Γραμμικός Προγραμματισμός - Μέθοδος Simplex

Η πλέον γνωστή και περισσότερο χρησιμοποιημένη μέθοδος για την επίλυση ενός γενικού προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού, είναι η μέθοδος Simplex η οποία αναπτύχθηκε από τον George Dantzig. Η μέθοδος αυτή αποτελεί μια αλγεβρική επαναληπτική διαδικασία η οποία επιλύει ακριβώς, κάθε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού, σε ένα πεπερασμένο πλήθος βημάτων. Τα βήματα αυτά θα αναφερθούν αναλυτικά παρακάτω αφού πρώτα ορίσουμε κάποιες έννοιες.

• Ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού βρίσκεται στην **κανονική μορφή** όταν:

i) Η αντικειμενική συνάρτηση ζητείται να μεγιστοποιηθεί.

ii) Οι μεταβλητές είναι όλες μη αρνητικές, δηλαδή, μεγαλύτερες ή ίσες του μηδενός.

iii) Στους περιορισμούς, οι γραμμικές εκφράσεις που περιέχουν τις μεταβλητές είναι μικρότερες ή ίσες από μία μη αρνητική σταθερά, δηλαδή είναι της μορφής:

$$(\text{γραμμικό πολυώνυμο}) \leq \alpha, \quad \text{όπου } \alpha \geq 0$$

Παράδειγμα κανονικής μορφής :

Μεγιστοποίηση της $m=6x+8y$ υπό περιορισμούς

$$x+y \leq 10$$
$$2x+3y \leq 12$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

• Μία μεταβλητή ονομάζεται **χαλαρή**, όταν παριστάνει τη διαφορά μεταξύ μιας διαθέσιμης ποσότητας και της ποσότητας που πράγματι χρησιμοποιείται.

Παράδειγμα χαλαρής μεταβλητής :

Δίνεται η ανισότητα $2x+y \leq 10$

Θα ορίσουμε τη χαλαρή μεταβλητή s_1 έτσι ώστε $2x+y+s_1 = 10$

• Η **τυποποιημένη μορφή της αντικειμενικής συνάρτησης** δημιουργείται όταν ταξινομούμε τους όρους της έτσι ώστε να έχει την ίδια μορφή εξίσωσης με τους περιορισμούς.

Παράδειγμα τυποποιημένης μορφής :

Δίνεται η αντικειμενική συνάρτηση $m=6x+8y$

Η *τυποποιημένη* μορφή της θα είναι $-6x-8y+m=0$

• **Αρχικός Simplex πίνακας** καλείται ο επαυξημένος πίνακας ο οποίος αποτελείται από σειρές με στοιχεία τους συντελεστές των μεταβλητών των εξισώσεων των περιορισμών, η τελευταία του σειρά αποτελείται από τους συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης και η τελευταία του στήλη από τις σταθερές τους.

Παράδειγμα αρχικού Simplex πίνακα:

Μεγιστοποίηση της $m= 2x + 3y + 4z$ υπό περιορισμούς

$$x + 2y + 3z \leq 12$$
$$2x + 5z \leq 10$$
$$3x + y + z \leq 6$$

Από αυτά τα δεδομένα προκύπτει ο πίνακας

x	y	z	s_1	s_2	s_3	m	
1	2	3	1	0	0	0	12
2	0	5	0	1	0	0	10
3	1	1	0	0	1	0	6
-2	-3	-4	0	0	0	1	0

• Μία στήλη βρίσκεται σε **βασική μορφή** όταν μόνο ένα στοιχείο της είναι ίσο με το 1 και όλα τα υπόλοιπα είναι 0. Η μεταβλητή στην οποία αντιστοιχεί ονομάζεται **βασική μεταβλητή**.Οι υπόλοιπες μεταβλητές ονομάζονται **μη-βασικές**.

• Την **βασική εφικτή λύση** την παίρνουμε όταν στον αρχικό Simplex πίνακα θέσουμε τις μη-βασικές μεταβλητές ίσες με 0, οπότε αντιστοιχίζομαι τις βασικές μεταβλητές με τα σταθερά στοιχεία της τελευταίας στήλης.

