ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

Νοέμβριος 2006
Αθήνα

Κεφάλαιο 1º

Εισαγωγή στο Γραμμικό Προγραμματισμό

1.1 Προβληματική του γραμμικού προγραμματισμού

Ο γραμμικός προγραμματισμός (αγγλ: linear programming) αποτελεί αναμφίβολα το δημοφιλέστερο μοντέλο στο χώρο της επιχειρησιακής έρευνας αλλά και της διοικητικής επιστήμης (αγγλ: management science) γενικότερα. Η μεγάλη επιτυχία που είχαν σε εφαρμογές του σε προβλήματα λήψης αποφάσεων των ιδιωτικών και δημόσιων επιχειρήσεων και οργανισμών αποδίδεται, από τη μια πλευρά στα επιτεύγματα της έρευνας μαθηματικών και οικονομολόγων σε θεωρητικό επίπεδο και από την άλλη πλευρά στην επαναστατική ανέλιξη της πληροφορικής επιστήμης και τεχνολογίας. Κυριαρχεί σήμερα η αντίληψη ότι, τρεις στις τέσσερις εφαρμογές μοντέλων επιχειρησιακής έρευνας σε πραγματικά προβλήματα διοίκησης παραπέμπουν στο γραμμικό προγραμματισμό (Γ.Π.).

Ο Γ.Π. χρησιμοποιείται από τους επιχειρησιακούς ερευνητές ή τους αναλυτές προβλημάτων απόφασης για τη προσέγγιση προβλημάτων κατανομής περιορισμένων πόρων ή μέσων σε εναλλακτικές και ανταγωνιστικές μεταξύ τους δραστηριότητες κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο. Πρόκειται για το γνωστό πρόβλημα κατανομής της “πίτας” (resource allocation problem). Προβλήματα απόφασης αυτής της μορφής είναι, για παράδειγμα, η κατανομή εργατικού δυναμικού, τεχνολογικού εξοπλισμού και πρώτων υλών σε διάφορες παραγωγικές διαδικασίες, η κατανομή κεφαλαίου σε διάφορα επενδυτικά προγράμματα, η ανάθεση σε περιορισμένο προσωπικό διαφόρων υπηρεσιών, η κατανομή καλλιεργήσιμης γης σε διάφορες αγροτικές δραστηριότητες, κ.λπ. Επιδιωκόμενο αποτέλεσμα αυτών τον αποφάσεων (κριτήρια απόφασης) μπορεί να αφορά τη μεγιστοποίηση του συνολικού κέρδους από πωλήσεις, την ελαχιστοποίηση του συνολικού κίστους παραγωγής, τη μεγιστοποίηση της απασχόλησης, την ελαχιστοποίηση των αρνητικών επιπτώσεων στο περιβάλλον, κ.λπ.

1.2 Μαθηματικοί ορισμοί

Στη μαθηματική γλώσσα, ο Γ.Π. είναι ένα μαθηματικό μοντέλο στο οποίο επιχειρείται η βελτιστοποίηση (κριτήρια βελτιστοποίησης) αγνώστων πραγματικών μεταβλητών των οποίων το πεδίο τιμών οριοθετείται έμμεσα από γραμμικούς περιορισμούς (ανισοεξισώσεις) συναρτήσεις των μεταβλητών αυτών. Οι άγνωστες μεταβλητές προσδιορίζουν (μοντελοποιούν) το αντικείμενο απόφασης του προβλήματος και ονομάζονται για το σκοπό αυτό ***μεταβλητές απόφασης*** (decision variables).

Η θεωρία του Γ.Π. μέχρι τις αρχές της δεκαετίας του 70, εξελίχθηκε ως μεθοδολογία βελτιστοποίησης ενός και μόνου κριτηρίου απόφασης με την ονομασία ***αντικειμενική συνάρτηση*** (objective function). Όμως, η πολυπλοκότητα των συστημάτων απόφασης καθώς και οι συνθήκες ανταγωνιστικότητας κάτω από τις οποίες παίρνονται οι αποφάσεις καθιστούν τη προσέγγιση αυτή κάθε άλλο παρά ρεαλιστική. Γι' αυτό και αναπτύχθηκε η θεωρία του Γ.Π. με ***πολλαπλά κριτήρια απόφασης*** (πολυκριτήριος Γ.Π.) Από την άλλη πλευρά πάλι, αυτή η γενίκευση δεν θα μπορούσε να υλοποιηθεί χωρίς τα αποτελέσματα που έφερε ο κλασικός μονοκριτήριος Γ.Π.

Αναλυτικά, ένα μονοκριτήριο πρόγραμμα ορίζεται ως εξής:

Να προσδιοριστούν οι τιμές των μεταβλητών $(x_1, x_2, ..., x_l)$ που βελτιστοποιούν (μεγιστοποιούν ή ελαχιστοποιούν) τη γραμμική αντικειμενική συνάρτηση (κριτήριο βελτιστοποίησης):

$$g(x) = z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_lx_l$$

υπό τους γραμμικούς περιορισμούς:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1l}x_l \leq, =, \geq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2l}x_l \leq, =, \geq b_2$$

… … … … … … … … … … … …

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{ml}x_l \leq, =, \geq b_m$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, ..., x_l \geq 0$$

όπου το πρόσημο ενός περιορισμού είναι εναλλακτικά: μικρότερο ή ίσο "$\leq$", ίσο '$=$' ή μεγαλύτερο ή ίσο "$\geq$" και $a_{ij}, b_i, c_j,$ για i=1,2,…,m και j=1,2,…,l είναι γνωστοί πραγματικοί συντελεστές. Οι περιορισμοί (1.3) είναι συμβατικοί και αποδίδουν (μοντελοποιούν) τη συνήθη φυσική σημασία των μεταβλητών απόφασης.

Με τη βοήθεια μητρών, ένα γραμμικό πρόγραμμα μπορεί να γραφεί συνοπτικά ως ακολούθως:

Να βρεθεί διάνυσμα x για το οποίο έχουμε:

$$[\max] or [\min] z = c^t x$$

υπό τους περιορισμούς

$$\mathbf{A}x \le b$$
$$x \ge 0$$

Όπου $\mathbf{A}$, η μήτρα των συντελεστών $\left(a_{ij}\right)$ διαστάσεων $m \times l$ και $\mathbf{b,c,x}$ διανύσματα - μήτρες αντίστοιχων διαστάσεων $m \times l,\, l \times 1,\, l \times 1$ και $\mathbf{c}^{\mathbf{t}}$ η ανάστροφη μήτρα της $\mathbf{c}$. Ένα τέτοιο γραμμικό πρόγραμμα είναι διαστάσεων $m \times l$ (δεν υπολογίζονται οι περιορισμοί μη αρνητικότητας).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2l} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ml} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_l \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_l \end{bmatrix}$$

Σχήμα 1.1: Μήτρες συντελεστών ενός προβλήματος Γ.Π.

