

Λύσεις Θεμάτων Επιχειρησιακής Έρευνας  
 7<sup>ο</sup> Εξαμήνου  
 Κανονική Εξέταση 2005-2006 (Φεβρουαρίου 2006)  
**Λύση 1<sup>ο</sup> Θέματος**

**Ερώτημα 1:**

| Βιταμίνες      | T <sub>1</sub> | T <sub>2</sub> | T <sub>3</sub> | T <sub>4</sub> | T <sub>5</sub> |      |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|------|
| B <sub>1</sub> | 3              | 2              | 0              | 3              | 1              | ≥ 30 |
| B <sub>2</sub> | 1              | 4              | 2              | 9              | 1              | ≥ 27 |
| B <sub>3</sub> | 4              | 6              | 6              | 7              | 5              | ≥ 33 |
| Κόστος         | 10             | 8              | 9              | 18             | 7              |      |

Έστω  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  τα γραμμάρια τροφής ανά ημέρα.  
 Αντικειμενική συνάρτηση :  $\min C = 10x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 18x_4 + 7x_5$

$$\begin{aligned} \text{Υπό τους περιορισμούς : } & \left. \begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 3x_4 + x_5 &\geq 30 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 9x_4 + x_5 &\geq 27 \\ 4x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 7x_4 + 5x_5 &\geq 33 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{περιορισμοί ελάχιστης} \\ \text{ποσότητας βιταμινών} \end{array} \\ & \left. \begin{aligned} x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned} \right\} \text{περιορισμοί μη αρνητικότητας} \end{aligned}$$

**Ερώτημα 2 (Δυϊκό):**

Έστω  $w_1, w_2, w_3$  η τιμή πώλησης ανά μονάδα βιταμίνης.  
 Αντικειμενική συνάρτηση :  $\max P = 30w_1 + 27w_2 + 33w_3$

Περιορισμοί:

$$\begin{aligned} 3w_1 + w_2 + 4w_3 &\leq 10 \\ 2w_1 + 4w_2 + 6w_3 &\leq 8 \\ 2w_2 + 6w_3 &\leq 9 \\ 3w_1 + 9w_2 + 7w_3 &\leq 18 \\ w_1 + w_2 + 5w_3 &\leq 7 \\ w_1, w_2, w_3 &\geq 10 \end{aligned}$$