Παράδειγμα εύρεσης βασικής λύσης :

Δίνεται ο αρχικός Simplex πίνακας

x	y	s_1	s_2	m	
-1	0	1	-2	0	2
1	1	0	1	0	5
1	0	0	3	1	15

Οι στήλες που βρίσκονται σε βασική μορφή είναι η δεύτερη, Τρίτη και πέμπτη.
Οι βασικές μεταβλητές είναι η y, $s_{1,}$ m και η βασική εφικτή λύση, αν θέσουμε $x= s_2 =0$, είναι $y=5$, $s_1 =2$, $m=15$.

• Κάθε αρχικός Simplex πίνακας έχει περισσότερες στήλες από ότι σειρές, ώστε το σύστημα να έχει άπειρο αριθμό λύσεων. Ποια είναι η καλύτερη εφικτή λύση θα εξαρτηθεί από την μορφή του πίνακα και την εφαρμογή του **ελέγχου μέγιστης λύσης** που λέει:

Ο αρχικός Simplex πίνακας θα δώσει την βέλτιστη λύση αν και μόνο αν η τελευταία σειρά, η οποία αναφέρεται στην αντικειμενική συνάρτηση, περιλαμβάνει μόνο μη αρνητικά στοιχεία.

• Η στήλη που έχει το πιο αρνητικό στοιχείο στην τελευταία σειρά ονομάζεται **στήλη οδηγός**. Η μεταβλητή που αντιστοιχεί στην στήλη αυτή καλείται **εισερχομένη μεταβλητή**.Αν υπάρχουν δύο ή περισσότερα ίσα και αρνητικά στοιχεία, τότε μπορούμε να επιλέξουμε οποιαδήποτε από τις στήλες που τους αντιστοιχούν. Όταν επιλεγεί η στήλη οδηγός, αναζητάμε τη **σειρά οδηγό** ως εξής: Για κάθε σειρά,εκτός από την τελευταία, με θετική καταχώριση στην στήλη οδηγό, υπολογίζουμε τον λόγο του στοιχείου στην τελευταία στήλη προς το στοιχείο στην στήλη οδηγό. Αν προκύψουν δύο ή περισσότερες σειρές με τον ίδιο λόγο, τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε οποιαδήποτε σειρά αλλιώς το στοιχείο που αντιστοιχεί στην σειρά με τον μικρότερο θετικό λόγο ονομάζεται **στοιχείο οδηγός**. Το στοιχείο αυτό θα γίνει 1 και τα υπόλοιπα της στήλης του 0 ύστερα από μία σειρά εργασιών στις σειρές που θα πραγματοποιηθεί, προκειμένου να μετατραπεί η στήλη άξονας σε βασική μορφή. Αυτή η διαδικασία ονομάζεται **οδήγηση**.

Παράδειγμα οδήγησης :

Δίνεται ο πίνακας

x	y	s_1	s_2	m	
1	2	0	3	0	26
0	1	1	1	0	10
0	-2	0	10	1	12

Ο έλεγχος μέγιστης λύσης αποτυγχάνει αφού υπάρχει αρνητικό στοιχείο στην τελευταία σειρά. Η δεύτερη στήλη είναι η στήλη άξονας και η y η εισερχόμενη μεταβλητή. Μετά από υπολογισμό του λόγου της πρώτης σειράς 26/2 και της δεύτερης σειράς 10/1 προκύπτει ότι η δεύτερη σειρά είναι σειρά άξονας και η καταχώριση άξονα θα είναι ίση με το στοιχείο(2,2)=1. Στη συνέχεια μέσα από τις ακόλουθες πράξεις σειρών μετατρέπουμε το πίνακα μας σε βασική μορφή

x	y	s_1	s_2	m		
1	0	-2	1	0	6	R1+(-2)R2
0	1	1	1	0	10	
0	0	2	12	1	32	R3+ 2R2

Και από όπου προκύπτει η μέγιστη εφικτή λύση x=6 , y=10 , m=32

Να σημειωθεί εδώ ότι η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται όσες φορές χρειαστεί προκειμένου ο πίνακας που θα προκύψει τελικά να έχει τελευταία σειρά με μη αρνητικά στοιχεία.

Αφού ορίσαμε όλες τις έννοιες, μπορούμε σε αυτό το σημείο να δώσουμε τα βήματα για την επίλυση προβλημάτων με τη μέθοδο Simplex τα οποία βρίσκονται σε κανονική μορφή.