Κανονική μορφή ενός γραμμικού προγράμματος

Ένα Γ.Π. απαντάται συνήθως υπό την κανονική του μορφή (canonical form), η οποία έχει μια από τις δυο παρακάτω μαθηματικές εκφράσεις:

$$\begin{array}{lcl} [\max] z = \mathbf{c}^{\mathbf{t}} x & & [\min] z = \mathbf{c}^{\mathbf{t}} x \\ \textbf{υ.π.} & \textbf{(1.5)} & \textbf{υ.π.} \\ \mathbf{A}x \le \mathbf{b} & & \mathbf{A}x \le \mathbf{b} \\ x \ge 0 & & x \ge 0 \end{array}$$

Πρότυπη μορφή ενός Γ.Π.

$$\begin{array}{l} [\max] z = \mathbf{c}^{\mathbf{t}} x \\ \textbf{υ.π.} \\ \mathbf{A}x = \mathbf{b} \\ x \ge 0 \end{array} \qquad \textbf{(1.6)}$$

1.3 Παράδειγμα αναφοράς

Ας εξετάσουμε το παρακάτω πρόβλημα το οποίο προσεγγίζεται με τη βοήθεια μοντέλου Γ.Π.

Οινοποιείο παράγει δύο τύπους οίνου "λευκό" και "ερυθρό". Η έρευνα αγοράς περιορίζει την παραγωγή "λευκού" οίνου σε 8 τόνους/χρόνο και του "ερυθρού" σε 6 τόνους/χρόνο.

Πίνακας 1.1

Δεδομένα παραδείγματος αναφοράς

Ποικιλίες σταφυλιών	Λευκός Οίνος (τόνοι)	Ερυθρός Οίνος (τόνοι)	Διαθέσιμες Ποσότητες (τόνοι/χρόνο)
Ροδίτης	1	2	15
Αγιωργίτικο	2	1	18
Μοναδιαίο Κέρδος (€)	4	3	

Για την παραγωγή των συγκεκριμένων οίνων χρησιμοποιούνται δυο ποικιλίες σταφυλιών το "Ροδίτης" και το "Αγιωργίτικο". Οι ποσότητες των ποικιλιών και τα οικονομικά στοιχεία δίνονται στον πίνακα 1.1: για τη παραγωγή 1 τόνου λευκού οίνου απαιτούνται 1 τόνος "Ροδίτης" και 2 τόνοι "Αγιωργίτικο", ενώ για την παραγωγή 1 τόνου ερυθρού απαιτούνται 2 τόνοι "Ροδίτης" και 1 τόνος "Αγιωργίτικο" .

Τέλος, η πώληση ενός τόνου λευκού αφήνει καθαρό κέρδος 4 χιλιάδες ευρώ ενώ το καθαρό κέρδος για το ερυθρό είναι 3 χιλιάδες ευρώ.

Κατασκευή μοντέλου Γ.Π.(μοντελοποίηση)

Για την κατασκευή ενός μοντέλου Γ.Π. θα ακολουθήσουμε την ακόλουθη διαδικασία:

Αντικείμενο απόφασης

Το πρόβλημα που απασχολεί την διεύθυνση του οινοποιείου έχει να κάνει με τον προσδιορισμό εκείνης της κατανομής της παραγωγής στους δύο τύπους οίνου ώστε να μεγιστοποιείται το συνολικό ετήσιο κέρδος από τις πωλήσεις. Άρα, το αντικείμενο της απόφασης ορίζεται απόλυτα ως πρόβλημα υπολογισμού της στάθμης της ετήσιας παραγωγής των δύο τύπων οίνου.

Ας χρησιμοποιήσουμε λοιπόν δύο μεταβλητές x_1, x_2 απόφασης για να μορφοποιήσουμε το μοντέλο του Γ.Π. (βλ. σχήμα 1.2)

x_1: ετήσια παραγωγή λευκού οίνου (τόνοι/χρόνο)

x_2 : ετήσια παραγωγή ερυθρού οίνου (τόνοι/χρόνο)

Ας θεωρήσουμε, παρενθετικά, δύο λύσεις που πηγάζουν από την διαίσθηση:

Κάλυψη κατά 100% της ζήτησης του λευκού οίνου , $\left(x_1 = 8\right)$. Τότε απομένουν τα εξής αποθέματα σταφυλιών:

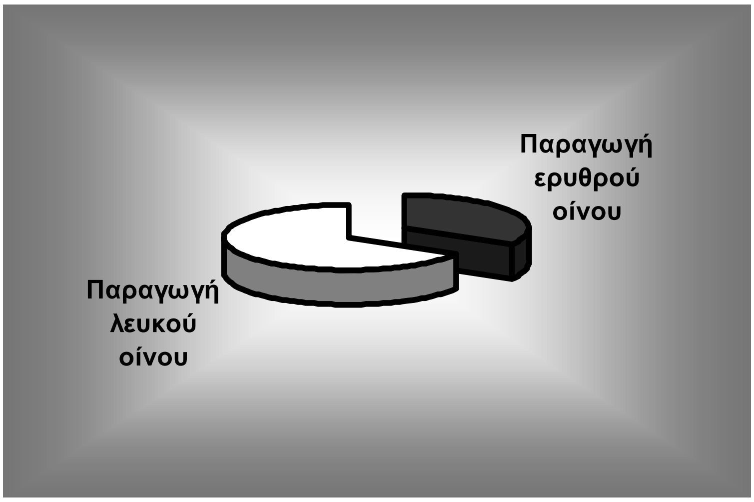
"Ροδίτης" : $15 - \left(1 \times 8\right) = 7$ τόνοι

"Αγιωργίτικο" : $18 - \left(2 \times 8\right) = 2$ τόνοι

Μπορεί λοιπόν να παραχθεί τόση ποσότητα ερυθρού οίνου όση και το ελάχιστο μεταξύ 7/2 και 2/1 μέχρι εξάντλησης ενός εκ των δυο αποθεμάτων σταφυλιών, άρα $x_2 = 2$. Η λύση αυτή $\left(x_1 = 8, x_2 = 2\right)$ αποφέρει συνολικό ετήσιο κέρδος $4 \times 8 + 3 \times 2 = 38$ χιλιάδες ευρώ.

Κάλυψη κατά 100% της ζήτησης του ερυθρού οίνου $x_2 = 6$. Με ανάλογο τρόπο καταλήγουμε στη λύση $\left(x_1 = 3, x_2 = 6\right)$ η οποία είναι χειρότερη από τη προηγούμενη, αφού αφήνει ετήσιο κέρδος $4 \times 3 + 3 \times 6 = 30$ χιλιάδες ευρώ.

