ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗΝ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ
ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

Έβδομο Εξάμηνο

Διδάσκων: Ι. Κολέτσος **Κανονική Εξέταση 2007**

<u>ΘΕΜΑ 1</u>

Διαιτολόγος προετοιμάζει ένα μενού από κοτόπουλο, ρύζι και σπανάκι έτσι ώστε κάθε γεύμα να περιέχει τουλάχιστον 30 γραμμάρια πρωτεΐνη, 50 μιλιγκράμ σίδηρο και 40 μιλιγκράμ άμυλο. Κάθε δόση κοτόπουλο περιέχει 1 γραμμάριο πρωτεΐνη, 1 μιλιγκράμ σίδηρο και 20 γραμμάρια λίπους. Κάθε δόση ρύζι περιέχει 2 γραμμάρια πρωτεΐνη, 1 μιλιγκράμ άμυλο και 35 γραμμάρια λίπους. Κάθε δόση σπανάκι περιέχει 2 γραμμάρια πρωτεΐνη, 1 μιλιγκράμ άμυλο και 65 γραμμάρια λίπους. Πόσες δόσεις κοτόπουλο, ρύζι και σπανάκι πρέπει να περιέχει το μενού ώστε να ελαχιστοποιηθεί η ποσότητα λίπους.

i. Να γίνει η μαθηματική μορφοποίηση του προβλήματος και να περιγραφούν λεκτικά η αντικειμενική συνάρτηση και οι περιορισμοί.
ii. Να περιγραφεί ο αλγόριθμος της μεθόδου Simplex για την επίλυση προβλημάτων που δεν βρίσκονται στη τυποποιημένη μορφή τους.
iii. Να λυθεί με τη μέθοδο Simplex το παραπάνω πρόβλημα.

<u>ΛΥΣΗ</u>

i)

	Κοτόπουλο	Ρύζι	Σπανάκι	
Πρωτεΐνη(gr/δόση)	1	2	2	≥ 30
Σίδηρο(mgr/δόση)	1	0	0	≥ 50
Άμυλο (mgr/δόση)	0	1	1	≥ 40
Λίπος (gr/δόση)	20	35	65	

ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

X_1 := # δόσεων κοτόπουλου / μενού

X_2 := # δόσεων ρυζιού / μενού

X_3 := # δόσεων σπανακιού / μενού

ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

min z $= 20x_1 + 35x_2 + 65x_3$ (ελαχιστοποίηση λίπους)

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ

Ελάχιστης απαιτούμενης ποσότητας $\left\{\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 30 \\ x_1 \qquad\qquad\quad \geq 50 \\ \qquad x_2 + \ x_3 \geq 40 \end{array}\right\}$

Μη αρνητικότητας $\{x_1, x_2, x_3 \geq 0\}$

ii) Αλγόριθμος simplex προβλημάτων που **δεν** βρίσκονται στην τυποποιημένη μορφή τους.

Βήμα 1: Αν το πρόβλημα είναι να ελαχιστοποιηθεί το m, τότε μεγιστοποιούμε το –m

Βήμα 2: Αν υπάρχει περιορισμός της μορφής (γραμμικό πολυώνυμο) $\geq \alpha$ τότε πολλαπλασιάζοντας την ανισότητα με –1 το φέρνουμε στη μορφή

(γραμμικό πολυώνυμο) $\leq -\alpha$

Βήμα 3: Σχηματίζουμε τον αρχικό πίνακα simplex

Βήμα 4: Αν δεν εμφανίζεται αρνητικός αριθμός στην τελευταία στήλη (εκτός της τελευταίας γραμμής) τότε πήγαινε στο βήμα 7.

Βήμα 5: Αν ένας αρνητικός αριθμός εμφανίζεται στην τελευταία στήλη (εκτός της τελευταίας γραμμής) τον μετατρέπουμε σε θετικό αριθμό κάνοντας οδήγηση ως εξής:

i) Επιλέγουμε μια αρνητική τιμή στην ίδια γραμμή που βρίσκεται ο αρνητικός αριθμός της τελευταίας στήλης. Η στήλη της τιμής αυτής θεωρείται η οδηγός στήλη.

ii) Υπολογίζουμε όλους τους λόγους, συμπεριλαμβανομένων αυτών που αντιστοιχούν σε αρνητικές τιμές της οδηγού στήλης. Η οδηγός γραμμή είναι εκείνη με τον ελάχιστο θετικό λόγο.