Η Μέθοδος Simplex για Προβλήματα σε Κανονική Μορφή

1. Ανάγουμε τους περιορισμούς που εκφράζονται με ανισώσεις σε εξισώσεις, εισάγοντας νέες μη αρνητικές μεταβλητές, οι οποίες ονομάζονται χαλαρές μεταβλητές και εκφράζουμε την αντικειμενική συνάρτηση σε κατάλληλη μορφή.
2. Κατασκευάζουμε τον αρχικό Simplex πίνακα.
3. Εφαρμόζουμε τον έλεγχο της μέγιστης λύσης. Αν η βασική εφικτή λύση είναι μέγιστη, τότε το πρόβλημα έχει λυθεί. Αν όχι τότε προχωράμε στο επόμενο βήμα.
4. Κατασκευάζουμε ένα νέο Simplex πίνακα ακολουθώντας την εξής διαδικασία:
   a) Επιλέγουμε την στήλη άξονα
   b) Επιλέγουμε την σειρά άξονα
   c) Εφαρμόζουμε τη διαδικασία οδήγησης γύρω από την καταχώριση άξονα.
5. Επαναλαμβάνουμε το βήμα 3.

Εκτός όμως από τα προβλήματα αυτά, η μέθοδος Simplex μπορεί να εφαρμοστεί και σε προβλήματα που δεν βρίσκονται σε κανονική μορφή, δηλαδή, συμβαίνει τουλάχιστον ένα από τα παρακάτω:

i) Ζητείται η αντικειμενική συνάρτηση να ελαχιστοποιηθεί.

ii) Στους περιορισμούς, οι γραμμικές εκφράσεις που περιέχουν τις μεταβλητές είναι μεγαλύτερες από μία μη αρνητική σταθερά, δηλαδή είναι της μορφής:

(γραμμικό πολυώνυμο) $\geq$ α , όπου α ≥ 0

Και στα προβλήματα αυτά συνεχίζει να ισχύει ότι οι μεταβλητές είναι όλες μη αρνητικές, δηλαδή, μεγαλύτερες ή ίσες του μηδενός.

Στις περιπτώσεις αυτές τα βήματα που ακολουθούμε για την επίλυση προβλημάτων με τη μέθοδο Simplex τα οποία βρίσκονται σε μη-κανονική μορφή είναι τα εξής :

Η Μέθοδος Simplex για Προβλήματα σε Μη-Κανονική Μορφή

1. Αν το πρόβλημα ζητά την ελαχιστοποίηση της m , τότε δουλεύουμε με το πρόβλημα της μεγιστοποίησης της – m.
2. Αν οι περιορισμοί είναι της μορφής (γραμμικό πολυώνυμο) $\geq$ α , όπου α ≥ 0 τότε πολλαπλασιάζοντας επί -1 λαμβάνουμε την επιθυμητή μορφή.
3. Αν δεν εμφανιστεί αρνητικός αριθμός στην τελευταία στήλη,εκτός από το τελευταίο της στοιχείο, τότε πηγαίνουμε κατευθείαν στο βήμα 6, αλλιώς συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα.
4. Μετατρέπουμε τον αρνητικό αριθμό σε θετικό με τον ακόλουθο τρόπο:

a) Διαλέγουμε ένα αρνητικό στοιχείο που βρίσκεται στην ίδια σειρά με τον αρνητικό αριθμό της τελευταίας στήλης.Η στήλη του θα γίνει στήλη οδηγός.

b) Υπολογίζουμε όλους τους λόγους, συμπεριλαμβανομένων και αυτών που αντιστοιχούν στους αρνητικούς αριθμούς της στήλης οδηγό.Τότε η σειρά οδηγός θα είναι αυτή με το μικρότερο θετικό λόγο.

c) Εφαρμόζουμε τη διαδικασία οδήγησης γύρω από το στοιχείο οδηγό.

5. Επαναλαμβάνουμε το βήμα 3 εώς ότου να μην υπάρχει άλλη αρνητική καταχώριση στην τελευταία στήλη.
6. Τελικά ο πίνακας που προκύπτει είναι σε κανονική μορφή και χρησιμοποιούμε κατά τα γνωστά τη μέθοδο Simplex για την επίλυση προβλήματος σε κανονική μορφή.