Ας οριοθετήσουμε τώρα το σύνολο της παραγωγής, δηλαδή τη πίτα του σχήματος 1.2,γράφοντας μια σειρά από μαθηματικούς περιορισμούς, συναρτήσεις των x_1, x_2:



Σχήμα 1.2: Κατανομή της "πίτας" παραγωγής

Περιορισμοί ζήτησης

$x_1 \leq 8$ τόνοι λευκού /έτος

$x_2 \leq 6$ τόνοι ερυθρού /έτος

Τεχνολογικοί περιορισμοί

Πρόκειται για περιορισμούς που οφείλονται στην ετήσια διαθεσιμότητα των ποικιλιών σταφυλιού. Για την ποικιλία "Ροδίτης", για παράδειγμα, ισχύει: η παραγωγή x_1 τόνων λευκού οίνου και η παραγωγή x_2 τόνων ερυθρού οίνου καταναλίσκουν $1 \times x_1 + 2 \times x_2$ τόνους "Ροδίτης" /έτος και αυτή η απορρόφηση δε μπορεί να υπερβαίνει τους 15 τόνους ετησίως. Έτσι, γράφουμε:

$x_1 + 2x_2 \leq 15$ τόνους "Ροδίτης" /έτος

$2x_1 + x_2 \leq 18$ τόνους "Αγιωργίτικο" /έτος

Φυσικοί περιορισμοί

Τα μεγέθη x_1 και x_2 δεν μπορούν να πάρουν αρνητικές τιμές:

$x_1 \geq 0$ τόνοι λευκού /έτος

$x_2 \geq 0$ τόνοι ερυθρού /έτος

Συμπερασματικά, το σύνολο των δυνατών τιμών που μπορούν να πάρουν οι μεταβλητές οριοθετείται απόλυτα από το σύνολο:

$$\mathrm{A} = \left\{ x \in \mathbf{R}^2 / \mathbf{A}x \leq \mathbf{b}, x \geq 0 \right\}$$

Το σύνολο των τεσσάρων ανισοτήτων γράφεται:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 15 \\ 18 \end{bmatrix}$$

Κριτήριο βελτιστοποίησης

Η διεύθυνση εργοστασίου έχει εκφράσει τις προτιμήσεις της για τη φυσιογνωμία της αναζητούμενης λύσης: κριτήριο επιλογής λύσης από το σύνολο Α είναι το **συνολικό ετήσιο κέρδος** από τις πωλήσεις των προϊόντων, κριτήριο το οποίο οφείλει να μεγιστοποιηθεί.

Το κριτήριο αυτό (αντικειμενική συνάρτηση), συναρτήσει των μεταβλητών απόφασης, γράφεται:

$$\boxed{g(\chi) = z = 4\chi_1 + 3\chi_2}$$

Αναζητούμε λοιπόν τη λύση χ^* για την οποία ισχύει: $g(\chi^*) \geq g(\chi)$ για κάθε $\chi \in A$, εκείνη δηλαδή τη λύση από το σύνολο Α που μεγιστοποιεί το κριτήριο. Αυτό στο εξής, για την περίπτωση που το κριτήριο είναι ένα και μοναδικό, θα γράφεται:

$$\max[z] = 4\chi_1 + 3\chi_2$$

Τελική διαμόρφωση του μοντέλου Γ.Π.

Το τελικό μοντέλο Γ.Π. διαμορφώνεται ως ακολούθως:

$$\max[z] = 4\chi_1 + 3\chi_2$$

υπό τους περιορισμούς:

$x_1 \leq 8$ τόνοι λευκού /έτος

$x_2 \leq 6$ τόνοι ερυθρού /έτος

$x_1 + 2x_2 \leq 15$ τόνους "Ροδίτης" /έτος

$2x_1 + x_2 \leq 18$ τόνους "Αγιωργίτικο" /έτος

$x_1 \geq 0$ τόνοι λευκού /έτος

$x_2 \geq 0$ τόνοι ερυθρού /έτος

Παρατήρηση

Η επίλυση του παραπάνω μοντέλου πραγματοποιείται, τόσο με τη γραφική μέθοδο, στην οποία θα αναφερθούμε παρακάτω, όσο και με τη μέθοδο simplex.

Η βέλτιστη λύση που μεγιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση Z είναι η λύση: $\chi_1^* = 7$ και $\chi_2^* = 4$ που αποφέρει $z = 40$. Πρέπει λοιπόν να παράγονται ετησίως, 7 τόνοι λευκού οίνου και 4 τόνοι ερυθρού οίνου με μέγιστο κέρδος 40.000 € Το εργοστάσιο απορροφά κατά 100% τα αποθέματα σταφυλιών (μπορεί κανείς να το επαληθεύσει αντικαθιστώντας τη βέλτιστη λύση στους αντίστοιχους περιορισμούς), δεν καλύπτει όμως τη ζήτηση της αγοράς λόγω ακριβώς της έλλειψης πρόσθετων αποθεμάτων .

1.4 Μεθοδολογία και διαδικασία μοντελοποίησης

Το μεθοδολογικό πλαίσιο κατά το οποίο μοντελοποιείται, διαμορφώνεται μαθηματικά δηλαδή, ένα πρόβλημα απόφασης ως πρόβλημα Γ.Π. μπορεί να παρασταθεί από το οργανόγραμμα του σχήματος 1.3.

Στάδιο 1°: Αντικείμενο της απόφασης

Πρώτο στάδιο της μοντελοποίησης είναι **ο καθορισμός των μεταβλητών απόφασης.** Αυτές οι τελευταίες οφείλουν να αντανακλούν απόλυτα (μοντελοποιούν) το ζητούμενο της απόφασης, μέσα από τις ανάγκες του περιβάλλοντος στο οποίο θα παρθεί η απόφαση και σύμφωνα με τις αξίες μιας κοινωνίας (αναβάθμιση των συνθηκών εργασίας, καθαρό φυσικό περιβάλλον, ...).

Το αντικείμενο της απόφασης ολοκληρώνεται με τον προσδιορισμό του συνόλου των λύσεων $\mathrm{A} = \left\{ x \in \mathbf{R}^{\ell} / \mathbf{A}x \leq \mathbf{b}, x \geq 0 \right\}$ μετά από τη διαμόρφωση περιορισμών που είναι γραμμικές συναρτήσεις των μεταβλητών απόφασης. Το τετράπτυχο: τεχνολογία-περιβάλλον-πόροι-προτιμήσεις είναι η κατ' εξοχή πηγή των έμμεσων επιτρεπτών ορίων μέσα στα οποία "κινούνται" οι τιμές των μεταβλητών απόφασης.

Στάδιο 2°: Κριτήρια απόφασης

Στο δεύτερο στάδιο, ο αναλυτής του προβλήματος (μοντελοποιός) οφείλει να διαμορφώσει γραμμικές αντικειμενικές συναρτήσεις (των μεταβλητών απόφασης **x**) σύμφωνα με τους στόχους της επιχείρησης ή του οργανισμού καθώς και τις προτιμήσεις των αποφασιζόντων (μεγιστοποίηση κέρδους, παραγωγικότητας, ελαχιστοποίηση ρύπανσης του περιβάλλοντος, ...).

Τα κριτήρια αυτά έχουν τη μορφή:

$$[\max] g_1(x) = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1l}x_l$$

$$[\max] g_2(x) = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \ldots + c_{2l}x_l$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$[\max] g_n(x) = c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \ldots + c_{nl}x_l$$

Όπου ***n*** ο αριθμός των κριτηρίων και είναι η μήτρα των συντελεστών των αντικειμενικών συναρτήσεων.

Στάδιο 3°: Μοντέλα απόφασης

Το τρίτο στάδιο της διαδικασίας αυτής είναι καθαρά τεχνικό. Ο αναλυτής χρησιμοποιεί μια σειρά από αλγορίθμους και συναφείς τεχνικές για την επίτευξη "καλών" λύσεων και την τεκμηρίωση των λύσεων αυτών.

