτων που βρίσκονται στην τυποποιημένη μορφή τους.

Βήμα 1: Μορφοποιώ το πρόβλημα στη μορφή ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων εισάγοντας περιθώριες μεταβλητές στους περιορισμούς και εκφράζοντας την αντικειμενική συνάρτηση στην κανονική της μορφή.

Βήμα 2: Κατασκευάζω το αρχικό tableau Simplex

Βήμα 3: Εφαρμόζω το κριτήριο βελτιστότητας. Αν η βασική εφικτή λύση είναι βέλτιστη, το πρόβλημα λύθηκε. Αλλιώς προχωρώ στο βήμα 4.

Βήμα 4: Υπολογίζω το νέο tableau Simplex, ως ακολούθως:

(a) Επιλέγω την οδηγό στήλη
(b) Επιλέγω την οδηγό γραμμή
(c) Κάνω οδήγηση με βάση το οδηγό στοιχείο.

Βήμα 5: Επιστρέφω στο βήμα 3.

(iii) $\max\ -z = -20x_1 - 15x_2 - 5x_3$

$$
\begin{aligned}
-10x_1 - 2x_2 - x_3 &\le -30\\
-5x_1 \qquad\quad - 20x_3 &\le -50\\
-10x_2 \qquad\quad &\le -40\\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
20x_1 + 15x_2 + 5x_3 - z &= 0\\
-10x_1 - 2x_2 - x_3 + s_1 \qquad\qquad &= -30\\
-5x_1 \qquad - 20x_3 \qquad + s_2 \qquad &= -50\\
-10x_2 \qquad\qquad\qquad + s_3 &= -40\\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 & m & \\
\end{array}\\
\left[\begin{array}{ccccccc|c}
-10 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -30\\
-5 & 0 & -20 & 0 & 1 & 0 & 0 & -50\\
0 & -10 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -40\\
\hline
20 & 15 & 5 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
$$

Η τελευταία στήλη έχει αρνητικούς όρους. Θεωρούμε τον -50. Θεωρούμε τον -5 στην γραμμή του -50 στην 1η στήλη. Υπολογίζουμε τους λόγους

$-30/_{-10} = 3$ (μικρότερος θετικός)

$-50/_{-5} = 10$

$$
\left[\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 0.2 & 0.1 & -0.1 & 0 & 0 & 0 & 3\\
0 & 1 & -19.5 & -0.5 & 1 & 0 & 0 & -35\\
0 & -10 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -40\\
\hline
0 & 11 & 3 & 2 & 0 & 0 & -1 & -60
\end{array}\right]
$$

Επιλέγουμε το −40 και στη συνέχεια το −10 της γραμμής του. Οι λόγοι είναι

$3/0.2 = 15$

$-35/1 = -35$

$-40/-10 = 4$ (μικρότερος θετικός)

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0.1 & -0.1 & 0 & +0.02 & 0 & 2.2 \\ 0 & 0 & -19.5 & -0.5 & 1 & -0.1 & 0 & -39 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0.1 & 0 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & +1.1 & -1 & -104 \end{array}\right]$$

Επιλέγουμε το −39 και το −0.5. Οι λόγοι είναι

$2.2/-0.1 = -22$

$-39/-0.5 = 78$ (μικρότερος θετικός)

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 & -0.2 & +0.04 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 39 & 1 & -2 & 0.2 & 0 & 78 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0.1 & 0 & 4 \\ \hline 0 & 0 & -75 & 0 & -2 & +0.7 & -1 & -260 \end{array}\right]$$

Το πρόβλημα έχει αναχθεί στην τυποποιημένη μορφή του.