Παράδειγμα προβλήματος σε μη-κανονική μορφή :

Ελαχιστοποίηση της m= x+y υπό περιορισμούς

$2x-y \geq 30$

$-x+y \geq 50$

Οπότε ακολουθώντας τα βήματα ζητάμε την μεγιστοποίηση της -m= -x-y

Υπό περιορισμούς $-2x+y \leq -30$

$x-y \leq -50$

Ο αρχικός Simplex πίνακας θα είναι

x	y	s_1	s_2	m	
-2	1	1	0	0	-30
1	-1	0	1	0	-50
1	1	0	0	1	0

Υπάρχουν 2 αρνητικοί αριθμοί στην τελευταία στήλη επιλέγουμε τυχαία τον -50 της δεύτερης σειράς.Τότε η δεύτερη στήλη γίνεται στήλη άξονας λόγω της ύπαρξης του -1 και οι λόγοι θα είναι ίσοι με -80/(-1) για την πρώτη σειρά και 50/(-1) για την δεύτερη σειρά.Οπότε το στοιχείο άξονας θα είναι το (2,2)= -1.

Με πράξεις θα προκύψει ο πίνακας

x	y	s_1	s_2	m		
-1	0	1	1	0	-80	R2+R1
-1	1	0	-1	0	50	(-1)R2
2	0	0	1	1	-50	R2+R3

Παρατηρούμε ότι πάλι εμφανίζεται αρνητικός αριθμός -80 στην τελευταία στήλη, οπότε

με επανάληψη των παραπάνω βημάτων θα καταλήξουμε στον πίνακα

x	y	s_1	s_2	m		
1	0	-1	-1	0	80	(-1)R1
0	1	-1	-2	0	130	(-1)R1+R2
0	0	2	3	-1	-210	2R1+R3

Δεν υπάρχει άλλο αρνητικό στοιχείο, ο πίνακας μας περνά τον έλεγχο μέγιστης τιμής και

η λύση θα είναι x=80 , y=130 , $s_1 = s_2 = 0$, -m=-210 οπότε η ελάχιστη τιμή του m θα είναι

m = 210.

Ανακεφαλαιώνοντας είδαμε πως μπορούμε με τη μέθοδο Simplex να επιλύσουμε προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού σε κανονική και μη-κανονική μορφή.Η μέθοδος αυτή υπερισχύει έναντι της γεωμετρικής προσέγγισης και αυτό οφείλεται στο ότι :

1) Η μέθοδος Simplex μπορεί να χειριστεί πολλές εξισώσεις και μεταβλητές, ενώ η γεωμετρική μέθοδος μπορεί μόνο 2 μεταβλητές.
2) Η μέθοδος Simplex είναι μηχανική και δεν βασίζεται σε οπτικές ή γεωμετρικές ερμηνείες των δεδομένων.Έτσι είναι ευκολότερο να προγραμματιστεί ένας υπολογιστής να κάνει τους υπολογισμούς.

Τέλος θα αναφέρουμε μία άλλη μέθοδο για την επίλυση των προβλημάτων σε μη-κανονική μορφή που φέρει το πλεονέκτημα σε σχέση με την επίλυση με τη μέθοδο Simplex ότι δεν χρειάζεται τον ορισμό πολυάριθμων οδηγών.Η μέθοδος αυτή ονομάζεται Dual και βρίσκει εφαρμογή σε προβλήματα που η αντικειμενική συνάρτηση ζητείται να ελαχιστοποιηθεί και που όλοι οι περιορισμοί είναι της μορφής $\geq$.Η μορφή της περιγράφεται παρακάτω .

Το Δυϊκό πρόβλημα (Dual Problem)

Αν ένα πρόγραμμα γραμμικού προγραμματισμού έχει τη μορφή

$$\begin{array}{ll} \text{Ελαχιστοποίηση} & m = RX \\ \text{Υπό περιορισμούς} & AX \geq C \\ & X \geq 0 \end{array}$$

Τότε το dual πρόβλημα του θα έχει τη μορφή

$$\begin{array}{ll} \text{Μεγιστοποίηση} & m = C'U \\ \text{Υπό περιορισμούς} & A'U \geq R' \\ & U \geq 0 \end{array}$$