iii) Εκτελούμε την οδήγηση περί το οδηγό στοιχείο

Βήμα 6: Επιστρέφουμε στο βήμα 3

Βήμα 7: Τώρα ο πίνακας βρίσκεται στην τυποποιημένη μορφή του. Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο simplex για προβλήματα σε τυποποιημένη μορφή.

iii) max $-Z = -20x_1 - 35x_2 - 65x_3$

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - 2x_3 \leq -30 \\ -x_1 \qquad\qquad\quad \leq -50 \\ \quad - x_2 - x_3 \leq -40 \\ x_1, x_2, x_3 \qquad \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x_1 - 2x_2 - 2x_3 + s_1 \qquad = -30 \\ -x_1 \qquad\qquad\qquad + s_2 \quad = -50 \\ \qquad - x_2 - x_3 \qquad\quad + s_3 = -40 \end{cases}$$

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	m	
-1	-2	-2	1	0	0	0	-30
-1	0	0	0	1	0	0	**-50**
0	-1	-1	0	0	1	0	-40
+20	+35	+65	0	0	0	-1	0

Επιλέγουμε το –50 της τελευταίας στήλης.

Επιλέγουμε το -1 της πρώτης στήλης – δεύτερης γραμμής.

Υπολογίζουμε τους λόγους

$$\frac{-30}{-1} = 30$$

$$\frac{-50}{-1} = 50$$

Ο μικρότερος θετικός λόγος είναι ο 30.

Επιλέγουμε για οδηγό στοιχείο το “-1” στη θέση (1,1).

Εκτελούμε την οδήγηση.

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	m	
1	2	2	-1	0	0	0	30
0	2	2	-1	1	0	0	-20
0	**-1**	-1	0	0	1	0	**-40**
0	-5	25	20	0	0	-1	-600

Επιλέγουμε το –40 της τελευταίας στήλης.
Επιλέγουμε το –1 της $2^{ης}$ στήλης – $3^{ης}$ γραμμής.
Υπολογίζουμε τους λόγους που δίνει η $2^{η}$ στήλη.

$$\frac{30}{2}=15,\ \frac{-20}{2}=-10,\ \kappa\alpha\iota\ \frac{-40}{-1}=40$$

Ο μικρότερος θετικός λόγος είναι 15.
Επιλέγουμε για οδηγό στοιχείο το “2” στη θέση (1,2)
Εκτελούμε την οδήγηση.

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	m	
1/2	1	1	-1/2	0	0	0	15
-1	0	0	0	1	0	0	-50
1/2	0	0	-1/2	0	1	0	**-25**
5/2	0	30	35/2	0	0	-1	-525

$$\frac{15}{-\frac{1}{2}}=-30,\ \kappa\alpha\iota\ \frac{-25}{-\frac{1}{2}}=50$$

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	m	
0	1	1	0	0	-1	0	40
-1	0	0	0	1	0	0	**-50**
-1	0	0	1	0	-2	0	50
20	0	30	0	0	35	-1	-1400

$$\frac{-50}{-1}=50,\ \kappa\alpha\iota\ \frac{50}{-1}=-50$$

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	m	
0	1	1	0	0	-1	0	40
1	0	0	0	-1	0	0	50
0	0	0	1	-1	-2	0	100
0	0	30	0	20	35	-1	-2400

Ικανοποιείται το κριτήριο βελτιστότητας:
Η Λύση είναι $(x_1,x_2,x_3,s_1,s_2,s_3,m)=(50,40,0,100,0,0,2400)$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού :

$$\text{Minimize } m = 12x + 3y + 4z$$

υπό τους περιορισμούς :

$$2x + 3y + 4z \geq 4$$

$$3x + y + z \geq 6$$

$$x, y, z \geq 0$$

i. Με χρήση μετασχηματισμών πινάκων να μετατρέψετε το αρχικό πρόβλημα στο δυϊκό του.
ii. Να λυθεί το δυϊκό πρόβλημα με τη μέθοδο Simplex.
iii. Να συμπεράνετε τη λύση του αρχικού προβλήματος.