Σε προβλήματα καθαρής βελτιστοποίησης, όταν το κριτήριο βελτιστοποίησης είναι ένα και μοναδικό, χρησιμοποιείται ως βασικό εργαλείο επίτευξης βέλτιστης λύσης ο περίφημος αλγόριθμος simplex του Denting. Σε πολύ-κριτήρια μοντέλα Γ.Π. χρησιμοποιούνται πιο εξειδικευμένες μέθοδοι από τις οποίες οι περισσότερες βασίζονται πάλι στη μέθοδο simplex . Στην τελευταία αυτή περίπτωση, πρέπει να επισημανθεί ότι η έννοια της βέλτιστης λύσης χάνει τη σημασία της, αφού μια λύση που βελτιστοποιεί μια αντικειμενική συνάρτηση δεν είναι βέλτιστη ως προς τις άλλες.

Στις πρακτικές εφαρμογές, ο αναλυτής οφείλει σε κάθε περίπτωση να επεξεργαστεί σε βάθος τα στοιχεία επίλυσης που του παρέχει η μέθοδος simplex. Τεχνικές που συμβάλλουν αποτελεσματικά στην ανάλυση αυτή είναι οι παρακάτω:

- ανάπτυξη της λύσης (ερμηνεία των δυικών μεταβλητών)
- ανάλυση ευαισθησίας
- παραμετρική ανάλυση
- ανάλυση ευστάθειας

Στάδιο 4°: Υποστήριξη της απόφασης

Στο στάδιο αυτό ο αναλυτής προσπαθεί να πείσει τον αποφασίζοντας για την "αξία" μιας λύσης (βλ. σχήμα 1.3). Σε περίπτωση που η λύση και οι επιπτώσεις της στο περιβάλλον που θα παρθεί η απόφαση δεν ικανοποιούν τον αποφασίζοντας, θα πρέπει να αναθεωρηθεί ένας ή περισσότεροι από τους παράγοντες: τεχνολογία (ανακαίνιση τεχνολογικού εξοπλισμού, ...), περιβάλλον (βελτίωση συνθηκών εργασίας, ...), πόροι (αύξηση προϋπολογισμού, νέες προμήθειες πρώτων υλών,…), προτιμήσεις (αλλαγή πολιτικής: προσθήκη νέων αντικειμενικών συναρτήσεων,…)

1.5 Συνθήκες εφαρμογής και τυπολογία μοντέλων Γ.Π.

Για να είναι θεμιτή η προσέγγιση ενός προβλήματος απόφασης μέσω ενός κλασικού μοντέλου Γ.Π. της μορφής (1.4) πρέπει να ισχύουν οι τέσσερις παρακάτω προϋποθέσεις :

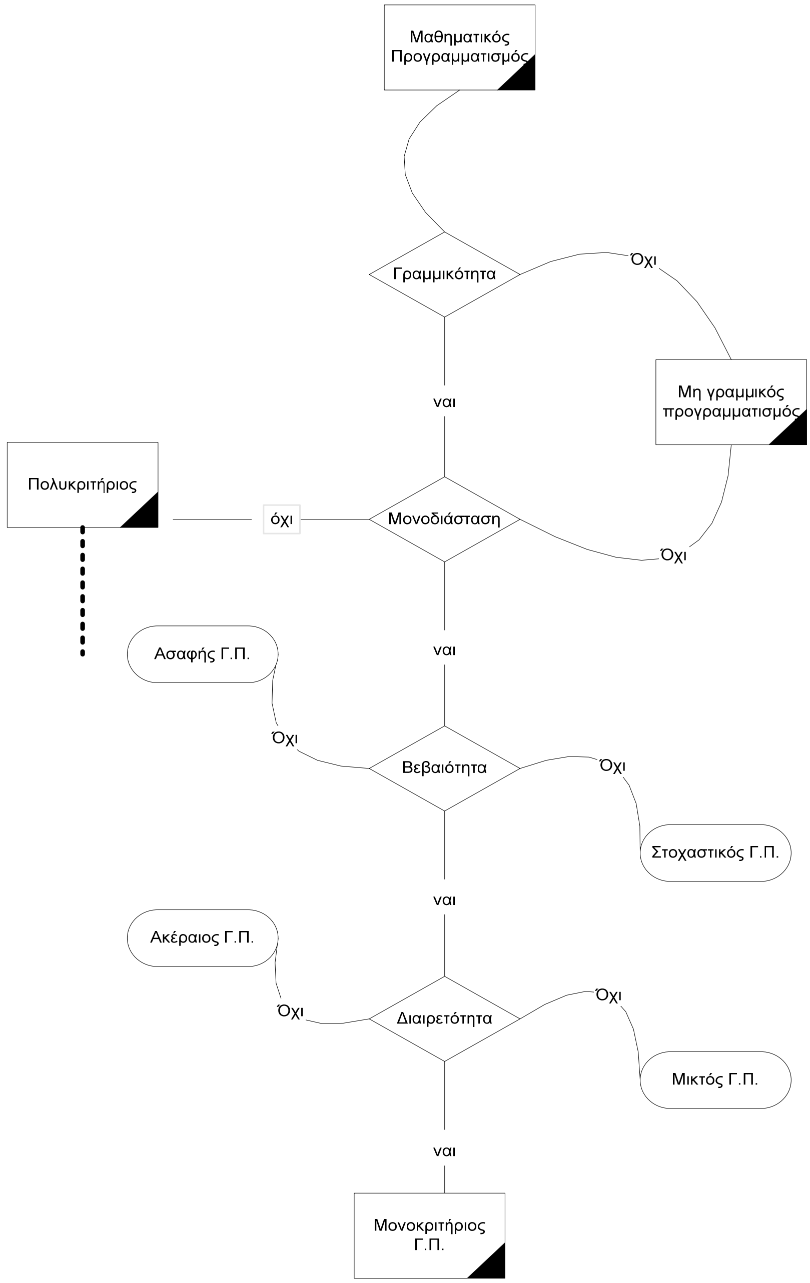
I. **Γραμμικότητα:** Το αποτέλεσμα, είτε αυτό είναι όρος περιορισμού $a_{ij}x_j$ είτε όρος αντικειμενικής συνάρτησης c_jx_j, είναι γραμμική συνάρτηση του αιτίου x_j που το προκαλεί. Στην αντίθετη περίπτωση, για παράδειγμα όταν ισχύει $c_jx_j^2$, το μοντέλο εμπίπτει στο χώρο του **μη γραμμικού προγραμματισμού.**

II. **Διαιρετότητα:** Οι μεταβλητές απόφασης είναι άπειρα διαιρετές, εκφράζονται για παράδειγμα, σε μονάδες μήκους, βάρους, κ.λπ. Σε περίπτωση που οι μεταβλητές δεσμεύονται να πάρουν όλες ακέραιες τιμές, δηλώνουν δηλαδή αριθμό εργατών, αποδοχή ή μη αποδοχή μιας πρότασης, κ.λπ., το πρόβλημα εμπίπτει στην κατηγορία του **ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού** (βλ. κεφάλαιο 2º). Όταν δε δεσμεύονται όλες οι μεταβλητές να πάρουν ακέραιες τιμές, αλλά μόνο μερικές από αυτές, το πρόβλημα ανήκει στην κατηγορία του **μικτού γραμμικού προγραμματισμού.**

III. **Βεβαιότητα:** Τα δεδομένα του προβλήματος, τα αριθμητικά στοιχεία δηλαδή των μήτρων $\boldsymbol{A,b,c}$ είναι γνωστά με απόλυτη βεβαιότητα. Όταν ορισμένα από αυτά δεν είναι γνωστά με βεβαιότητα, αλλά ακολουθούν γνωστούς στατιστικούς νόμους, ο προγραμματισμός λέγεται **στοχαστικός** (stochastic programming). Τέλος, όταν η πληροφορία για κάποιους συντελεστές είναι προσεγγιστική, είναι δηλαδή διαστήματα στα οποία ανήκουν ασαφώς οι συντελεστές αυτοί, ο προγραμματισμός λέγεται **ασαφής** (fuzzy programming).