με R : πίνακας σειρά με στοιχεία τους συντελεστές των μεταβλητών στην αντικειμενική συνάρτηση
X : πίνακας στήλη με στοιχεία τις μεταβλητές στην αντικειμενική συνάρτηση
A : πίνακας με σειρές τους συντελεστές των μεταβλητών σε κάθε περιορισμό
C : πίνακας στήλη με στοιχεία τους σταθερούς όρους στο δεξί μέλος των περιορισμών

και με C' : ανάστροφος πίνακα του C
U : πίνακας στήλη με ίδιο μέγεθος με τον C που περιλαμβάνει νέες μεταβλητές
A' : ανάστροφος πίνακας του A
R' : ανάστροφος πίνακας του R

Ένας άλλος τρόπος να εκφραστεί πιο αποτελεσματικά το dual πρόβλημα είναι ως εξής :

- Αρχικά σχηματίζουμε τον αρχικό πίνακα T , του οποίου η τελευταία σειρά προέρχεται από την αντικειμενική συνάρτηση και οι υπόλοιπες από τους περιορισμούς.
- Στην συνέχεια φτιάχνουμε τον ανάστροφο του πίνακα T'
- Ξαναγράφουμε την αντικειμενική συνάρτηση ,με συντελεστές μεταβλητών όμως να προέρχονται από την τελευταία σειρά του T' και από τις υπόλοιπες σειρές για τους περιορισμούς.
- Το πρόβλημα που προκύπτει βρίσκεται σε βασική κατάσταση και το λύνουμε κατά τα γνωστά.

Παράδειγμα dual προβλήματος :

Ελαχιστοποίηση της m= 4x+2y υπό περιορισμούς

$$\begin{array}{c} 5x+y \geq 5 \\ 5x+3y \geq 10 \\ x\geq 0 \text{ , } y\geq 0 \end{array}$$

Σχηματίζουμε τον αρχικό πίνακα T και τον ανάστροφο του

$$T = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 5 & 3 & 10 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad T' = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

