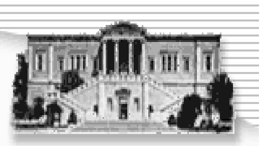
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ



ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

ΑΚΕΡΑΙΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

Νοέμβριος 2006
Αθήνα

Κεφάλαιο 2º

Ακέραιος και μικτός προγραμματισμός

2.1 Εισαγωγή

Μια από τις προϋποθέσεις εφαρμογής του συνεχούς Γ.Π. είναι η διαιρετότητα των μεταβλητών απόφασης. Σε ένα κλασικό (συνεχές) γραμμικό πρόγραμμα, οι μεταβλητές μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε πραγματική τιμή, του τύπου 7,5 κιλά, 0,75 ώρες, 3,5 χιλ. δρχ., κ.λπ. Υπάρχει όμως σημαντικός αριθμός προβλημάτων Γ.Π. στα οποία όλες οι μεταβλητές, ή μερικές από αυτές, υποχρεούνται να πάρουν μόνο ακέραιες τιμές. Τέτοιες μεταβλητές είναι, για παράδειγμα, αυτές που δηλώνουν αριθμό εργατών, αριθμό εργοστασιακών μονάδων, αποφάσεις χρηματοδότησης ή μη χρηματοδότησης ενός έργου, κ.λπ.

Τα προβλήματα του Γ.Π. στα οποία όλες ανεξαίρετα οι μεταβλητές απόφασης περιορίζονται να πάρουν ακέραιες τιμές εμπίπτουν στο πεδίο του ακέραιου προγραμματισμού. Εκείνα, στα οποία ο περιορισμός ακεραιότητας δεν ισχύει για όλες τις μεταβλητές, αλλά για μερικές από αυτές, ονομάζονται προβλήματα μικτού γραμμικού προγραμματισμού.

Μια απλή μέθοδος επίτευξης «ακέραιης λύσης» σε ένα πρόβλημα ακέραιου Γ.Π. συνίσταται στο να επιλυθεί αυτό με τη συνηθισμένη μέθοδο simplex για συνεχή Γ.Π. και εν συνεχεία, να στρογγυλευθούν στον πλησιέστερο ακέραιο οι τιμές των μεταβλητών οι οποίες παίρνουν ρητές τιμές (μη ακέραιες). Μία τέτοια διαδικασία είναι πολύ επικίνδυνη, όσο απλή κι αν φαίνεται, γιατί μπορεί να καταλήξει είτε σε υποβέλτιστες λύσεις, κατώτερες δηλαδή της πραγματικά βέλτιστης ακέραιης λύσης, είτε σε λύσεις μη πραγματοποιήσιμες, που παραβιάζουν δηλαδή τουλάχιστον έναν από τους περιορισμούς του προβλήματος.

Σε περιπτώσεις που οι μεταβλητές απόφασης ενός Γ.Π. είναι φραγμένες, παίρνουν δηλαδή περιορισμένο αριθμό ακέραιων τιμών, οι ιδεώδεις μέθοδοι επίλυσης ακέραιων Γ.Π. είναι οι μέθοδοι τύπου διακλάδωση και οριοθέτηση (branch and bound methods) οι οποίες στηρίζονται σε μια έμμεση απαρίθμηση των δυνατών ακέραιων λύσεων που επιδέχεται το πρόβλημα. Μια τέτοια γενική μέθοδος για καθαρά ακέραια Γ.Π. παρουσιάζεται στην επόμενη παράγραφο.

Φυσικά, υπάρχουν και άλλες μέθοδοι ακέραιου Γ.Π., για παράδειγμα οι δυο μέθοδοι των τεμνόντων επιπέδων του Gomory (cutting plane methods). Για περισσότερη εμβάθυνση, ο αναγνώστης παραπέμπεται στη βιβλιογραφία, π.χ. Gass (1985), Garfmkel and Nemhauser (1972), Minoux (1983), Taha (1975), Droesbeke, Hallin et Lefevre (1986).