IV. **Μονοδιάστατη:** Η περίπτωση αυτή, για την οποία έγινε λόγος παραπάνω, αφορά το πλήθος των αντικειμενικών συναρτήσεων που μοντελοποιούν τους στόχους του προβλήματος απόφασης. Στον κλασικό Γ.Π. η αντικειμενική συνάρτηση πρέπει να είναι μια και μοναδική (μονοδιάστατος ή μονοκριτήριος Γ.Π.). Στην αντίθετη περίπτωση, το πρόβλημα ανήκει στην κατηγορία του πολυκριτήριου Γ.Π. (multicriteria or multi objective linear programming).

Συνδυασμός των παραπάνω κατηγοριοποιήσεων οδηγεί στο σχήμα 1.4, πράγμα που δείχνει τον πλούτο του επιστημονικού αντικειμένου του μαθηματικού προγραμματισμού. Φυσικά, η ίδια κατηγοριοποίηση μοντέλων που γίνεται για τον Γ.Π. ισχύει για τον πολυκριτήριο και τον μη γραμμικό προγραμματισμό, μόνο που οι σχετικές θεωρίες δεν έχουν ακόμα εμβαθύνει με ρυθμούς ανάλογους του κλασικού Γ.Π.



Σχήμα 1.4: Κατηγοριοποίηση προβλημάτων μαθηματικού προγραμματισμού

1.6 Γραφική μέθοδος

1.6.1 Γραφική επίλυση Γ.Π. σε 2 διαστάσεις

Η επίλυση ενός Γ.Π. απαιτεί γενικά την ύπαρξη ηλεκτρονικού υπολογιστή και κατάλληλου λογισμικού (βλ. κεφάλαιο 3º). Όταν όμως ένα Γ.Π. είναι δισδιάστατο, έχει δηλαδή 2 μεταβλητές απόφασης ή το πολύ τρισδιάστατο μπορεί να επιλυθεί γραφικά.

Για το σκοπό αυτό, αρκεί να σχεδιαστεί προσεκτικά το σύνολο των περιορισμών του Γ.Π., ώστε να οριοθετηθεί το σύνολο των δυνατών λύσεων ***A*** και να καθοριστεί η έννοια βελτιστοποίησης της αντικειμενικής συνάρτησης. Βασικό ρόλο στη μέθοδο αυτή παίζει η εποπτεία.

Η μέθοδος περιλαμβάνει τρία διαδοχικά βήματα:

1) Σχεδίαση όλων ανεξαίρετα των περιορισμών ώστε να καθοριστεί απόλυτα το σύνολο ***A*** των δυνατών λύσεων.
2) Σχεδίαση της αντικειμενικής συνάρτησης *Ζ* για μια συγκεκριμένη τιμή του Ζ και καθορισμός της έννοιας βελτιστοποίησης.
3) Παράλληλη μετατόπιση της αντικειμενικής συνάρτησης κατά την έννοια βελτιστοποίησης, βελτιώνοντας προοδευτικά την τιμή του z, μέχρις ότου προσδιοριστεί η βέλτιστη ή οι βέλτιστες λύσεις.

1.6.2 Παραδείγματα

Παράδειγμα αναφοράς

Ας θεωρήσουμε ξανά το δισδιάστατο παράδειγμα αναφοράς της §1.3. Η καθαρά μαθηματική του μορφή δίνεται από τους τύπους (1.10) - (1.15).

$$\max\left[z\right] = 4\chi_1 + 3\chi_2 \quad (1.10)$$

υπό τους περιορισμούς:

$$x_1 \le 8 \quad (1.11)$$

$$x_2 \le 6 \quad (1.12)$$

$$x_1 + 2x_2 \le 15 \quad (1.13)$$

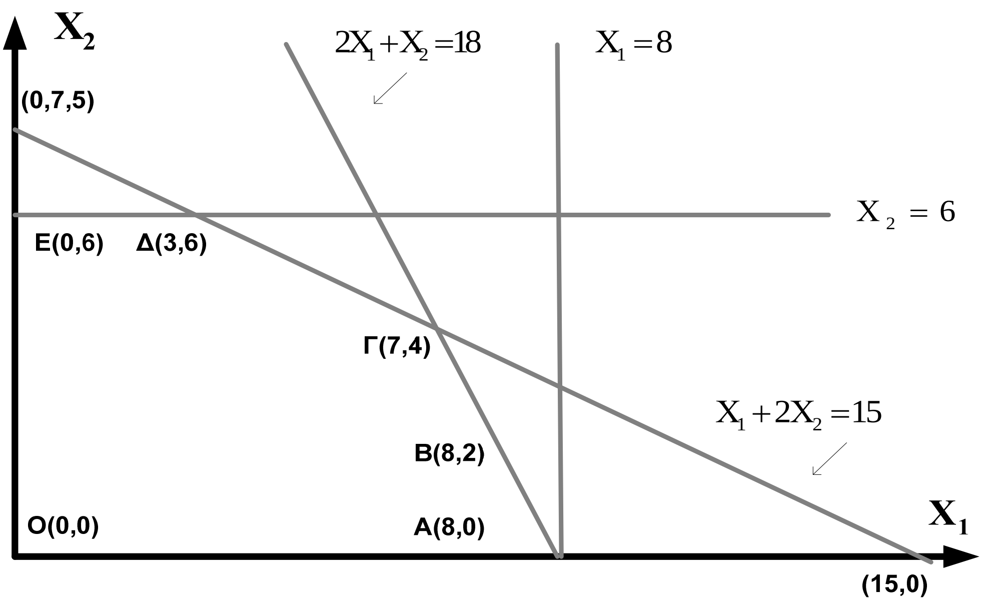
$$2x_1 + x_2 \le 18 \quad (1.14)$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \quad (1.15)$$

