I

ΣΕΜΦΕ - ΕΜΠ
ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗΝ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ
ΕΞΑΜΗΝΟ 7º
ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ 2008-09
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1. 1. ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΠΓΠ

1. $$z = \max f(x) = c^T x \quad , \quad c \in M_{r\times1}, \; x \in M_{r\times 1}$$
$$Ax \begin{Bmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{Bmatrix} b \quad , \quad A \in M_{m\times r}, \; b \in M_{m\times 1}$$
$$x \geq 0 \quad , \quad 0 \in M_{r\times 1}$$

2. ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΠΓΠ
$$z = \max f(x) = c^T x \quad , \quad c \in M_{r\times 1}, \; x \in M_{r\times 1}$$
$$Ax = b \quad , \quad A \in M_{m\times r}, \; b \in M_{m\times 1}$$
$$x \geq 0 \quad , \quad 0 \in M_{r\times 1}$$

3. Περιθώριες Μεταβλητές είναι οι νέες μη αρνητικές μεταβλητές που εισάγονται σε όσους περιορισμούς εκφράζονται με ανισώσεις προκειμένου να μετατραπούν αυτοί σε περιορισμούς που εκφράζονται με εξισώσεις. Υπάρχουν 2 είδη περιθώριων μεταβλητών οι χαλαρές και οι πλεονασματικές.

Χαλαρή Μεταβλητή:

Σε κάθε περιορισμό της μορφής $\sum_{j=1}^{r} a_{kj} x_j \leq b_k$

θεωρούμε μια νέα μεταβλητή $x_{r+k} \geq 0$, όπου $x_{r+k} = b_k - \sum_{j=1}^{r} a_{kj} x_j$ και η οποία προστίθεται στο πρώτο μέλος της ανισότητας ώστε να έχουμε την ισότητα $\sum_{j=1}^{r} a_{kj} x_j + x_{r+k} = b_k$

Η x_{r+k} ονομάζεται χαλαρή μεταβλητή.

Πλεονασματική Μεταβλητή:
Σε κάθε περιορισμό της μορφής $\sum_{j=1}^{r} a_{kj} x_j \geq b_k$

θεωρούμε μια νέα μεταβλητή $x_{r+k} \geq 0$, όπου

$x_{r+k} = \sum_{j=1}^{r} a_{kj} x_j - b_k$ και η οποία αφαιρείται

από το πρώτο μέλος της ανισότητας ώστε να έχουμε την ισότητα $\sum_{j=1}^{r} a_{kj} x_j - x_{r+k} = b_k$.

Η x_{r+k} ονομάζεται πλεονασματική μεταβλητή.

4. Βασική Λύση ενός ΠΓΠ είναι μια λύση που προκύπτει αν θέσουμε r-m μεταβλητές ίσες με το μηδέν και λύσουμε ως προς τις υπόλοιπες m μεταβλητές, υπό την προϋπόθεση ότι το γραμμικό σύστημα που προκύπτει να περιλαμβάνει m γραμμικά ανεξάρτητες στήλες του πίνακα A (δηλαδή ο A να περιέχει ένα υποπίνακα διάστασης mxm με ορίζουσα διάφορη του μηδενός).

5. Βασική εφικτή λύση είναι μια βασική λύση όπου όλες οι βασικές μεταβλητές είναι μη αρνητικές.

6. Μη εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση είναι μια βασική εφικτή λύση με m ακριβώς θετικά x_i.

7. Το U είναι κλειστό και φραγμένο άρα συμπαγές. Η f λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της σε κάποιο σημείο $\bar{x} \in U$.
Αν το $\bar{x}$ είναι ακραίο σημείο, το θεώρημα έχει αποδειχθεί.
Ας υποθέσουμε ότι το $\bar{x}$ δεν είναι ακραίο σημείο, τότε μπορούμε να εκφράσουμε το $\bar{x}$ σαν κυρτό συνδυασμό ακραίων σημείων του U.
Δηλαδή αν x_j είναι ακραία σημεία του U

τότε $\bar{x} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j$, με $\lambda_j \geq 0$ και $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$

Έστω $f(x_p) = \max_j f(x_j)$

τότε
$$f(\bar{x}) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n f(x_n)$$
$$f(\bar{x}) \leq \lambda_1 f(x_p) + \lambda_2 f(x_p) + \dots + \lambda_n f(x_p)$$
$$f(\bar{x}) \leq f(x_p)$$

και επειδή $f(\bar{x}) \geq f(x), \forall x \in U$ πρέπει

$f(\bar{x}) = f(x_p)$, Δηλαδή υπάρχει ακραίο σημείο

x_p στο οποίο η αντικειμενική συνάρτηση λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της.