ΘΕΜΑ 2:

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Ελαχιστοποίησε } c = RX \\ \text{υπό τους περιορισμούς } \quad AX \geq C' \end{array} \right.$$

$$R = \begin{bmatrix} 8 & 16 & 14 & 7 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C' = \begin{bmatrix} 50 \\ 120 \\ 70 \\ 100 \end{bmatrix}$$

Προκειμένου να βρούμε το Δυϊκό Πρόβλημα υπολογίζουμε τους ανάστροφους των πινάκων

$$R' = \begin{bmatrix} 8 \\ 16 \\ 14 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} u \\ v \\ r \\ t \end{bmatrix}, \quad A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C' = \begin{bmatrix} 50 & 120 & 70 & 100 \end{bmatrix}$$

Το Δυϊκό πρόβλημα είναι

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Μεγιστοποίησε } \quad c = C'U \\ \text{υπό τους περιορισμούς } \quad A'U \geq R' \end{array} \right.$$

$$\max \ c = 50u + 120v + 70r + 100t$$

υπό τους περιορισμούς

$$\begin{array}{lllll} u & & +r & & \geq 8 \\ u & & & +t & \geq 16 \\ & v & +r & & \geq 14 \\ & v & & +t & \geq 7 \end{array}$$

Προετοιμασία Δυϊκού προβλήματος για την επίλυσή του με τη μέθοδο Simplex

$$\begin{array}{lllllllll} -50u & -120v & -70r & -100t & & & & & +c = 0 \\ u & & +r & & +s_1 & & & & = 8 \\ u & & & +t & & +s_2 & & & = 16 \\ & v & +r & & & & +s_3 & & = 14 \\ & v & & +t & & & & +s_4 & = 7 \end{array}$$

Αρχικό tableau Simplex:

$$
\begin{array}{ccccccccc|c}
u & v & r & t & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & c & \\
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{ccccccccc|c}
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 16 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 14 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 7 \\
\hline
-50 & -120 & -70 & -100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right]
$$

Η περισσότερο αρνητική τιμή στην τελευταία γραμμή είναι το -120.

Υπολογίζουμε τους λόγους.

$14/1 = 14$

$7/1 = 7$ (μικρότερη θετική)

Οδηγός στοιχείο είναι το 1 στη θέση (4,2).

Μετα την οδήγηση το tableau γίνεται

$$
\left[\begin{array}{ccccccccc|c}
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 16 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 7 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 7 \\
\hline
-50 & 0 & -70 & 20 & 0 & 0 & 0 & 120 & 1 & 840
\end{array}\right]
$$

Η πλέον αρνητική τιμή της τελευταίας γραμμής είναι το -70. Οι λόγοι είναι:

$8/1 = 8$

$7/1 = 7$ (μικρότερη θετική)

Οδηγός το 1 στη θέση (3,3)

Το νεο tableau simplex είναι:

$$\left[\begin{array}{ccccccccc|c}
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 16 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 7 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 7 \\
\hline
-50 & 0 & 0 & -50 & 0 & 0 & 70 & 50 & 1 & 1330
\end{array}\right]$$

Υπάρχουν δύο εξίσου μεγάλες αρνητικές τιμές.
Επιλέγουμε τυχαία το -50 στην 1η στήλη.

$16/1 = 16$

$1/1 = 1$ (μικρότερη θετική)

Οδηγός το 1 στη θέση $(1,1)$.

$$\left[\begin{array}{ccccccccc|c}
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 15 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 7 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 7 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 50 & 0 & 20 & 100 & 1 & 1380
\end{array}\right]$$

Ικανοποιείται το κριτήριο βελτιστότητας

Η λύση είναι $C = 1380$. Άρα το ελάχιστο κόστος στο αρχικό πρόβλημα είναι 1380.
Οι τιμές των μεταβλητών του αρχικού προβλήματος είναι οι τιμές των χαλαρών μεταβλητών στην τελευταία γραμμή του πίνακα simplex.
Δηλαδή $(x, y, z, w) = (50, 0, 20, 100)$.

ΘΕΜΑ 3 : Α) ΘΕΩΡΙΑ

Β) $D = 100 \cdot 360 = 36000$ $\quad k_u = 3€$

$K = 100$

$K_c = 0.02 €/\text{ημ} \cdot 360\ \text{ημ} = 7.2\ €/\text{έτος}$

(i) $EOQ = Q = \sqrt{\frac{2KD}{K_c}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 100 \cdot 100 \cdot \cancel{360}}{0.02 \cdot \cancel{360}}} = 1000$ μοναδ.