2.2 Μεθοδολογία διακλάδωση και οριοθέτηση (Branch and Bound)

Ας θεωρήσουμε το πρόβλημα μεγιστοποίησης:

$$[\max] z = c^t x$$

$υ.π.$

$$\chi \in \mathrm{A} = \left\{ \chi \in \Re^l / Ax \le b, x \ge 0 \, και \quad ακέραιες \right\}$$

Η γενική μέθοδος διακλάδωση και οριοθέτηση μπορεί να αναπτυχθεί στα εξής τέσσερα στάδια:

Στάδιο 1: Επιλύεται το πρόβλημα του ακέραιου Γ.Π. με την γνωστή μέθοδο simplex χωρίς περιορισμούς ακεραιότητας των μεταβλητών απόφασης.

Στάδιο 2: Εάν η λύση που επιτεύχθηκε στο στάδιο 1, ικανοποιεί τους περιορισμούς ακεραιότητας των μεταβλητών, η λύση αυτή είναι η ζητούμενη: Τέλος. Εάν η λύση δεν ικανοποιεί τους περιορισμούς ακεραιότητας, καθορίζεται ενδεχομένως μια πρώτη ακέραιη λύση (συνήθως μετά από στρογγυλεύσεις), της οποίας η τιμή z αποτελεί το αρχικό κάτω φράγμα. Πήγαινε στο στάδιο 3.

Στάδιο 3: Το σύνολο των πραγματοποιήσιμων μη ακέραιων λύσεων διακλαδίζεται σε δύο υποσύνολα (υποπροβλήματα), εισάγοντας αλληλοαποκλειόμενους περιορισμούς οι οποίοι απαιτούνται για να ικανοποιήσει τον περιορισμό ακεραιότητας μια βασική μεταβλητή με ρητή τιμή. Εάν δηλαδή η βέλτιστη λύση του Γ.Π. είναι η $x^* = \left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_l^*\right)^t$ και η τιμή x_i^* της μεταβλητής x_i δεν είναι ακέραιη, δημιουργούνται τα εξής δύο υποπροβλήματα:

Υποπρόβλημα **A**: $\left[\max\right] z = cx,\ \upsilon.\pi.\ x \in \mathrm{A}\ \&\ x_i \le \left[x_i^*\right]$

Υποπρόβλημα **B**: $\left[\max\right] z = cx,\ \upsilon.\pi.\ x \in \mathrm{A}\ \&\ x_i \le \left[x_i^*\right]+1$

όπου $\left[x_i^*\right]$ είναι το ακέραιο μέρος του ρητού αριθμού x_i^* .

Στάδιο 4: Για κάθε υποσύνολο λύσεων, η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης της βέλτιστης μη ακέραιης λύσης ορίζεται ως το **άνω φράγμα**. Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης της καλύτερης μέχρι τώρα ακέραιης λύσης το **κάτω φράγμα**. Εκείνα τα υποσύνολα των οποίων τα άνω φράγματα είναι κατώτερα από το ισχύον κάτω φράγμα δεν εξετάζονται για περαιτέρω διακλάδωση. Εάν υπάρχει πραγματοποιήσιμη ακέραιη λύση με τιμή αντικειμενικής συνάρτησης ίση ή μεγαλύτερη του άνω φράγματος κάθε υποσυνόλου, η λύση αυτή αποτελεί τη βέλτιστη λύση του ακέραιου Γ.Π. Εάν όχι, επιλέγεται ένα υποσύνολο με το καλύτερο άνω φράγμα για περαιτέρω διακλάδωση. Πήγαινε στο στάδιο 3.

Παρατηρήσεις

- Η επιλογή της αρχικής ακέραιης λύσης στο στάδιο 2 δεν είναι υποχρεωτική, είναι όμως πολύ σημαντική για τη διαδικασία εφαρμογής της μεθόδου, διότι όσο πιο υψηλό είναι το **αρχικό κάτω φράγμα** τόσο πιο γρήγορα θα συγκλίνει ο αλγόριθμος. Σε μερικές περιπτώσεις μάλιστα, δεν είναι απλή υπόθεση ο καθορισμός μιας καλής αρχικής λύσης.
- Η μεθοδολογία διακλάδωση και οριοθέτηση υλοποιείται από πληθώρα αλγορίθμων οι οποίοι διαφοροποιούνται ως προς τον τρόπο επιλογής του αρχικού κάτω φράγματος (στάδιο 2) καθώς και την εκάστοτε επιλογή της μεταβλητής στην οποία βασίζεται η διακλάδωση του σταδίου 3.