ΘΕΜΑ 2 : 1) Η μαθηματική μοντελοποίηση είναι:
Έστω A, B, C, D οι μονάδες που παράγονται από κάθε προϊόν. Τότε έχουμε:

Maximize $P = 40A + 24B + 36C + 23D$

υπό τους περιορισμούς

(Δυναμικότητα φρεζαρίσματος)	$2A + 1B + 2.5C + 5D \leq 1200$
(Δυναμικότητα συναρμολόγησης)	$1A + 3B + 2.5C \leq 1600$
(Περιορισμός πρώτων υλών)	$10A + 5B + 2C + 12D \leq 10000$
(Ζήτηση για το A)	$A \leq 200$
(Ζήτηση για το Γ)	$C \leq 160$
(Απαίτηση για το Δ)	$D \geq 100$
(Περιορισμοί μη αρνητικότητας)	$A, B, C, D \geq 0$

2) • Σύμφωνα με τις αναφορές που δόθηκαν η λύση είναι:

100 μονάδες του προϊόντος A
500 " " " B
καμμία μονάδα " " Γ και
100 μονάδες " " Δ

που αποφέρουν ένα συνολικό κέρδος 18300€.

• Σημειώνουμε ότι υπάρχει ένα περιθώριο 5300€ αχρησιμοποίητο κεφάλαιο για την αγορά πρώτων υλών.

• Επίσης η ζήτηση για το προϊόν A έμεινε κατά 100 μονάδες ακάλυπτη, ενώ για το προϊόν Γ 160 μονάδες ακάλυπτη.

3) Κοιτάζοντας στις σκιώδεις τιμές την αναφορά Ευαισθησίας οι τιμές είναι 19.2€ για μια επιπλέον ώρα στην δυναμικότητα φρεζαρίσματος, 1.6€ για μια επιπλέον ώρα στη δυναμικότητα

συναρμολόγησης. Επειδή δεν χρησιμοποιήθηκε όλο το κεφάλαιο για την αγορά πρώτων υλών η σκιώδης τιμή του είναι μηδέν.

4) Κανένας από τους αντίστοιχους περιορισμούς δεν είναι ενεργός (δηλαδή δεν ικανοποιήθηκε όλη η ζήτηση) και οι σκιώδεις τιμές είναι μηδέν. Οπότε η εταιρεία δεν πρέπει να διαθέσει καθόλου χρήματα σε διαφημιστική δαπάνη για να αυξήσει τη ζήτηση.

5) Αυτός ο περιορισμός είναι ενεργός με σκιώδη τιμή -73 €. Μια μεταβολή του μεγέθους παραγγελίας κατά 30% θα είχε σαν αποτέλεσμα την αύξηση κατά 30 μονάδες του προϊόντος Δ. Αυτή η αύξηση βρίσκεται μεταξύ του επιτρεπόμενου ορίου αύξησης που φαίνεται στην αναφορά ευαισθησίας και είναι 33.3 μονάδες. Έτσι μια αύξηση στην απαιτούμενη ποσότητα κατά 30% θα προκαλούσε μια <u>μείωση</u> του κέρδους κατά $30 \times 73 = 2190$€

6) Παρατηρούμε στο πάνω μέρος της αναφοράς ευαισθησίας για το προϊόν Γ, ότι το κέρδος του που είναι 36€ έχει επιτρεπόμενη αύξηση 16€, χωρίς να μεταβληθεί η λύση. Επομένως μια μεταβολή στο κέρδος από 36€ σε 46€ δηλαδή κατά 10€ δεν θα αλλάξει τη λύση (δηλαδή την απόφαση για την παραγωγή). Και επειδή σύμφωνα με

την ισχύουσα λύση, παράγονται 0 μονάδες προϊόντος Γ, το συνολικό κέρδος επίσης δεν θα μεταβληθεί.