ΛΥΣΗ:

$$\min m = 12x + 3y + 4z$$
$$2x + 3y + 4z \geq 4$$
$$3x + y + z \geq 6$$
$$x, y, z \geq 0$$

ΠΡΩΤΕΥΟΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

$$\min m = RX$$
$$AX \geq C$$
$$X \geq 0$$

$$R = [12, 3, 4] \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

ΔΥΪΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

$$\max m = C'U$$
$$A'U \leq R'$$
$$U \geq 0$$

$$C' = [4 \;\; 6] \qquad U = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad A' = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad R' = \begin{bmatrix} 12 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{c} \max m = 4u + 6v \\ 2u+3v \leq 12 \\ 3u+v \leq 3 \\ 4u+v \leq 4 \\ u,v \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -4u-6v+m = 0 \\ 2u+3v+s_1 = 12 \\ 3u+v+s_2 = 3 \\ 4u+v+s_3 = 4 \\ u,v,s_1,s_2,s_3 \geq 0 \end{array}\right.$$

u	v	s_1	s_2	s_3	m	
2	3	1	0	0	0	12
3	1	0	1	0	0	3
4	1	0	0	1	0	4
-4	-6	0	0	0	1	0

$\Uparrow$

Υπολογίζουμε τους λόγους και εντοπίζουμε τον μικρότερο θετικό λόγο.

$$\frac{12}{3}=4,\ \frac{3}{1}=3,\ \kappa\alpha\iota\ \frac{4}{1}=4$$

$\Uparrow$

u	v	s_1	s_2	s_3	m	
-7	0	1	0	0	0	3
3	1	0	1	0	0	3
1	0	0	-1	1	0	1
14	0	0	6	0	1	18

Ικανοποιείται το κριτήριο βελτιστότητας
Βέλτιστη λύση
$(u,v,s_1,s_2,s_3,m) = (0,3,3,0,1,18)$

Δυϊκό πρόβλημα ***Αρχικό πρόβλημα***

Δυϊκό πρόβλημα	Αρχικό πρόβλημα
u=0	x=0
v=3	y=6
max m=18	z=0
	min m = 18

ΘΕΜΑ 3

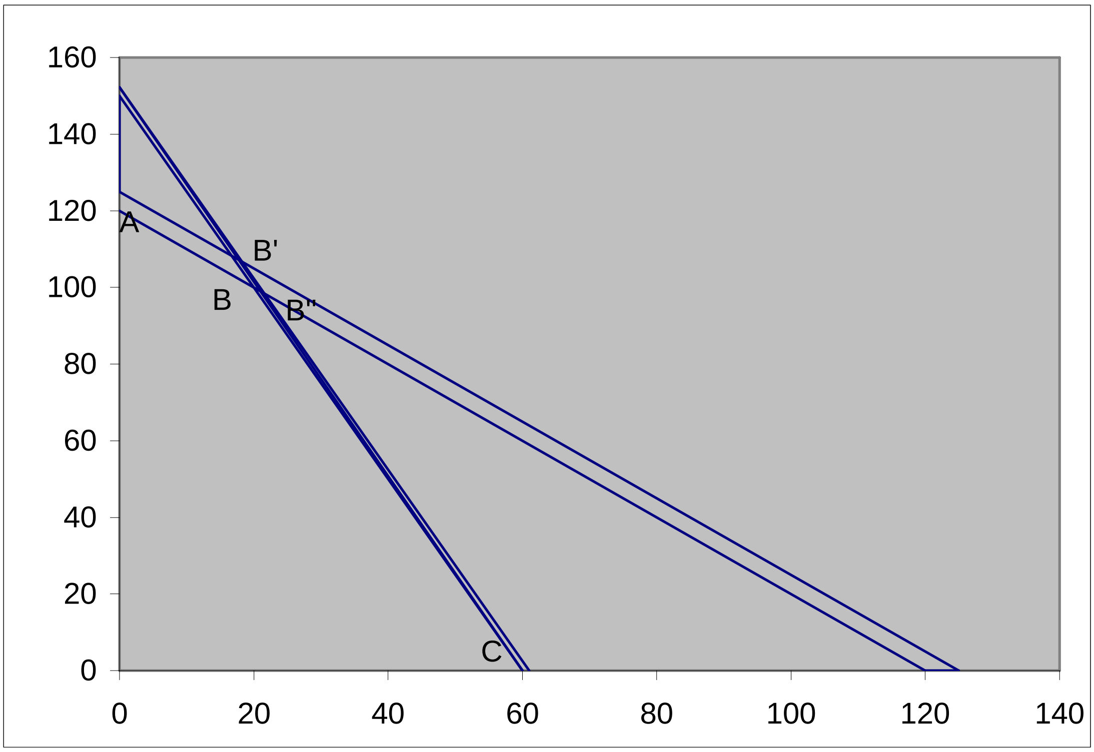
Εταιρία κατασκευάζει φωτογραφικές μηχανές με κόστος 100€ η μία και φλας με κόστος 40€ το ένα. Τα έσοδα από κάθε φωτογραφική μηχανή είναι 160€, ενώ από κάθε φλας 90€. Η εταιρία κατασκευάζει συνολικά έως 120 κομμάτια ανά ημέρα, με ανώτατο όριο του κόστους παραγωγής 6.000€ ανά ημέρα. Να υπολογιστεί το βέλτιστο μέγεθος παραγωγής ώστε να μεγιστοποιήσετε το ημερήσιο κέρδος. Να γίνει η μαθηματική μορφοποίηση του προβλήματος και στη συνέχεια να λυθεί γραφικά. Να υπολογιστούν οι σκιώδεις τιμές για το ανώτατο πλήθος παραγωγής των 120 κομματιών την ημέρα και για το ανώτατο κόστος παραγωγής των 6.000€ ανά ημέρα.