2.3 Ένα αριθμητικό παράδειγμα

Θα εφαρμόσουμε την παραπάνω μέθοδο στο εξής ακέραιο Γ.Π.:

$[\max] z = 40x_1 + 30x_2$

υ.π.

$2x_1 + 2x_2 \leq 59$

$3x_1 + 2x_2 \leq 75$

$x_1 + 2x_2 \leq 50$

$x_1, x_2 \geq 0$, integer

Η βέλτιστη λύση που δίνει η μέθοδος simplex στο πρόβλημα αυτό χωρίς περιορισμούς ακεραιότητας (στάδιο 1) είναι: $x_1 = 22,75$, $x_2 = 6,75$, $z^* = 1.112,5$. Η τιμή αυτή του z (1.112,5) αποτελεί το αρχικό άνω φράγμα. Το κάτω φράγμα του z υπολογίζεται εδώ μετά από στρογγύλευση προς τα κάτω των μεταβλητών απόφασης, δηλαδή από τη λύση: x_1 =22, x_2 =6, z =1.060.

Η βέλτιστη λύση του συνεχούς Γ.Π. δεν ικανοποιεί τους περιορισμούς ακεραιότητας (στάδιο 2). Έτσι, στο στάδιο 3, διακλαδίζεται το σύνολο των πραγματοποιήσιμων λύσεων σε δύο υποσύνολα που υπαγορεύονται από τα εξής 2 υποπροβλήματα Γ.Π. (η διακλάδωση γίνεται μετά από αυθαίρετη επιλογή της βασικής μεταβλητής x_1, η οποία δεν τηρεί τον περιορισμό ακεραιότητας):

Υποπρόβλημα Α:

$[\max] z = 40x_1 + 30x_2$

υ.π.

$2x_1 + 2x_2 \leq 59$

$3x_1 + 2x_2 \leq 75$

$x_1 + 2x_2 \leq 50$

$x_1 \quad \leq 22$

$x_1, x_2 \geq 0$

Υποπρόβλημα Β:

$[\max] z = 40x_1 + 30x_2$, υ.π.