Μετατροπή σε dual πρόβλημα

Μεγιστοποίηση της m= 5u+10υ υπό περιορισμούς

$$5u+5υ \leq 4$$

$$u+3υ \leq 2$$

$$u\geq 0 \ , \ υ\geq 0$$

Ο αρχικός πίνακας του dual προβλήματος θα είναι

u	υ	s_1	s_2	m	
5	5	1	0	0	4
1	3	0	1	0	2
-5	-10	0	0	1	0

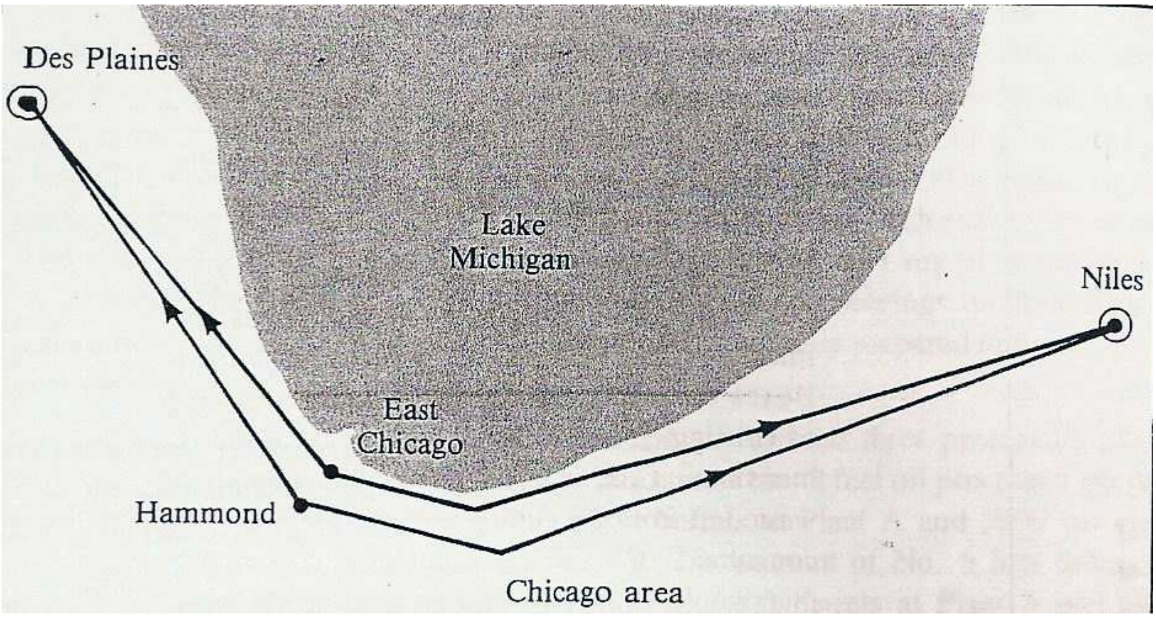
Ο οποίος καταλήγει στην τελικό πίνακα

u	υ	s_1	s_2	m	
1	0	3/10	-1/2	0	1/5
0	1	-1/10	1/2	0	3/5
0	0	1/2	5/2	1	7

Και η λύση του θα είναι u=1/5 , υ=3/5 , m=7.

Η τιμή m=7 είναι η μέγιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του dual προβλήματος και η ελάχιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του αρχικού μας προβλήματος. Οι τιμές των x,y βρίσκονται στην τελευταία σειρά του τελικού πίνακα στις στήλες των χαλαρών μεταβλητών, οπότε x=1/2 και y=5/2.

Τέλος θα δώσουμε ένα παράδειγμα που βρίσκει εφαρμογή η μέθοδος Simplex στην επίλυση του προβλήματος μεταφοράς προϊόντων.Συγκεκριμένα θα ασχοληθούμε με την Εταιρεία πετρελαίων Shell και το πρόβλημα διανομής καυσίμων που έχει στο Σικάγο της Αμερικής.



Η περιοχή αυτή έχει 2 διυλιστήρια που βρίσκονται στο ανατολικό Σικάγο και στο Χάμοντ στα οποία το ακατέργαστο πετρέλαιο μετατρέπεται σε ποικίλης ποιότητας εμπορεύσιμο πετρέλαιο. Τα δύο τερματικά αποθήκευσης και φόρτωσης σε πλοία βρίσκονται στο Niles και στο Des Plaines. Σε μία μέρα το διυλιστήριο στο ανατολικό Σικάγο θα παράγει τουλάχιστον 50 χιλιάδες βυτία εμπορεύσιμου πετρελαίου και το διυλιστήριο στο Χάμοντς θα παράγει τουλάχιστον 120 χιλιάδες βυτία.Το τερματικό στο Niles θα χρειαστεί τουλάχιστον 70 χιλιάδες βυτία και το τερματικό στο Des Plaines θα χρειαστεί τουλάχιστον 100 χιλιάδες βυτία.Η μέγιστη δαπάνη μεταφοράς με πλοίο από το διυλιστήριο στο ανατολικό Σικάγο είναι $8 μέχρι το Niles και $16 μέχρι το Des Plaines , ενώ το μέγιστο κόστος από το διυλιστήριο στο Χάμοντ είναι $14 μέχρι το Niles και $7 μέχρι το Des Plaines(οι τιμές αναφέρονται ανά μίλι και ανά 1000 βυτία).Το πρόβλημα είναι να προσδιορίσουμε πόσα βυτία πρέπει να μεταφερθούν από κάθε διυλιστήριο σε κάθε τερματικό , προκειμένου σύμφωνα με τους περιορισμούς να ελαχιστοποιηθεί η δαπάνη μεταφοράς.

Λύση προβλήματος

Καταρχάς θα ορίσουμε τις μεταβλητές έτσι ώστε να παριστάνουν τον αριθμό των βυτίων που μεταφέρονται μέσω πλοίου την ημέρα από ένα διυλιστήριο σε ένα τερματικό.

x= ο αριθμός από το ανατολικό Σικάγο στο Niles
y= ο αριθμός από το ανατολικό Σικάγο στο Des Plaines
z= ο αριθμός από το Χάμοντ στο Niles
t= ο αριθμός από το Χάμοντ στο Des Plaines
c= το ολικό κόστος

Πίνακας 1

Από		Ανατολικό Σικάγο		Χάμοντ		Περιορισμένη
Προς		Niles	Des Plaines	Niles	Des Plaines	αξία
Παράγονται από	Α.Σ	1	1	0	0	50
	Χ	0	0	1	1	120
Χρειάζονται από	Α.Σ	1	0	1	0	70
	Χ	0	1	0	1	100
Κόστος		8	16	14	7	