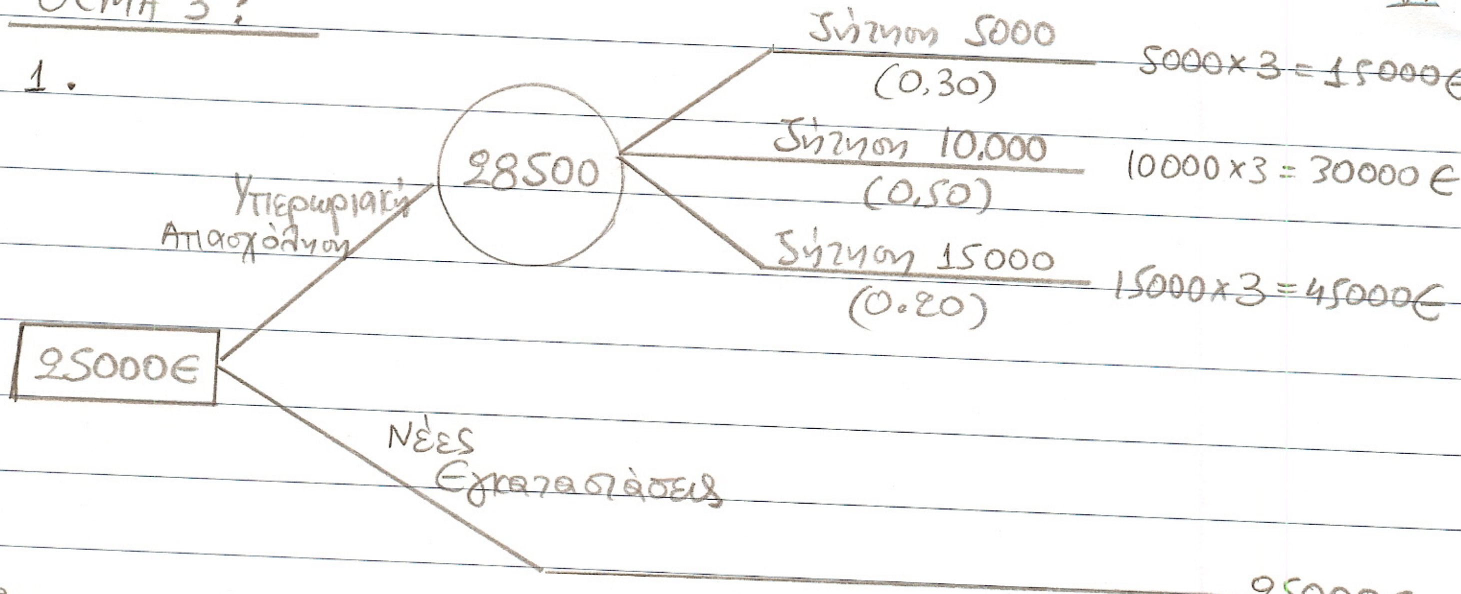
7) Το κόστος ευκαιρίας για κάθε μονάδα του νέου προϊόντος Ε μπορεί να υπολογισθεί ως εξής:

	Ποσότητα	Κόστος Ευκαιρίας	Σύνολο
Φρεζάρισμα	2	19.2	38.4
Συναρμολόγηση	5	1.6	8.0
Πρώτες Ύλες	20	0	0
Σύνολο			46.4

Επειδή το κέρδος ανά μονάδα προϊόντος Ε είναι 50€ μεγαλύτερο από το κόστος ευκαιρίας που είναι 46.4€, τουλάχιστον μερικές μονάδες αυτού του νέου προϊόντος Ε πρέπει να παραχθούν. Το πρόβλημα πρέπει επομένως να μορφοποιηθεί εκ νέου και να λυθεί πάλι, συμπεριλαμβάνοντας το προϊόν Ε για να υπολογισθεί ο ακριβής αριθμός μονάδων του Ε που θα παραχθεί.

ΘΕΜΑ 3:   IV.

1.



2.

Συνολική Ζήτηση	Πιθανότητα Ζήτησης	ΥΠΕΡΩΡΙΕΣ Υπο Συνθήκη κόστος (CV)	ΥΠΕΡΩΡΙΕΣ Σταθμισμένο Κόστος	ΕΝΟΙΚΙΑΣΗ Υπο Συνθήκη Κόστος (CV)	ΕΝΟΙΚΙΑΣΗ Σταθμισμένο Κόστος
5000	0.30	15000*€	4500€	25000€	7500€
10 000	0.50	30000	15000	25000*	12500
15 000	0.20	45 000	9000	25000*	5000
EMV			28500		$\underbrace{25000}_{\text{βέλτιστο κόστος}}$