$2x_1 + 2x_2 \le 59$

$3x_1 + 2x_2 \le 75$

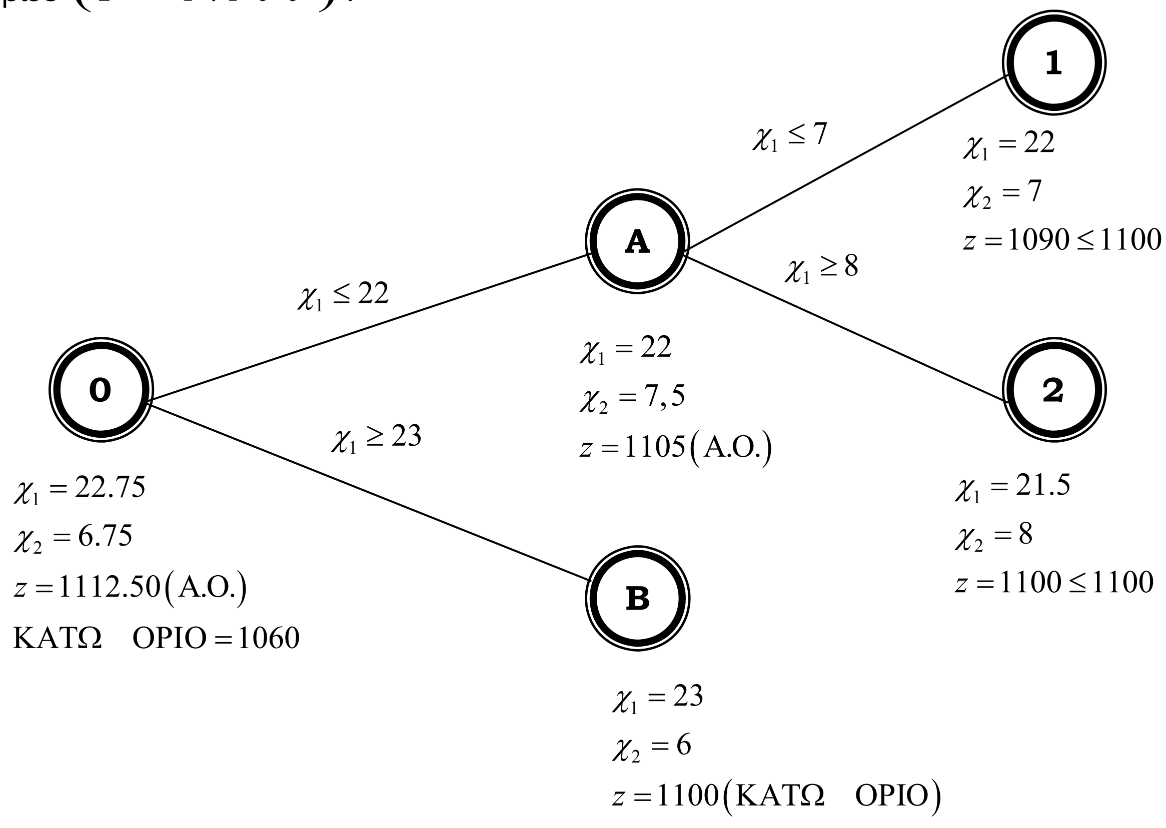
$x_1 + 2x_2 \le 50$

$x_1 \quad \ge 23$

$x_2 \ge 0$

Η διάσπαση αυτή δίνεται παραστατικά στο σχήμα 2.1 όπου εμφαίνονται οι βέλτιστες λύσεις των υποπροβλημάτων Α και Β.

Το υποπρόβλημα Β καταλήγει σε ακέραιη λύση (Σχ. 2.1). Έτσι, το κάτω φράγμα ανέρχεται τώρα σε $z = 1.100$ και δεν συνεχίζεται η διακλάδωση από την κορυφή Β του γραφήματος. Αντίθετα, το υποπρόβλημα Α δίνει μη ακέραιη λύση, όπου όμως η τιμή του $z = 1.105$ (άνω φράγμα της διακλάδωσης) είναι μεγαλύτερη του κάτω ορίου $(z = 1.100)$.



Σχήμα 2.1:Διαδικασία εφαρμογής μεθόδου 'διακλάδωση και οριοθέτηση'

Ο αλγόριθμος οδηγεί λοιπόν ξανά στο στάδιο 3 με τη δημιουργία 2 νέων κλάδων από την κορυφή Α του γραφήματος. Τα δύο νέα υποπροβλήματα Γ.Π. είναι:

Υποπρόβλημα Α1:

$$[\max] z = 40x_1 + 30x_2$$

υ.π.

$$2x_1 + 2x_2 \le 59$$

$$3x_1 + 2x_2 \le 75$$

$$x_1 + 2x_2 \le 50$$

$$x_1 \le 22$$

$$x_2 \le 7$$

$$x_1 \ge 0$$

Υποπρόβλημα Α2:

$$[\max] z = 40x_1 + 30x_2$$

υ.π.

$$2x_1 + 2x_2 \le 59$$

$$3x_1 + 2x_2 \le 75$$

$$x_1 + 2x_2 \le 50$$

$$x_1 \le 22$$

$$x_2 \ge 8$$

$$x_1 \ge 0$$

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.1 και τα δυο υποπροβλήματα δίνουν λύσεις κατώτερες από τη λύση του διακλάδωση Β, αφού οι τιμές του z δεν υπερβαίνουν το κάτω φράγμα $(z = 1.100)$.Συνεπώς, ο αλγόριθμος περατώνεται εδώ. Η βέλτιστη ακέραιη λύση είναι $x_1 = 23$, $x_2 = 6$, $z = 1.100$.