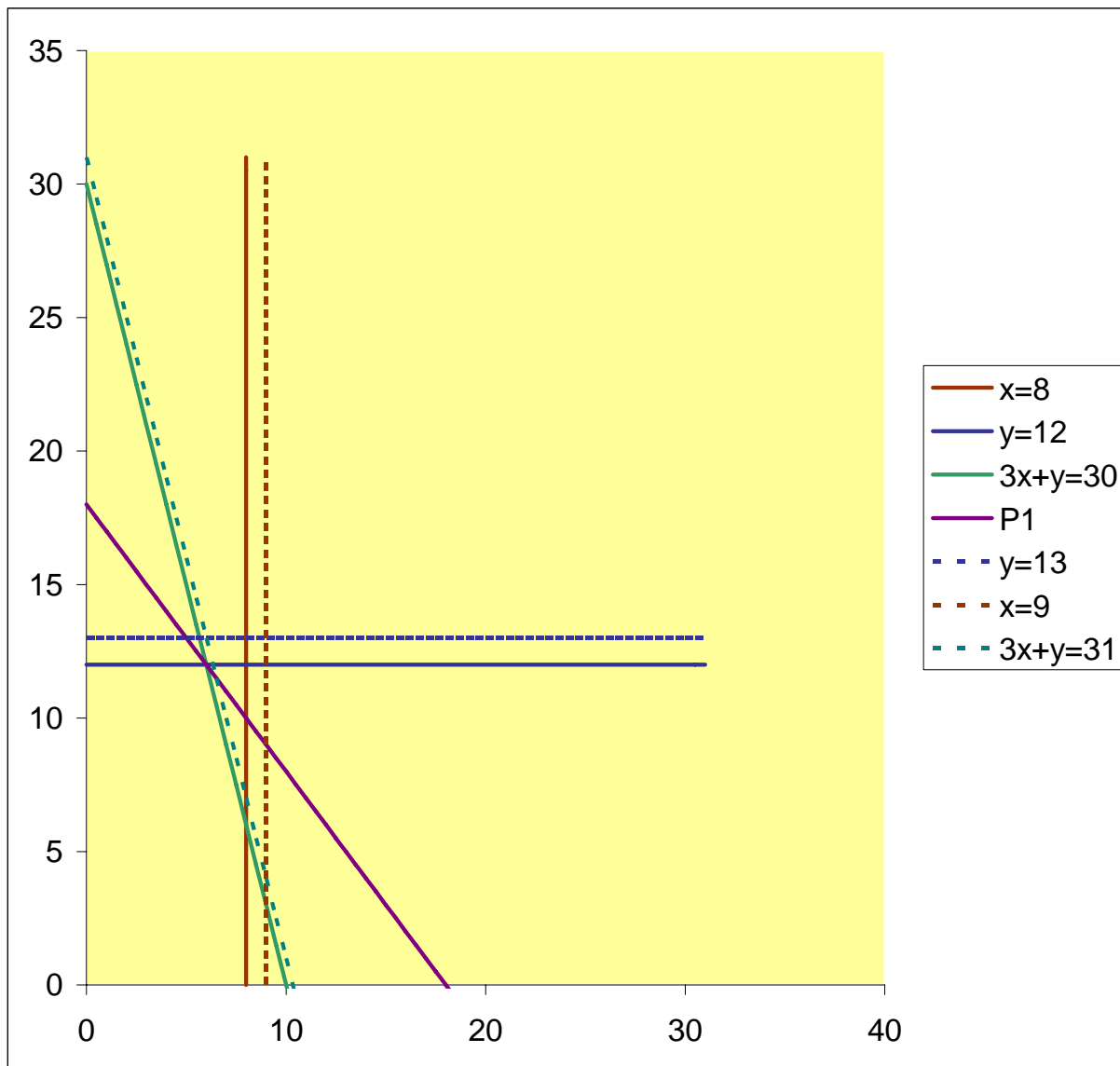
**Λύση 2<sup>ο</sup> Θέματος :**

**Ερώτημα 1:**

|             | Προϊόν Α | Προϊόν Β |      |
|-------------|----------|----------|------|
| Ανθρωποώρες | 3        | 1        | ≤ 30 |
| Πωλήσεις    | 1        |          | ≤ 8  |
|             |          | 1        | ≤ 12 |
| Κέρδος      | 30       | 30       |      |

Έστω  $x, y$  οι χιλιάδες μονάδων προϊόντος Α και προϊόντος Β αντίστοιχα, που θα παραχθούν.  
Αντικειμενική συνάρτηση (μέγιστο κέρδος) :  $\max P = 30x + 30y$  (σε χιλιάδες €)

Υπό τους περιορισμούς :  $3x + y \leq 30$  : διαθέσιμες ανθρωποώρες  
 $x \leq 8$  : διάθεση προϊόντος Α  
 $y \leq 12$  : διάθεση προϊόντος Β  
 $x, y \geq 0$  : μη αρνητικότητα



$$3x + y \leq 30$$

Για  $(x, y) = (0, 0)$ , έχω  $3 \cdot 0 + 0 \leq 30$  δεκτό.

$$\left. \begin{array}{l} y = 12 \\ 3x + y = 30 \end{array} \right\} 3x + 12 = 30 \implies x = 6$$

Άρα έχω το  $B(6, 12)$

$$\left. \begin{array}{l} x = 8 \\ 3x + y = 30 \end{array} \right\} 3 \cdot 8 + y = 30 \implies y = 6$$

Άρα έχω το  $C(8, 6)$

$$\text{Έστω } P = 60 : 30x + 30y = 60$$

$$P(0) = P(0, 0) = 0$$

$$P(A) = P(0, 12) = 360$$

$$P(B) = P(6, 12) = 540 \text{ max}$$

$$P(C) = P(8, 6) = 420$$

$$P(D) = P(8, 0) = 240$$

Έχω λοιπόν  $\max P = 540$  όταν  $x = 6$  χιλιάδες A &  $y = 12$  χιλιάδες B.