	Κόστος(€)	Τιμή πώλησης(€)	Κέρδος(€)	Παραγωγή (μονάδες/μέρα)
Φωτ. Μηχ.	100	160	60	x_1
Φλας	40	90	50	x_2
Μέγιστο	6000			120

<u>Αντικειμενική συνάρτηση</u> $\max P = 60x_1 + 50x_2$

<u>Περιορισμοί</u>

$$x_1 + x_2 \le 120$$
$$100x_1 + 40x_2 \le 6000$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$



$$\left.\begin{array}{c} O(0,0) \\ A(0,120) \\ B(20,100) \\ C(60,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} P(0,0)=0 \\ P(0,120)=6000 \\ P(20,100)=6200 \text{ max} \\ P(60,0)=3600 \end{array}\right.$$

ΒΕΛΤΙΣΤΟ ΜΕΓΕΘΟΣ ΠΑΡΑΓΓΕΛΙΑΣ: $(x_1, x_2) = (20,100)$ με $\max\ P = 6200$

Υπολογισμός της σκιώδους τιμής για το ανώτατο πλήθος παραγωγής των 120 κομματιών:

$$x_1 + x_2 = 121$$
$$100x_1 + 40x_2 = 6000$$

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 100 & 40 \end{vmatrix} = 40 - 100 = -60$$

$$Dx_1=\begin{vmatrix} 121 & 1 \\ 6000 & 40 \end{vmatrix} = -1160,\ Dx_2 = \begin{vmatrix} 1 & 121 \\ 100 & 6000 \end{vmatrix} = 6000 - 12100 = -6100$$

$$x_1 = \frac{-1160}{-60} = 19.33,\ x_2 = \frac{-6100}{-60} = 101.67$$

B'(19.33 , 101.67)

P(19.33 , 101.67) = $60 \cdot 19.33 + 50 \cdot 101.67$ =6243.3

ΔP=6243.3-6200=43.3ευρω

Υπολογισμός της σκιώδους τιμής για το ανώτατο κόστος παραγωγής των 6000€/ημέρα:

$x_1+x_2=120 \qquad D=-60$

$100x_1+40x_2=6001$

$$Dx_1=\begin{vmatrix}120 & 1\\ 6001 & 40\end{vmatrix}=-1201,\ Dx_2=\begin{vmatrix}1 & 120\\ 100 & 6001\end{vmatrix}=-5999,$$

$$x_1=\frac{-1201}{-60}=20.02 \qquad x_2=\frac{-5999}{-60}=99.98$$

B''=(20.02 , 99.98) , P(B'')=6200.2ευρω ΔP=0.2ευρω

ΘΕΜΑ 4:

Μία εταιρία έχει τα δικαιώματα εξόρυξης πετρελαίου από συγκεκριμένη περιοχή. Η εταιρία έχει τη δυνατότητα να πουλήσει τα δικαιώματά της για 15.000€, ή μπορεί να προχωρήσει σε γεώτρηση. Τα τέσσερα δυνατά αποτελέσματα της γεώτρησης μαζί με τις αντίστοιχες πιθανότητες φαίνονται στον αντίστοιχο πίνακα:

Αποτελέσματα της γεώτρησης	Πιθανότητες	Κέρδος/Ζημιά
Ξερό πηγάδι	0.16	- 100,000 €
Μόνο φυσικό αέριο	0.4	50,000 €
Συνδυασμός φυσικό αέριο με πετρέλαιο	0.24	100,000 €
Μόνο πετρέλαιο	0.2	200,000 €