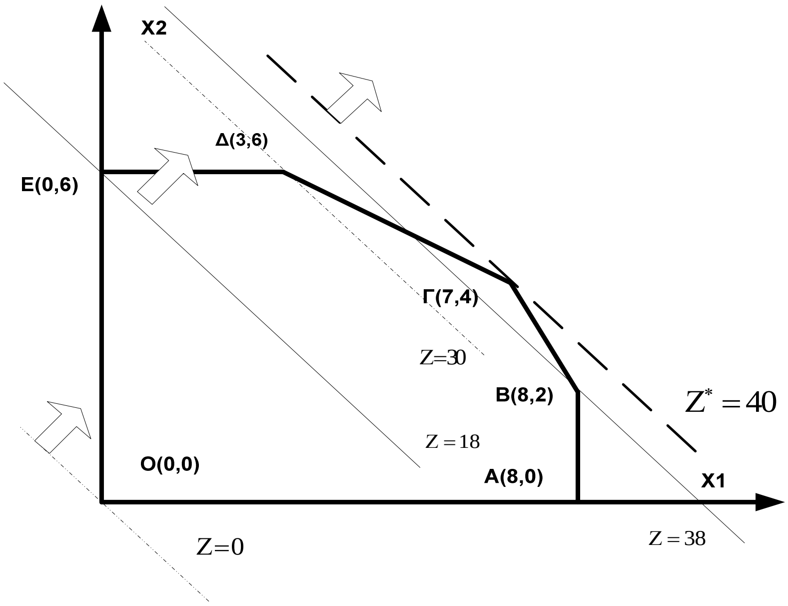
Βήμα 1

Σε σύστημα ορθογωνίων συντεταγμένων στο επίπεδο, κάθε περιορισμός μετατρεπόμενος σε ισότητα, σχεδιάζεται με μια ευθεία. Η αντίστοιχη ανισότητα διαιρεί το επίπεδο σε δύο ημιεπίπεδα, εκείνο το οποίο επαληθεύει την ανισότητα και εκείνο το οποίο δεν την επαληθεύει.

Στο σχήμα 1., έχουν χαραχθεί οι 6 περιορισμοί (1.11) - (1.15) του παραδείγματος και έχουν γραμμοσκιαστεί τα ημιεπίπεδα τα οποία δεν τους επαληθεύουν. Το τμήμα του επιπέδου το οποίο επαληθεύει ταυτόχρονα και τους 6 περιορισμούς είναι το πολύγωνο ΟΑΒΓΔΕ και δίνεται στο σχήμα . Οι συντεταγμένες των κορυφών του υπολογίστηκαν από την επίλυση των συστημάτων των εξισώσεων των ευθειών (ανά δύο) που ορίζουν τις κορυφές αυτές.



Σχήμα 1.6.1 Γραφική παράσταση του συνόλου των δυνατών λύσεων



Σχήμα 1.6.2 Μεγιστοποίηση της z με τη γραφική μέθοδο

Βήματα 2 και 3

Η συνάρτηση $z=4x_1+3x_2$ έχει σταθερή κλίση και μπορεί να μετατοπισθεί παράλληλα στο επίπεδο. Αν λοιπόν αυτή διέλθει διαδοχικά από τις κορυφές του πολυγώνου **O(z = 0), E(z = 18), Δ(z = 30), A(z = 32), B(z = 38),Γ(z = 40),** παρατηρούμε ότι, όσο μετατοπίζεται από τα αριστερά προς τα δεξιά (έννοια μεγιστοποίησης) τόσο αυξάνεται η τιμή της. Συνεπώς, η βέλτιστη λύση θα είναι εκείνη η κορυφή ή η πλευρά που θα συναντήσει η αντικειμενική συνάρτηση, κατά τη μετατόπιση της, στο σύνορο μεταξύ του πολυγώνου και του υπόλοιπου επιπέδου των μη δυνατών λύσεων.

Η βέλτιστη λύση του παραπάνω παραδείγματος βρίσκεται λοιπόν στην κορυφή **Γ**, τελευταία κορυφή του πολυγώνου που συναντά η Z κατά την μετατόπιση της, με συντεταγμένες $x_1^*=7, x_2^*=4$ απ' όπου προκύπτει $z^*=40$

1.6.3 Ειδικές περιπτώσεις

Η γραφική μέθοδος προσφέρεται για την καλύτερη κατανόηση διαφόρων περιπτώσεων Γ.Π. στα οποία η βελτιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης είτε δεν είναι δυνατή είτε εκφυλίζεται.

α) Άπειρες βέλτιστες λύσεις

Ας επιλύσουμε γραφικά το παρακάτω Γ.Π.:

$$\max\left[z\right] = 2.000\chi_1 + 2.000\chi_2$$

υπό τους περιορισμούς:

$$x_1 + x_2 \leq 4.000 \text{ ή } x_1 + x_2 \leq 4$$

$$2x_1 + x_2 \leq 7.000 \text{ ή } 2x_1 + x_2 \leq 7$$

$$x_2 \leq 2.000 \text{ ή } \quad x_2 \leq 2$$

$$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0$$

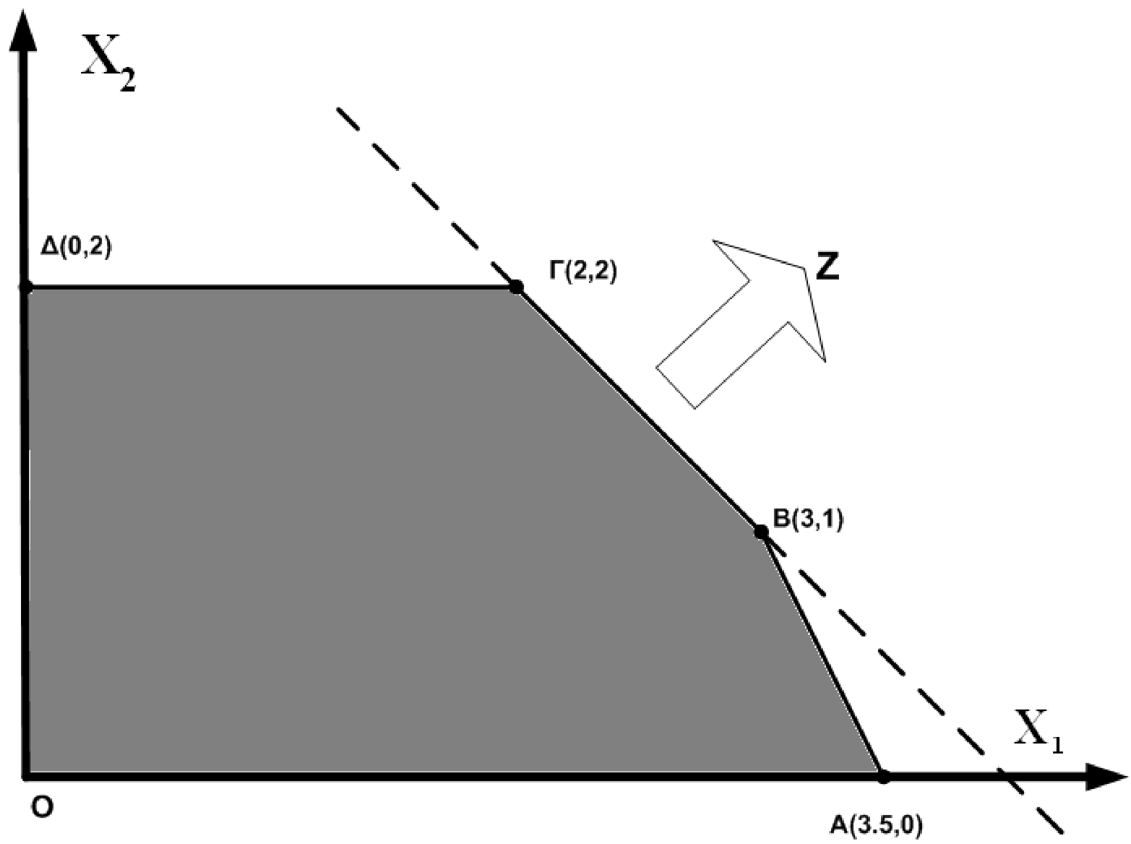
Το σύνολο των δυνατών λύσεων του Γ.Π. δίνεται στο σχήμα 1.6.3, από το γραμμοσκιασμένο πολύγωνο **ΟΑΒΓΔ**. Παρατηρούμε ότι η διεύθυνση της z είναι παράλληλη με την πλευρά **ΒΓ**. Έτσι, η παράλληλη μετατόπιση της z κατά την έννοια μεγιστοποίησης της (βλ. σχήμα) οδηγεί στο σύνορο **ΒΓ** που αποτελεί, ως πλευρά, το σύνολο των βέλτιστων λύσεων του προβλήματος. Κατά συνέπεια, κάθε σημείο της πλευράς **ΒΓ** είναι και μια βέλτιστη λύση του Γ.Π. με z = 8.000.