Η διαδικασία εφαρμογής του αλγορίθμου θα μπορούσε να είναι διαφορετική εάν η διακλάδωση από την κορυφή 0 του γραφήματος γινόταν με άλλη βασική μεταβλητή (διαφορετική της x_1) της οποίας η τιμή είναι ρητή. Πράγματι, εάν χρησιμοποιηθεί η μεταβλητή x_2 αντί της x_1, η διαδικασία του αλγορίθμου «κλάδος και φράγμα» είναι αυτή που παριστάνεται στο σχήμα 2.2.

2.4 Εφαρμογή

Ανάθεση αεροπορικών πτήσεων[1]

Μικρή ιδιωτική αεροπορική εταιρεία διαθέτει τριών τύπων αεροσκάφη, τα Α, Β και Γ, για να εκτελεί ναυλωμένες πτήσεις σε συγκεκριμένες αεροπορικές διαδρομές με αντίστοιχους κωδικούς αριθμούς 001, 002 και 003. Τα αεροσκάφη τύπου Α δεν πραγματοποιούν τη διαδρομή 003, ενώ τα αεροσκάφη τύπου Γ δεν πραγματοποιούν τη διαδρομή 001.

Όσον αφορά στον προγραμματισμό των πτήσεων της επόμενης εβδομάδας, η εταιρεία έχει προβλέψει την ελάχιστη ζήτηση (αριθμό επιβατών) για κάθε μια από τις τρεις διαδρομές. Τα στοιχεία αυτά καθώς και το αντίτιμο του εισιτηρίου κάθε διαδρομής περιέχονται στον πίνακα 2.1.

Η οικονομική υπηρεσία της εταιρείας έχει υπολογίσει αναλυτικά το κόστος μεταφοράς ενός επιβάτη για κάθε διαδρομή και για τα αεροσκάφη που μπορούν να τις καλύψουν. Τα μοναδιαία αυτά κόστη, εκφρασμένα σε χιλιάδες δραχμές, δίνονται στον πίνακα 2.2.

Πίνακας 2.1:
Ζήτηση θέσεων και τιμές εισιτηρίων

Διαδρομή	Ελάχιστος αριθμός επιβατών	Τιμή εισιτηρίου (χιλιάδες δρχ.)
001	320	45
002	170	45
003	190	24

Πίνακας 2.2: Κόστη Μεταφοράς			
Διαδρομή	**Μοναδιαίο κόστος μεταφοράς (€)**		
	Α	**Β**	**Γ**
001	36	39	-
002	36	39	45
003	-	33	42

Το κάθε αεροσκάφος μπορεί να εκτελέσει το πολύ 3 πτήσεις (σε 3 διαδρομές) την εβδομάδα και έχει διαφορετική χωρητικότητα ανάλογα με τη διαδρομή στην οποία θα χρησιμοποιηθεί. Αυτό το τελευταίο οφείλεται στους ισχύοντες διεθνείς κανόνες ασφαλείας. Τα τεχνικά αυτά δεδομένα καθώς και ο διαθέσιμος αριθμός αεροσκαφών κάθε τύπου φαίνονται στον πίνακα 2.3.

Πίνακας 2.3: Χωρητικότητα αεροσκαφών			
Διαδρομή	**Χωρητικότητα αεροσκάφους (αριθμός επιβατών)**		
	Α	**Β**	**Γ**
001	20	15	-
002	18	13	10
003	-	14	8
Διαθέσιμα Αεροσκάφη	15	14	18

Η εταιρεία επιδιώκει να καθορίσει εκείνη την ανάθεση των πτήσεων αεροσκαφών η οποία μεγιστοποιεί το συνολικό κέρδος της.

Μοντελοποίηση προβλήματος κατανομής

Το πρόβλημα που απασχολεί την εταιρεία αφορά την ανάθεση των πτήσεων στα αεροσκάφη της. Κατά συνέπεια, εδώ έχουμε πρόβλημα κατανομής των αεροσκαφών (ή μάλλον των πτήσεων που μπορούν να πραγματοποιήσουν τα αεροσκάφη) στις τρεις διαδρομές.

Το σύνολο των επιμέρους δραστηριοτήτων κατανομής οριοθετείται από όλους τους δυνατούς τρόπους δρομολόγησης των αεροσκαφών, όπως: εκτέλεση της διαδρομής 001 από αεροσκάφη τύπου Α, εκτέλεση της διαδρομής 001 από αεροσκάφη τύπου Β, κ.λπ.