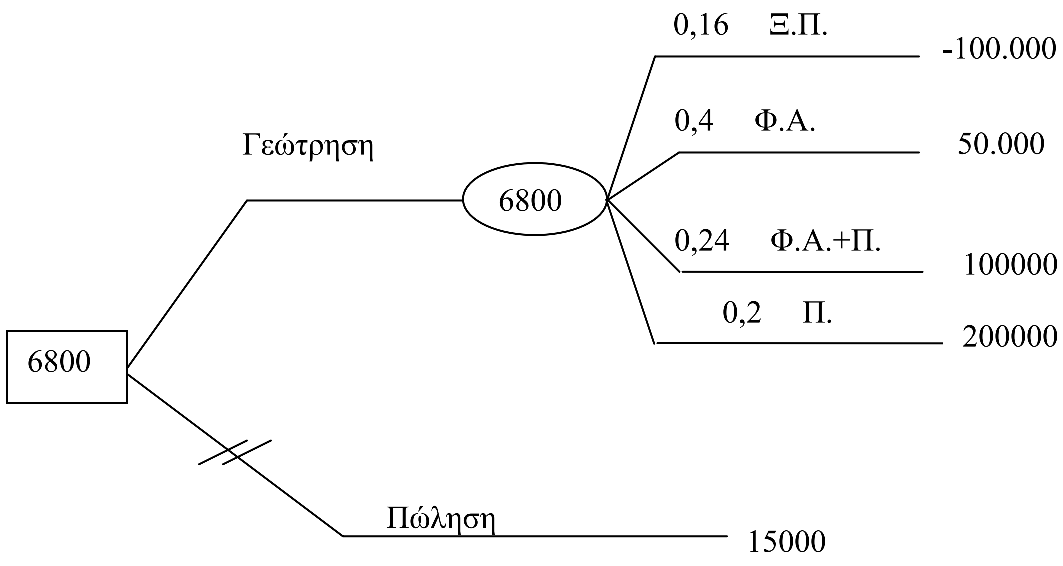
Με χρήση δένδρο-διαγράμματος να απαντηθούν τα παρακάτω:

i. Πρέπει η εταιρία να προχωρήσει στην εξόρυξη; (Προφανώς αν η εταιρία κάνει την εξόρυξη και το πηγάδι αποδειχθεί ξερό δεν θα μπορεί πλέον να πωλήσει τα δικαιώματα στην τιμή των 15000€).

ii. Υποθέστε ότι πριν αρχίσει η εξόρυξη μία ανταγωνίστρια εταιρία προσφέρεται να αγοράσει τα δικαιώματα. Ποια είναι η ελάχιστη τιμή που πρέπει να δεχτούμε;

iii. Υποθέστε ότι πριν αρχίσει η γεώτρηση ένα σύνολο επενδυτών έκανε τη πρόταση να πληρώσει στην εταιρία 20.000€ για το 50% των δικαιωμάτων (δηλαδή να δώσει 20.000€ και να αναλάβει το 50% της πιθανής ζημιάς ή το 50% του πιθανού κέρδους). Η εταιρία πρέπει να δεχθεί την πρόταση των επενδυτών;

ΛΥΣΗ:



i) ΝΑΙ να γίνει εξόρυξη
ii) Ελάχιστη τιμή 68.000 €
iii) ΟΧΙ η πρόταση πρέπει να απορριφθεί γιατί η προσφορά των 200.000 € υπολείπεται του 50% της απόδοσης που είναι 34.000 €

ΘΕΜΑ 5

Α) Σε ένα νεοπροσληφθέντα manager επενδύσεων δόθηκαν οι παρακάτω πληροφορίες:
α) Ετήσια ζήτηση για ένα προϊόν 100000€, β) κόστος παραγγελίας 25€, γ) κόστος αποθήκευσης ανά ευρώ ανά έτος 0,20€. Όταν του ζητήθηκε να υπολογίσει το βέλτιστο μέγεθος παραγγελίας για το προϊόν ο manager παραπονέθηκε ότι δεν του δόθηκε η τιμή του προϊόντος. Μπορείτε να υπολογίσετε ένα βέλτιστο μέγεθος παραγγελίας με τα παραπάνω δεδομένα; Εάν ναι να το κάνετε. Εάν όχι να δοθεί η εξήγηση γιατί δεν γίνεται. Ποιες είναι οι συνήθεις υποθέσεις που γίνονται για να λυθεί ένα πρόβλημα βέλτιστου μεγέθους παραγγελίας και ποιες από αυτές κρίνετε ότι είναι ρεαλιστικές και ποιες όχι;
Β) Δίνονται: κόστος παραγγελίας 50€, ετήσια ζήτηση 10000 μονάδες, κόστος μονάδας 5€, κόστος αποθήκευσης 20% ανά ευρώ ανά έτος, χρόνος αναμονής για τη παράδοση μίας παραγγελίας τέσσερις εβδομάδες με εβδομαδιαία ζήτηση με τυπική απόκλιση 41 μονάδες, κόστος ποινής από την έλλειψη μίας μονάδας 3€, έτος 52 εβδομάδων