Κάθε βέλτιστη λύση μπορεί να υπολογιστεί μέσω του κυρτού συνδυασμού των ακραίων λύσεων Β(3,1) και Γ(2,2):

$$x_1^* = a \times 3 + (1-a) \times 2$$

$$x_2^* = a \times 1 + (1-a) \times 2$$

Όπου a πραγματικός αριθμός : $0 \leq a \leq 1$



Σχήμα 1.6.3 Φαινόμενο αστάθειας της βέλτιστης λύσης

Εάν, για παράδειγμα, $a = 0$, η βέλτιστη λύση είναι η κορυφή **Γ** ($x_1^* = 2, x_2^* = 2$), εάν $a = 1$, η κορυφή **Β** και εάν $a = 0,5$, βέλτιστη λύση είναι το μέσον του γραμμικού τμήματος **ΒΓ** με συντεταγμένες: $x_1^* = 2,5, x_2^* = 1,5$.

Η εμπειρία αυτού του παραδείγματος επιβεβαιώνει ένα πολύ σημαντικό αποτέλεσμα του Γ.Π.: **"όταν η βέλτιστη λύση ενός Γ.Π. δεν είναι μια και μοναδική, υπάρχουν άπειρες βέλτιστες λύσεις".** Βρισκόμαστε λοιπόν μπροστά σε ένα φαινόμενο αστάθειας της βέλτιστης λύσης το οποίο πιστοποιείται, είτε λόγω παραλληλίας της αντικειμενικής συνάρτησης με κάποια πλευρά του χώρου των λύσεων, είτε λόγω απειροελάχιστης απόκλισης της, έστω ε, από τη βέλτιστη (μέγιστη) τιμή z, όταν δηλαδή $z^* - \varepsilon < z < z^*$.

β) Ασυμβίβαστοι περιορισμοί (αδύνατο πρόβλημα)

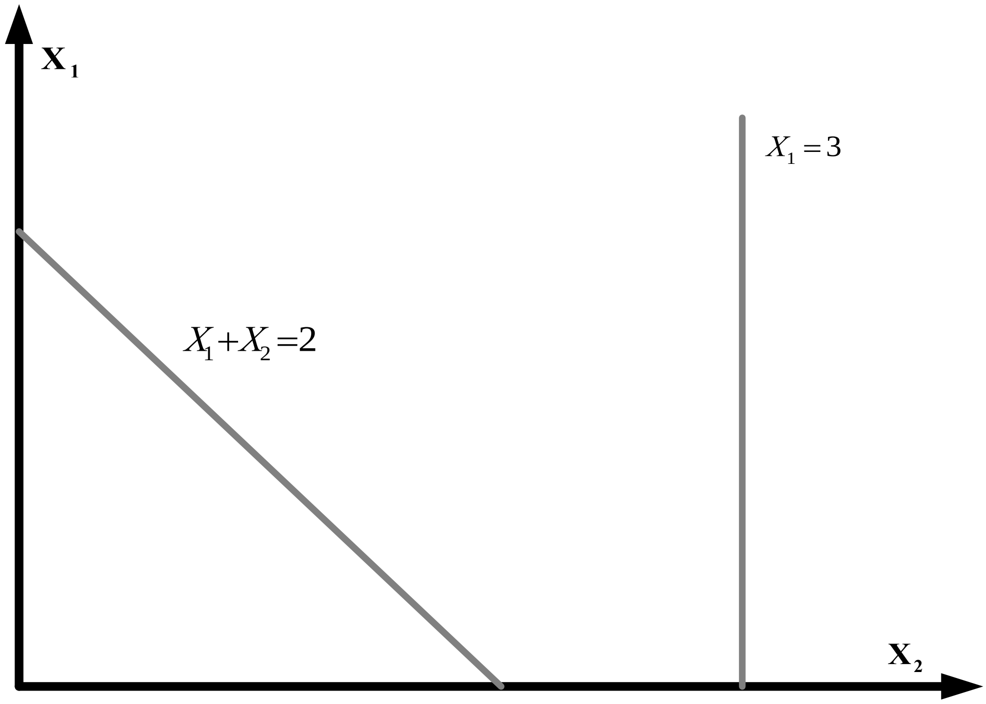
Ας επιλύσουμε γραφικά το ακόλουθο Γ.Π.:

$$\max[z] = 10\chi_1 + 18\chi_2$$

υπό τους περιορισμούς:

$$x_1 + x_2 \le 2$$

$$x_1 \ge 3 \; ή \; x_2 \ge 0$$



Σχήμα 1.6.4 Η περίπτωση ασυμβίβαστων περιορισμών

Στο σχήμα 1.6.4 γίνεται σαφές ότι οι δυο πρώτοι περιορισμοί δεν αφήνουν περιθώρια για την ύπαρξη δυνατών λύσεων, είναι δηλαδή περιορισμοί ασυμβίβαστοι, αλληλοαποκλειόμενοι. Το πρόβλημα λοιπόν δεν έχει καμιά δυνατή λύση και συνεπώς δε μπορεί να υπάρξει βελτιστοποίηση.

Τέτοια προβλήματα παρουσιάζονται στην πράξη από κακούς χειρισμούς των αναλυτών κατά τη διαδικασία μοντελοποίησης ή από υπερβολικές απαιτήσεις των συστημάτων απόφασης (π.χ. κάλυψη υπερβολικής ζήτησης) που επίσης οδηγούν σε υπεροπτικές / λανθασμένες μοντελοποιήσεις.

γ) Μη φραγμένο σύνολο δυνατών λύσεων

Στον αντίποδα της προηγούμενης περίπτωσης βρίσκεται η περίπτωση που το σύνολο των δυνατών λύσεων δεν είναι φραγμένο, πράγμα που αφήνει την αντικειμενική συνάρτηση να βελτιώνεται ανεξέλεγκτα (απειρίζεται).