(ii) $F(R) = 1 - \frac{K_c\ Q}{K_u\ D} = 1 - \frac{0.02 \cdot 360 \cdot 1000}{3 \cdot 100 \cdot 360} = 1 - 0.067$

$= 0.933$

Απο πίνακα κανονικής κατανομής

$Z = 1.5$

$\bar{M} = 100\ \text{μον.}/\text{ημ} \cdot 16\ \text{ημ} = 1600$ μον.

$\sigma_{\bar{M}} = \sqrt{L} \cdot \sigma = \sqrt{16} \cdot 10\ \text{μον}/\text{ημ.} = 40$ μον.

$R = \bar{M} + Z\sigma_{\bar{M}} = 1600 + 1.5 \cdot 40 = 1660$ μον.

(iii) $TC = \left[K + k_u \sigma_{\bar{M}} N(z)\right] \frac{D}{Q} + \left[\frac{Q}{2} + (R - \bar{M})\right] K_c$

$= \left(100 + 3 \cdot 40 \cdot 0.02931\right) \frac{100 \cdot 360}{1000} + \left(\frac{1000}{2} + (1660 - 1000)\right) 7.2$

$= 3726.6 + 4032$

$= 7758.6$

Θέμα 4:

Έχουμε δύο ανεξάρτητα υποσυστήματα M/M/1. Με στοιχειώδη μονάδα μέτρησης του χρόνου την ώρα, ο μέσος ρυθμός άφιξης της Poisson διαδικασίας εισόδου είναι $\lambda = 20$ εντολές την ώρα για κάθε υποσύστημα χωριστά. $\mu_A = \sigma_A = 3$ λεπτά και $CV_A = \frac{\sigma_A}{\mu_A} = 1$.
Κάθε υποσύστημα απόκρισης χρειάζεται κατά μέσο όρο 2.5 λεπτά ανά κλήση, οπότε ο μέσος ρυθμός εξυπηρέτησης είναι $\mu = 24$ κλήσεις την ώρα.
Έχουμε λοιπόν $\mu_S = \sigma_S = 2.5$ λεπτά. Επειδή για κάθε ξεχωριστό υποσύστημα M/M/1 ισχύει $\mu_S < \mu_A$, καθένα από αυτά συγκλίνει σε κατάσταση ισορροπίας και μπορούμε να κάνουμε τους υπολογισμούς σύμφωνα με τους τύπους του μοντέλου M/M/1.

Συντελεστής επιβάρυνσης του κάθε υποσυστήματος:

$$\rho = \frac{\mu_S}{\mu_A} = \frac{2.5}{3} = 0.833 = 83.3\%$$

Πολλαπλασιαστής χρόνου αναμονής:

$$WTM = \frac{\rho}{1-\rho}\left(\frac{CV_A^2 + CV_S^2}{2}\right)$$

$$= \frac{\rho}{1-\rho}\,\frac{1+1}{2} = \frac{\rho}{1-\rho}$$

$$= \frac{0.833}{1-0.833} = 5$$

Θ4 | A | $\mu_W = \mu_S \cdot WTM = 2.5 \cdot 5 = 12.5$ λεπτά μέσος χρόνος αναμονής μιας κλήσης

$\mu_L = \dfrac{\mu_W}{\mu_A} = \dfrac{12.5}{3} = 4.1667$ κλήσεις είναι το μέσο μήκος της καθεμιάς ουράς

B | ο Συνολικός αριθμός κλήσεων στο σύστημα είναι κατα μέσο όρο όσες κλίσεις βρίσκονται κατά μεσο όρο στην αναμονή και όσες κλήσεις βρίσκονται κατά μέσο όρο υπο εξυπηρέτηση. Άρα

4.1667 κλ. $+ 0.8333 = 5$ κλήσεις

με κόστος $5 \times 0.5 = 2.5$ € ανα ώρα

Το κόστος του ενός εξυπηρετητή (αυτόματου μηχανήματος) είναι

3 €/ώρα $\times$ 1 εξυπηρετητής $= 3$ € ανα ώρα

και επομένως το συνολικό κόστος είναι

$TC = 2$ εξυπηρετητές $\times \left(2.5 \text{ €/ώρα} + 3 \text{ €/ώρα} \right)$

$= 11$ €/ώρα και για τους δύο.