i. Να υπολογιστεί το βέλτιστο μέγεθος παραγγελίας.
ii. Να υπολογιστεί το βέλτιστο σημείο παραγγελίας αν η εβδομαδιαία ζήτηση θεωρηθεί ότι ακολουθεί την κανονική κατανομή.

Α) D=100.000 €
K=25 €
K_c=0.2€ / € και έτος

$$Q=\sqrt{\frac{2KD}{Kc}}=\sqrt{\frac{2\cdot 25\,ευρω\cdot 100000\,ευρω/ετος}{0,20\,ευρω/ευρω\text{ και ετος}}}=5000\,ευρω$$

Το βέλτιστο μέγεθος κάθε παραγγελίας είναι 5000 €. Δηλαδή παραγγέλνω κομμάτια αξίας 5000 €.

Υποθέσεις :
1) Ζήτηση: i) προκαθορισμένη ii) με σταθερό ρυθμό
2) Μέγεθος παραγγελίας: πάντα ίδιο
3) Κόστος της μιας παραγγελίας Κ: σταθερό και ανεξάρτητο του μεγέθους παραγγελίας
4) Κόστος αποθήκευσης (ετήσιο) ανά μονάδα προϊόντος ή ανά €: σταθερό και ανεξάρτητο του μεγέθους του αποθέματος.
5) Κόστος αγοράς της μιας μονάδας προϊόντος: σταθερό και ανεξάρτητο του μεγέθους παραγγελίας (δηλαδή δεν δίνονται εκπτώσεις για μεγάλες παραγγελίες), αν και μπορεί σαν τιμή να είναι άγνωστο.
6) Εξάντληση αποθέματος ή μελλοντικές πωλήσεις: δεν επιτρέπονται
7) Ο χρόνος παράδοσης μιας παραγγελίας: i) είναι μηδέν ή ii) είναι σταθερός ή iii) ακολουθεί γνωστή κατανομή, ανάλογα την περίπτωση.
8) Η στάθμη του αποθέματος: παρακολουθείται συνεχώς
9) Μια νέα παραγγελία: γίνεται όταν i) μηδενιστεί το απόθεμα ή ii) όταν αυτό φτάσει στο σημείο ανανέωσης της παραγγελίας R, ανάλογα την περίπτωση.
Μη ρεαλιστικές υποθέσεις: 1(ii) , 7(i) , 9(i)

B) K = 50 €

K_u = 3 €

D = 10.000 μονάδες

c= 5 €

K_c = 20% * 5 € = 1€ / € και έτος

Μέση ζήτηση / εβδομάδα = 10000 / 52 = 192,3 μονάδες / εβδομάδα

Χρόνος αναμονής για την παράδοση μιας παραγγελίας : 4 εβδομάδες

Μέση ζήτηση κατά τη διάρκεια του χρόνου αναμονής:

$$\bar{\mathrm{M}} = 4 \cdot 192.3 = 769.2 \text{ μοναδες / 4 εβδομαδες}$$

$$\sigma_{\bar{M}} = \sqrt{4} \cdot 41 = 82 \text{ μοναδες / 4 εβδομαδες}$$

$$\mathrm{Q} = \sqrt{\frac{2 \cdot 50 \text{ ευρω} \cdot 10000 \text{ μοναδες}}{1 \text{ευρω / ευρω}}} = 1000 \text{ μοναδες}$$

$$\mathrm{F(R)} = 1 - \frac{\mathrm{Kc} \cdot \mathrm{Q}}{\mathrm{K_u} \cdot \mathrm{D}} = 1 - \frac{1 \cdot 1000}{3 \cdot 10000} = 0.967$$

$$\mathrm{Z} = 1.84$$

$$\mathrm{R} = \bar{M} + \mathrm{Z} \cdot \sigma_{\bar{M}} = 769.2 + 1.84 \cdot 82 = 920 \text{ μοναδες}$$