Πίνακας 2.4: Μεταβλητές απόφασης προβλήματος (εκφράζονται σε αριθμό πτήσεων)			
Διαδρομή	Αεροσκάφη		
	Α	Β	Γ
001	X_{A1}	X_{B1}	-
002	X_{A2}	X_{B2}	$X_{Γ2}$
003	-	X_{B3}	$X_{Γ3}$

Στον πίνακα 2.4 κάθε επιμέρους δραστηριότητα κατανομής σηματοδοτείται από την παρουσία μιας μεταβλητής x. Υπάρχουν συνολικά επτά τέτοιες δραστηριότητες, όσες δηλαδή είναι και οι δυνατές διαδρομές από τα αεροσκάφη.

Επειδή το ζητούμενο από την εταιρεία είναι ο προγραμματισμός εκείνων των πτήσεων που απαιτούνται για να καλυφθεί η ζήτηση, ορίζουμε ως μεταβλητές απόφασης τις παρακάτω επτά μεταβλητές (πίνακας 2.4):

- X_{A1}: αριθμός πτήσεων αεροσκαφών τύπου Α στη διαδρομή 001
- X_{A2}: αριθμός πτήσεων αεροσκαφών τύπου Α στη διαδρομή 002
- X_{B1}: αριθμός πτήσεων αεροσκαφών τύπου Β στη διαδρομή 001
- X_{B2}: αριθμός πτήσεων αεροσκαφών τύπου Β στη διαδρομή 002
- X_{B3}: αριθμός πτήσεων αεροσκαφών τύπου Β στη διαδρομή 003
- $X_{Γ2}$: αριθμός πτήσεων αεροσκαφών τύπου Γ στη διαδρομή 002
- $x_{Γ3}$: αριθμός πτήσεων αεροσκαφών τύπου Γ στη διαδρομή 003

Μοντελοποίηση περιορισμών

Οι περιορισμοί στο πρόβλημα της αεροπορικής εταιρείας είναι δύο ειδών: η **διάθεση αεροσκαφών** καν η **κάλυψη της ζήτησης θέσεων.**

Περιορισμοί διάθεσης αεροσκαφών

Με δεδομένο ότι κάθε αεροσκάφος μπορεί να εκτελέσει το πολύ 3 πτήσεις την εβδομάδα, ο μέγιστος εβδομαδιαίος αριθμός πτήσεων για κάθε τύπο αεροσκάφους είναι:

Α: 3 x 15 αεροσκ. = 45 πτήσεις

Β: 3 X 14 αεροσκ. = 42 πτήσεις

Γ: 3 Χ 18 αεροσκ. = 54 πτήσεις

Έτσι, για κάθε τύπο αεροσκάφους γράφουμε τους περιορισμούς:

$X_{A1} + X_{A2} \leq 45$ (πτήσεις αεροσκ. Α/εβδομάδα)

$X_{B1} + X_{B2} + X_{B3} \leq 42$ (πτήσεις αεροσκ. Β/εβδομάδα)

$X_{\Gamma 2} + X_{\Gamma 3} \leq 54$ (πτήσεις αεροσκ. Γ/εβδομάδα)

Περιορισμοί ελάχιστης ζήτησης θέσεων

Για την κάλυψη της ελάχιστης ζήτησης θέσεων επιβατών, σύμφωνα με τον πίνακα 2.2, χρησιμοποιούμε τη λογική σχέση:

«προσφερόμενες θέσεις στη διαδρομή» > «ελάχιστη ζήτηση»

Ο αριθμός προσφερόμενων θέσεων σε μια διαδρομή υπολογίζεται από τον αριθμό των πτήσεων πολλαπλασιασμένο επί τη χωρητικότητα των αντίστοιχων αεροσκαφών που εκτελούν τις πτήσεις αυτές (βλ. πίνακα 2.3). Για παράδειγμα, στη διαδρομή 001, διατίθενται εβδομαδιαίως ($20\ X_{A1} + 15\ X_{B1}$) θέσεις επιβατών.