### Ερώτημα 2:

Ο περιορισμός  $x \leq 8$  είναι μη ενεργός όταν φύγει και αντικατασταθεί από τον περιορισμό  $x \leq 9$ . Η λύση και το κέρδος δεν αλλάζουν. Η σκιώδης τιμή σ' αυτόν τον περιορισμό όπως και σε κάθε άλλον μη ενεργό περιορισμό, είναι μηδέν.

« Η νέα αποδεκτή λύση είναι η  $OABC'D'$  .

$$\left. \begin{array}{l} x = 9 \\ 3x + y = 30 \end{array} \right\} 27 + y = 30 \implies y = 3$$

$$C' (9, 3)$$

$$D' (9, 0)$$

$$P(C') = P(9, 3) = 30 \cdot 9 + 30 \cdot 3 = 360 < P(B) = 540$$

$$P(D') = P(9, 0) = 30 \cdot 9 = 270 < P(B) = 540$$

### Ερώτημα 3 :

Ο περιορισμός  $y \leq 12$  είναι ενεργός. Όταν αντικατασταθεί από τον  $y \leq 13$ , έχουμε νέα αποδεκτή περιοχή  $OA'B'CD$ .

$$\left. \begin{array}{l} A'(0, 13) \\ y = 13 \\ 3x + y = 30 \end{array} \right\} 3x + 13 = 30 \implies 3x = 17 \implies x = 17/3$$

$$B'(17/3, 13)$$

$$\text{Άρα } P(B') = P(17/3, 13) = 30 \cdot 17/3 + 30 \cdot 13 = 560 > P(B) = 540$$

Έχουμε νέα λύση  $x = 17/3$  χιλ.Α &  $y = 13$  χιλ.Β με νέο κέρδος  $P(B') = 560$  χιλ.€ αυξημένο κατά 20 χιλ. € που είναι η σκιώδης τιμή.

#### **Ερώτημα 4:**

Ο περιορισμός  $3x + y \leq 30$  είναι ενεργός. Όταν αντικατασταθεί από τον  $3x + y \leq 31$ , έχουμε νέα αποδεκτή περιοχή  $OAB''C''D$ .

$$\left. \begin{array}{l} y = 12 \\ 3x + y = 31 \end{array} \right\} \Rightarrow 3x + 12 = 31 \Rightarrow x = 19/3$$

$$B''(19/3, 12)$$

$$\text{Άρα } P(B'') = P(19/3, 12) = 30 \cdot 19/3 + 30 \cdot 12 = 550$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 8 \\ 3x + y = 31 \end{array} \right\} \Rightarrow 24 + y = 31 \Rightarrow y = 7$$

$$C''(8, 7)$$

$$\text{Άρα } P(C'') = P(8, 7) = 30 \cdot 8 + 30 \cdot 7 = 450$$

Έχουμε νέα βέλτιστη λύση  $x = 19/3$  χιλ. προϊόντα Α και  $y = 12$  χιλ. προϊόντα Β που οδηγεί σε νέο μέγιστο κέρδος  $P(B'') = 550$  χιλ. € που είναι κατά 10 χιλ. € μεγαλύτερο από το παλιό βέλτιστο κέρδος. Αυτή η τιμή των 10 χιλ. € είναι και η σκιώδης τιμή γι' αυτόν τον περιορισμό.

#### **Ερώτημα 5:**

Ο περιορισμός  $x \leq 8$  είναι μη ενεργός, πράγμα που σημαίνει ότι έχει σκιώδη τιμή ίση με μηδέν, την οποία και διατηρεί όσο η σταθερά 8 του 2<sup>ου</sup> μέλους κινείται στο διάστημα  $[6, +\infty)$ .

Ο περιορισμός  $y \leq 12$  είναι ενεργός και έχει σκιώδη τιμή ίση με 20 χιλ. €, την οποία και διατηρεί όσο η σταθερά 12 του 2<sup>ου</sup> μέλους κινείται στο διάστημα  $[6, 30]$ .

Ο περιορισμός  $3x + y \leq 30$  είναι ενεργός και έχει σκιώδη τιμή 10 χιλ. €, που διατηρεί όσο η σταθερά 30 του 2<sup>ου</sup> μέλους κινείται στο διάστημα  $[0, 36]$ .