Άρα χωρίς να έχω πληροφόρηση από την έρευνα η βέλτιστη ενέργεια είναι να νοικιάσει τις επιπλέον εγκαταστάσεις και να έχει αναμενόμενο κόστος 25000€ (βέλτιστο κόστος χωρίς πληροφόρηση).
Αν όμως έχουμε πληροφόρηση για τη ζήτηση τότε:

Γεγονός (Ζήτηση)	Πιθανότητα	Κόστος Βέλτιστης Ενέργειας	Σταθμισμένο κόστος Βέλτιστης Ενέργειας
5000	0.30	15000*€	4500€
10000	0.50	25000*	12500
15000	0.20	25000*	5000
EMV (PI)			22000€

Άρα αν η εταιρεία παραγγείλει την έρευνα και αποκτήσει την απόλυτη πληροφορία για την επιπρόσθετη ζήτηση τότε θα κατεβάσει το κόστος της σε 22000€ από 25000€ που ήταν το κόστος της βέλτιστης ενέργειας χωρίς πληροφόρηση. Επειδή έτσι πετυχαίνει εξοικονόμηση 3000€, θα την συμβουλεύαμε να παραγγείλει την έρευνα που κοστίζει μόνο 1000€ και έτσι να έχει ένα όφελος 2000€.

3)

		ΥΠΕΡΩΡΙΕΣ		ΕΝΟΙΚΙΑΣΗ	
Γεγονός Ζήτηση	Πιθανότητα Ζήτησης	Υπο συνθήκη κόστος ευκαιρίας	Σταθμισμένο κόστος ευκαιρίας	Υπο Συνθ. Κοστος Ευκ.	Σταθμισμένο Κόστος Ευκ.
5000	0.30	0 €	0 €	10000€	3000€
10000	0.50	5000	2500	0	0
15000	0.20	20000	4000	0	0
EOL			6500 €		3000 €

Η βέλτιστη απόφαση του 1ου Ερωτήματος ήταν η Ενοικίαση και το αναμενόμενο κόστος ευκαιρίας 3000 €

ΘΕΜΑ 4:

$$\max z = 6x + 5y$$
$$8x + 11y \le 28$$
$$4x + 3y \le 8$$
$$x, y \ge 0$$

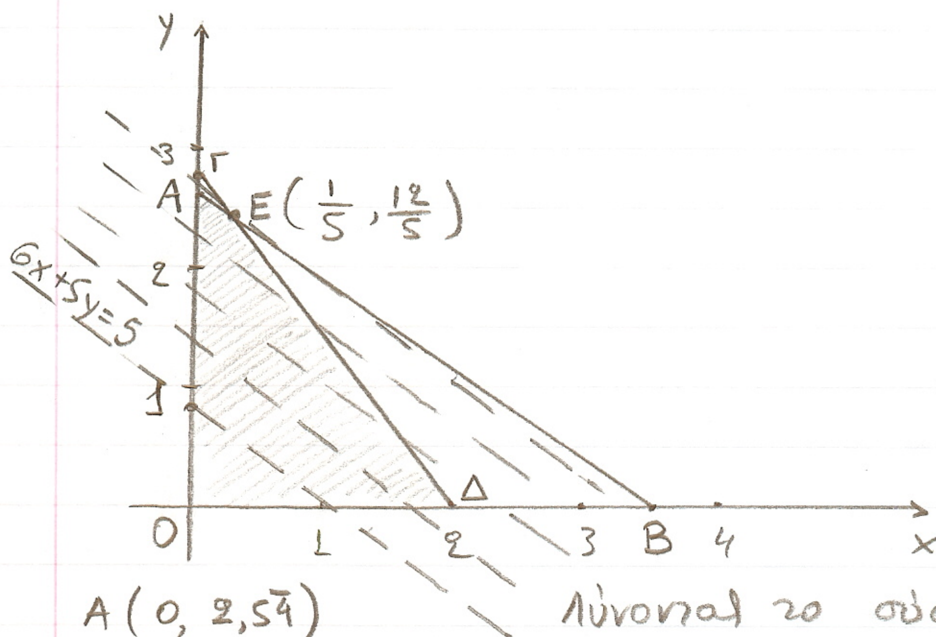
i) Γραφική Μέθοδος

$8x + 11y = 28$

x	0	$\frac{28}{8} = 3.5$
y	$\frac{28}{11} = 2.5\overline{4}$	0

$4x + 3y = 8$

x	0	2
y	$\frac{8}{3} = 2,\overline{6}$	0



$A(0,\ 2,5\overline{4})$

$B(3.5,\ 0)$

$\Gamma(0,\ 2,\overline{6})$

$\Delta(2,\ 0)$

Λύνουμε το σύστημα

$$\left.\begin{aligned} 8x + 11y &= 28 \\ 4x + 3y &= 8 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (x, y) = \left(\frac{1}{5}, \frac{12}{5}\right)$$