Τα δεδομένα μας παίρνουν την μορφή

Ελαχιστοποίηση της $c = 8x + 16y + 14z + 7t$ υπό περιορισμούς

$$
\begin{aligned}
x + y \quad\quad &\geq 50\\
z + t &\geq 120\\
x + \quad z \quad &\geq 70\\
y \quad + t &\geq 100\\
x, y, z, t &\geq 0
\end{aligned}
$$

Παρατηρούμε ότι το πρόβλημα μας δεν βρίσκεται σε κανονική μορφή.Θα εκφράσουμε τα δεδομένα σε μορφή πινάκων

Ελαχιστοποίηση της $c = RX$ υπό περιορισμούς

$$AX \geq C$$
$$X \geq 0$$

Με $R = [\,8\ 16\ 14\ 7\,]$ $\quad X = [x \quad y \quad z \quad t]^T$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = [50\ 120\ 70\ 100]^T$$

Με R', A', C' τους ανάστροφους πίνακες και τον U = [u υ w r] T λαμβάνουμε το Dual πρόβλημα

Μεγιστοποίηση της $c = C'U$ υπό περιορισμούς

$$A'U \geq R'$$

Ο αντίστοιχος Simplex πίνακας είναι

1	0	1	0	1	0	0	0	0	8
1	0	0	1	0	1	0	0	0	16
0	1	1	0	0	0	1	0	0	14
0	1	0	1	0	0	0	1	0	7
-50	-120	-70	-100	0	0	0	0	1	0

Το πιο αρνητικό στοιχείο στην τελευταία σειρά είναι το -120 .Οι λόγοι στη δεύτερη στήλη θα είναι 7/1 και 14/1 , οπότε το στοιχείο οδηγός θα είναι το (4,2)=1.

Μετά από διαδικασία οδήγησης προκύπτει ο πίνακας

1	0	1	0	1	0	0	0	0	8
1	0	0	1	0	1	0	0	0	16
0	0	1	-1	0	0	1	-1	0	7
0	1	0	1	0	0	0	1	0	7
-50	0	-70	20	0	0	0	120	1	840

Το πιο αρνητικό στοιχείο στην τελευταία σειρά είναι το -70 .Οι λόγοι στη τρίτη στήλη θα είναι 7/1 και 8/1 , οπότε το στοιχείο οδηγός θα είναι το (3,3)=1.

Μετά από νέα διαδικασία οδήγησης προκύπτει ο πίνακας

1	0	0	1	1	0	-1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	0	0	0	16
0	0	1	-1	0	0	1	-1	0	7
0	1	0	1	0	0	0	1	0	7
-50	0	0	-50	0	0	70	50	1	1330

Το πιο αρνητικό στοιχείο στην τελευταία σειρά είναι το -50 .Οι λόγοι στη πρώτη στήλη θα είναι 1/1 και 16/1 , οπότε το στοιχείο οδηγός θα είναι το (1,1)=1.

Μετά από νέα διαδικασία οδήγησης προκύπτει ο πίνακας

1	0	0	1	1	0	-1	1	0	1
0	0	0	0	-1	1	1	-1	0	15
0	0	1	-1	0	0	1	-1	0	7
0	1	0	1	0	0	0	1	0	7
0	0	0	0	50	0	20	100	1	1380

Ο έλεγχος μέγιστης τιμής είναι σωστός και η λύση είναι c = 1380. Αυτό σημαίνει ότι το ελάχιστο κόστος για την Shell υπό τους δοθέντες περιορισμούς είναι $1380 (ανά μίλι και ανά 1000 βυτία). Οι τιμές των μεταβλητών θα αναζητηθούν στην τελευταία σειρά στις κατειλημμένες θέσεις από τις χαλαρές μεταβλητές. Οπότε θα έχουμε x=50 , y=0, z=20 και t=100. Αυτό σημαίνει ότι η Shell θα επιτύχει το ελάχιστο κόστος με την μεταφορά μέσω πλοίου 50 χιλιάδων βυτίων από το ανατολικό Σικάγο στο Niles, κανένα από το ανατολικό Σικάγο στο Des Plaines, 20 χιλιάδων βυτίων από το Χάμοντ στο Niles και 100 χιλιάδων βυτίων από το Χάμοντ στο Des Plaines.