#### **Λύση 3<sup>ου</sup> Θέματος**

##### ***1<sup>ος</sup> τρόπος:***

Έστω  $x_i, i=1, 2, \dots, 13$  τα ρολά που θα κοπούν με την μέθοδο κοπής  $i, i=1, 2, \dots, 13$ .

Επιθυμώ να καταναλώσω τον ελάχιστο αριθμό ρολών:

$$\min Z = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{13}$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\geq 560 \\ x_2 + 2x_6 + 2x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} &\geq 320 \\ x_3 + 2x_4 + x_6 + 2x_8 + x_9 + 4x_{11} + 2x_{12} &\geq 850 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_5 + x_7 + x_8 + 2x_9 + 4x_{10} + 3x_{12} + 6x_{13} &\geq 180 \\ x_i &\geq 0, i=1,2,\dots,13 \end{aligned}$$

2<sup>ος</sup> τρόπος:

Υπολογίζω τις απώλειες για κάθε μέθοδο :

|         | ΜΕΘΟΔΟΣ ΚΟΠΗΣ |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|---------|---------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| ΠΛΑΤΟΣ  | 1             | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   | 10  | 11  | 12  | 13  |
| 60 cm   | 2             | 1   | 1   | 1   | 1   |     |     |     |     |     |     |     |     |
| 50 cm   |               | 1   |     |     |     | 2   | 2   | 1   | 1   | 1   |     |     |     |
| 30 cm   |               |     | 1   | 2   |     | 1   |     | 2   | 1   |     | 4   | 2   |     |
| 20 cm   |               | 1   | 2   |     | 3   |     | 1   | 1   | 2   | 4   |     | 3   | 6   |
| ΣΥΝΟΛΟ  | 120           | 130 | 130 | 120 | 120 | 130 | 120 | 130 | 120 | 130 | 120 | 120 | 120 |
| ΟΛΙΚΟ   | 150           | 150 | 150 | 150 | 150 | 150 | 150 | 150 | 150 | 150 | 150 | 150 | 150 |
| ΑΠΩΛΕΙΑ | 30            | 20  | 20  | 30  | 30  | 20  | 30  | 20  | 30  | 20  | 30  | 30  | 30  |

Επιθυμώ να ελαχιστοποιήσω τις απώλειες :  $\min Z = 30x_1 + 20x_2 + 20x_3 + 30x_4 + 30x_5 + 20x_6 + 30x_7 + 20x_8 + 30x_9 + 20x_{10} + 30x_{11} + 30x_{12} + 30x_{13}$

Υπό τους ίδιους περιορισμούς, δηλ.:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\geq 560 \\ x_2 + 2x_6 + 2x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} &\geq 320 \\ x_3 + 2x_4 + x_6 + 2x_8 + x_9 + 4x_{11} + 2x_{12} &\geq 850 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_5 + x_7 + x_8 + 2x_9 + 4x_{10} + 3x_{12} + 6x_{13} &\geq 180 \\ x_i &\geq 0, i=1,2,\dots,13 \end{aligned}$$

### Λύση 4<sup>ου</sup> Θέματος

#### Ερώτημα 1:

1) Βασικό Μοντέλο

|        | ΚΕΡΔΟΣ                            |   |
|--------|-----------------------------------|---|
| ΖΗΤΗΣΗ | Παράγω 6000                       | Παράγω 8000                               |
| 6000   | $6000 \cdot (200 - 100) = 600000$ | $6000 \cdot 100 - 2000 \cdot 50 = 500000$ |
| 8000   | 600000                            | $8000 \cdot 100 = 800000$                 |

Κέρδος (από κάθε κομμάτι του βασικού μοντέλου, αν αυτό πουληθεί) =  
 = (Τιμή πώλησης μονάδος βασικού μοντέλου) - (Κόστος παρ. μονάδος βασικού μοντέλου) =  
 = 200 € - 100 € = 100 €