Βρίσκουμε το σημείο $E(0{,}5,\ 2.4)$

Η εφικτή περιοχή είναι η ΟΑΕΔ

$$Z(O) = Z(0,0) = 6\cdot 0 + 5 \cdot 0 = 0$$
$$Z(A) = Z\left(0, \frac{28}{11}\right) = 6\cdot 0 + 5\cdot\frac{28}{11} = 12.\overline{72}$$
$$Z(E) = Z\left(\frac{1}{5}, \frac{12}{5}\right) = 6\cdot\frac{1}{5} + 5\cdot\frac{12}{5} = 13.2$$
$$Z(\Delta) = Z(2, 0) = 6\cdot 2 + 5\cdot 0 = 12$$

Άρα $\max Z = Z(E) = Z\left(\frac{1}{5}, \frac{12}{5}\right) = \underline{13.2}$

ii) Μέθοδος Simplex

X

Κανονική Μορφή

$$Z - 6x - 5y = 0$$
$$8x + 11y + S_1 = 28$$
$$4x + 3y + S_2 = 8$$
$$x, y, S_1, S_2 \geq 0$$

Αρχικό Tableau Simplex

Βάση	Συντελεστές Βασικών Μετ. στην Αντικειμ.	6	5	0	0	Σταθεροί Όροι	Λόγοι
		x	y	S_1	S_2		
S_1	0	8	11	1	0	28	$\frac{28}{8} = 3.5$
S_2	0	4	3	0	1	8	$\frac{8}{4} = 2$
	Z	-6	-5	0	0	0	

οδηγό στοιχείο

πλέον αρνητική τιμή (οδηγός στήλη)

Μικρότερος θετικός λόγος

Εισέρχεται στη βάση η μεταβλητή x και εξέρχεται η μεταβλητή S_2.

		6	5	0	0		
B	C_B	x	y	S_1	S_2	b	Λόγοι
S_1	0	0	5	1	-2	12	$\frac{12}{5} = 2.4$
x	6	1	3/4	0	1/4	2	$\frac{2}{3/4} = 2.\bar{6}$
	Z	0	-1/2	0	3/2	12	

Εισέρχεται στη βάση η μεταβλητή y και εξέρχεται η μεταβλητή S_2.

		6	5	0	0		
B	C_B	x	y	S_1	S_2	b	
y	5	0	1	1/5	-2/5	12/5	
x	6	1	0	-3/20	11/20	1/5	
	Z	0	0	1/10	13/10	66/5=13.2	

Η βέλτιστη λύση είναι $(x,y)=(\frac{1}{5},\frac{12}{5})$ που αποδίδει τιμή $66/5 = 13.2$ στην αντικειμενική συνάρτηση.

iii) Δυϊκό Πρόβλημα.

<u>ΠΡΩΤΕΥΟΝ</u>

maximize $z = c \cdot X$ $\qquad c=\begin{bmatrix}6 & 5\end{bmatrix}$ $\quad X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$

υπό τους περιορισμούς

$$AX \leq b \qquad A=\begin{bmatrix}8 & 11\\ 4 & 3\end{bmatrix}, \quad b=\begin{bmatrix}28\\ 8\end{bmatrix}$$

$$X \geq 0$$

<u>ΔΕΥΤΕΡΕΥΟΝ</u>

minimize $z = b'U \Rightarrow \min z = \begin{bmatrix}28 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \min z = 28u + 8v$$

υπο τους περιορισμούς

$$A'U \geq c' \Rightarrow \begin{bmatrix}8 & 4\\ 11 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix}6\\ 5\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8u+4v \geq 6 \\ 11u+3v \geq 5 \end{cases}$$

$$U \geq 0 \Rightarrow u, v \geq 0$$

Αρα το Δυϊκό πρόβλημα του αρχικού είναι το:

$$\begin{aligned} \min \quad & 28u + 8v \\ \text{υπο} \quad & 8u + 4v \geq 6 \\ & 11u + 3v \geq 5 \\ & u, v \geq 0 \end{aligned}$$