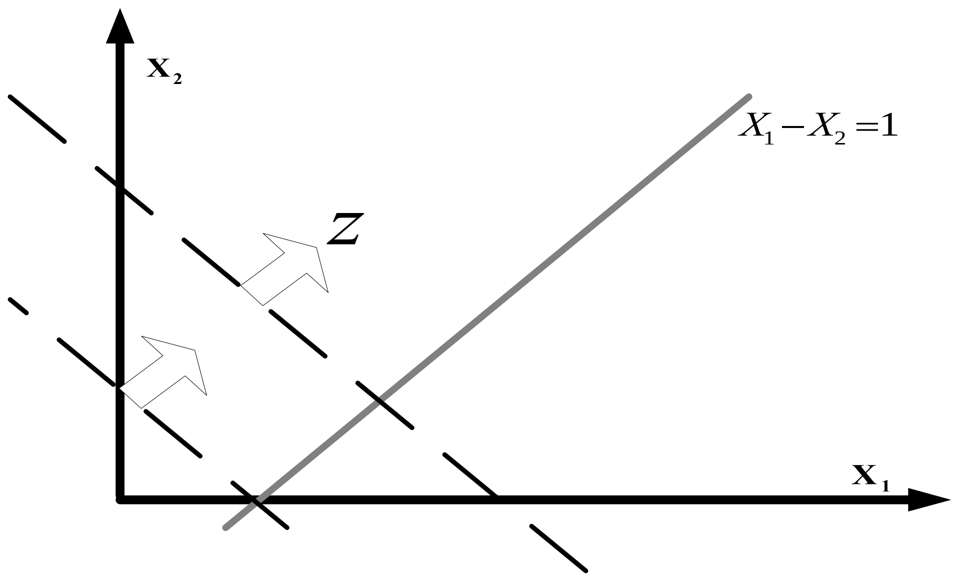
Ένα τέτοιο απλό παράδειγμα είναι το ακόλουθο Γ.Π.

$$\max[z] = 1.000\chi_1 + 1.000\chi_2$$

υπό τους περιορισμούς:

$x_1 - x_2 \leq 1$

$x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0$



Σχήμα 1.6.5 Περίπτωση η Ζ απειρίζεται

Στο πρόβλημα αυτό η ζ μπορεί να αυξηθεί ανεξέλεγκτα (βλ. σχήμα 1.6.5) αφού το σύνολο των δυνατών λύσεων δεν είναι φραγμένο ($z^* = +\infty$). Εδώ φυσικά υπάρχει πάλι λάθος μοντελοποίησης, αφού είναι αδύνατο να φανταστούμε μια οικονομική αντικειμενική συνάρτηση (π.χ. κέρδος) να απειρίζεται.

δ) Μη φραγμένες μεταβλητές

Ας επιλύσουμε γραφικά το Γ.Π.:

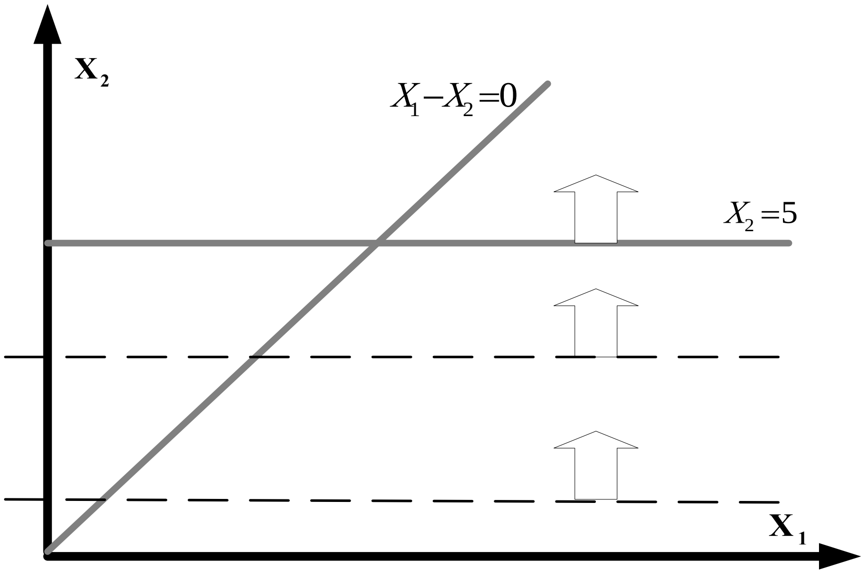
$\max\left[z\right] = 2.000\chi_2$

υπό τους περιορισμούς:

$x_1 - x_2 \geq 0$

$x_2 \leq 5$

$x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0$



Σχήμα 1.6.6 Η περίπτωση μη φραγμένων μεταβλητών

Στο παράδειγμα αυτό (βλ. σχήμα 1.6.6) η αντικειμενική συνάρτηση μεγιστοποιείται για $x_2^* = 5$ ενώ η μεταβλητή x_1 μπορεί να πάρει ανεξέλεγκτες τιμές από 0 έως $+\infty$.

ε) Πλεονάζοντες περιορισμοί

Στην περίπτωση αυτή, η οποία παρουσιάζεται συχνά στην πράξη, υπάρχουν περιορισμοί οι οποίοι δεν είναι αυτοί που καθορίζουν το σύνορο του συνόλου των δυνατών λύσεων (πλεοναστικοί). Η έγκαιρη εντόπιση και αφαίρεση τους από το σύνολο των περιορισμών δεν θα επηρέαζε καθόλου τη βέλτιστη λύση του προβλήματος.

Στη θεωρία του Γ.Π. υπάρχουν τεχνικές εντοπισμού των πλεοναστικών περιορισμών (redundancy). Είναι όμως προτιμότερο αυτοί οι περιορισμοί να αγνοηθούν κατά την επίλυση του Γ.Π., αφού είναι πολυπλοκότερη η απαλοιφή τους πριν από την επίλυση.

1.6.4 Προοπτικές γενίκευσης

Η γραφική μέθοδος δε μπορεί να επεκταθεί σε ρεαλιστικά προβλήματα Γ.Π. με αριθμό μεταβλητών απόφασης μεγαλύτερο του 3 ($\ell = 3$), διότι εκεί το σύνολο A είναι ένα υπερπολύεδρο και δεν υπάρχει πλέον εποπτεία.

Πέραν αυτού όμως, υπάρχει αντικειμενικά ένα υπολογίσιμο πρόβλημα συνδυαστικής, το οποίο δεν επιτρέπει την απαρίθμηση των κορυφών του υπερπολυέδρου των λύσεων (μετά από επίλυση συστημάτων πρώτου βαθμού) και την εν συνεχεία σύγκριση τους βάσει των τιμών που παίρνει η z.

Πράγματι, αν m και i είναι αντίστοιχα ο αριθμός των περιορισμών και των μεταβλητών απόφασης του Γ.Π., υπάρχουν $(m+\ell)$ αλληλοτεμνόμενα υπερεπίπεδα και ο αριθμός των κορυφών του υπερπολυέδρου των λύσεων μπορεί να φτάσει στον αριθμό συνδυασμών των $(m+l)$ ανά ℓ:

$$\boldsymbol{C_{m+l}^{l} = \frac{(m+l)!}{m! \cdot l!}}$$

Σύμφωνα με τον παραπάνω τύπο, ένα Γ.Π. διαστάσεων 10x15 $(m=10, \ell=15)$ μπορεί να διαθέτει μέχρι 3.268.760 κορυφές (!) και δεν είναι παρά ένα μικρό πρόβλημα Γ.Π.

Για όλους τους παραπάνω λόγους, έπρεπε να επινοηθεί μια αλγεβρική μέθοδος συστηματικής όδευσης προς τη βέλτιστη κορυφή του υπερπολυέδρου των δυνατών λύσεων. Μια τέτοια μέθοδος είναι η μέθοδος simplex (σίμπλεξ).