Ζημιά (από κάθε κομμάτι του βασ. μοντ. που δεν πουλήθηκε αρχικά και μετά εκποιήθηκε) =  
 = (Τιμή εκποίησης μονάδος βασ. μοντέλου) - (Κόστος παραγωγής μονάδος βασ. μοντέλου) =  
 = 50 € - 100 € = - 50 €

|          |            | ΠΑΡΑΓΩΓΗ 6000 |                    | ΠΑΡΑΓΩΓΗ 8000 |                    |
|----------|------------|---------------|--------------------|---------------|--------------------|
| Ζήτηση   | Πιθανότητα | Κέρδος        | Σταθμισμένο Κέρδος | Κέρδος        | Σταθμισμένο Κέρδος |
| 6000     | 0,30       | 600000        | 180000             | 500000        | 150000             |
| 8000     | 0,70       | 600000        | 420000             | 800000        | 560000             |
| ΣΥΝΟΛΑ : |            |               | 660000             |               | 710000             |
|          |            |               |                    |               | <b>Βέλτιστο</b>    |

EMV<sub>βασικού</sub> = 710000 € για παραγωγή 8000 κομματιών

2) Ψηφιακό Μοντέλο

| ΚΕΡΔΟΣ |                   |                               |
|--------|-------------------|-------------------------------|
| ΖΗΤΗΣΗ | Παράγω 2000       | Παράγω 4000                   |
| 2000   | 2000*150 = 300000 | 2000*150+2000*(-100) = 100000 |
| 4000   | 2000*150 = 300000 | 4000*150 = 600000             |

Κέρδος (από κάθε κομμάτι του ψηφιακού αν αυτό πουληθεί) = 350 € - 200 € = 150 €

Κέρδος (ζημιά) (από κάθε κομμάτι του ψηφιακού αν δεν πουληθεί & εκποιηθεί) =  
 = 100 € - 200 € = -100 €

(Άλλος τρόπος):

$$2000*350 € - 4000*200 € + 2000*100 € = 700000 € - 800000 € + 200000 € = 100000$$

Deleted:

Deleted:

|          |            | ΠΑΡΑΓΩΓΗ 6000 |                    | ΠΑΡΑΓΩΓΗ 8000 |                    |
|----------|------------|---------------|--------------------|---------------|--------------------|
| Ζήτηση   | Πιθανότητα | Κέρδος        | Σταθμισμένο Κέρδος | Κέρδος        | Σταθμισμένο Κέρδος |
| 2000     | 0,20       | 300000        | 60000              | 100000        | 20000              |
| 4000     | 0,80       | 300000        | 240000             | 600000        | 480000             |
| ΣΥΝΟΛΑ : |            |               | 300000             |               | 500000             |
|          |            |               |                    |               | <b>Βέλτιστο</b>    |

Formatted Table

EMV<sub>ψηφιακού</sub> = 500000 € για παραγωγή 4000 κομματιών ψηφιακού μοντέλου

### **Ερώτημα 2:**

Βέλτιστο πλάνο παραγωγής : (x, y) = (6000, 4000) με αναμενόμενο κέρδος 1.100.000 € .

### Λύση 5<sup>ου</sup> Θέματος

Αντικειμενική συνάρτηση :  $\min F = x_1 + 2x_2$

$$\text{Υπό τους περιορισμούς : } 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 3$$

$$x_1 + x_2 - x_4 = 1$$

$$-3x_1 + x_2 + x_5 = 3$$

$$-3x_1 - 3x_2 + x_6 = 2$$

$$x_i \geq 0, i = 1, \dots, 6$$

| i | Βάση           | C | P <sub>0</sub> | -1             | 2              | 0              | 0              | 0              | 0              |
|---|----------------|---|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
|   |                |   |                | P <sub>1</sub> | P <sub>2</sub> | P <sub>3</sub> | P <sub>4</sub> | P <sub>5</sub> | P <sub>6</sub> |
| 1 | P <sub>3</sub> | 0 | 3              | 5              | -2             | 1              | 0              | 0              | 0              |
| 2 | P <sub>4</sub> | 0 | 1              | 1              | 1              | 0              | -1             | 0              | 0              |
| 3 | P <sub>5</sub> | 0 | 3              | -3             | 1              | 0              | 0              | 1              | 0              |
| 4 | P <sub>6</sub> | 0 | 2              | -3             | -3             | 0              | 0              | 0              | 1              |
| 5 |                | 0 | -1             | 2              | 0              | 0              | 0              | 0              | 0              |



Ο P<sub>2</sub> εισέρχεται στη βάση  
(μέγιστο από τα θετικά)  
k = 2 .