Έχουμε λοιπόν τους εξής τρεις περιορισμούς:

$20X_{A1} + 15X_{B1} \geq 320$ (θέσεις διαδρομής 001)

$18X_{A2} + 13X_{B2} + 10X_{\Gamma 2} \geq 170$ (θέσεις διαδρομής 002)

$14X_{B3} + 8X_{\Gamma 3} \geq 320$ (θέσεις διαδρομής 003)

Φυσικοί περιορισμοί

Όλες οι μεταβλητές απόφασης εκφράζουν αριθμό πτήσεων και συνεπώς οφείλουν να είναι μη αρνητικές και ακέραιες:

$x_{A1},\ x_{A2},\ x_{B1},\ x_{B2},\ x_{B3},\ x_{\Gamma 2},\ x_{\Gamma 3} \geq 0$ *and* int

Κριτήριο βελτιστοποίησης

Οι αποφάσεις αξιολογούνται εδώ με βάση τα κέρδη της εταιρείας. Το συνολικό εβδομαδιαίο κέρδος εκφράζεται ως η διαφορά μεταξύ των εσόδων από την πώληση των εισιτηρίων και του κόστους μεταφοράς.

Τα έσοδα της εταιρείας από τα εισιτήρια (με βάση τους πίνακες 2.1 και 2.3) είναι:

Έσοδα/εβδομάδα:

$$45\times(20X_{A1}+15X_{B1})+45\times\left(18X_{A2}+13X_{B2}+\quad 10X_{\Gamma 2}\right)+24\times\left(14X_{B3}+8X_{\Gamma 3}\right)=$$

$$900X_{A1}+810X_{A2}+675X_{B1}+585X_{B2}+336X_{B3}+450X_{\Gamma 2}+192X_{\Gamma 3}\ (€)$$

Το κόστος μεταφοράς βάσει των πινάκων 2.2 και 2.4 είναι:

Έξοδα/εβδομάδα:

$$36\times 20X_{A1}+36\times 18X_{A2}+39\times 15X_{B1}+39\times 13X_{B2}+33\times 14X_{B3}$$
$$+45\times 10X_{\Gamma 2}+42\times 8X_{\Gamma 3}$$

$$=720X_{A1}+648X_{A2}+585X_{B1}+507X_{B2}+462X_{B3}+450X_{\Gamma 2}+336X_{\Gamma 3}\ (€)$$

Παίρνοντας τη διαφορά ανάμεσα στα δύο μεγέθη, η αντικειμενική συνάρτηση του Γ.Π. γράφεται:

$$[\max]z=180X_{A1}+162X_{A2}+90X_{B1}+78X_{B2}-126X_{B3}+0X_{\Gamma 2}-140X_{\Gamma 3}\ (€)$$

Τελική μορφή Γ.Π.

Το τελικό μοντέλο ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού είναι διαστάσεων 6x7 και μπορεί να παρασταθεί στον πίνακα 2.5.

Πίνακας 2.5: Μοντέλο ακέραιου Γ.Π.

x_{A1}	x_{A2}	x_{B1}	x_{B2}	x_{B3}	$x_{\Gamma 2}$	$x_{\Gamma 3}$	**πρόσημο**	**β'μέλος**
1	1	0	0	0	0	0	≤	45
0	0	1	1	1	0	0	≤	42
0	0	0	0	0	1	1	≤	54
20	0	15	0	0	0	0	≥	320
0	18	0	13	0	10	0	≥	170
0	0	0	0	14	0	8	≥	190
180	162	90	78	-126	0	-140	max	

Εφαρμογή μεθόδου διακλάδωσης και οριοθέτησης

Επιλύοντας το μοντέλο Γ.Π. του πίνακα 2.5με τη βοήθεια της εντολής 'επίλυσης'("solver") από το μενού εργαλεία του Microsoft Office Excel 2003[2] παίρνουμε την εξής βέλτιστη λύση:

$X_{A1} = 45$
$X_{A2} = 0$
$X_{B1} = 28.43$
$X_{B2} = 0$
$X_{B3} = 13.57$
$X_{\Gamma 2} = 17$
$X_{\Gamma 3} = 0$
$z = 8.948,242 (Α.Φ.)$

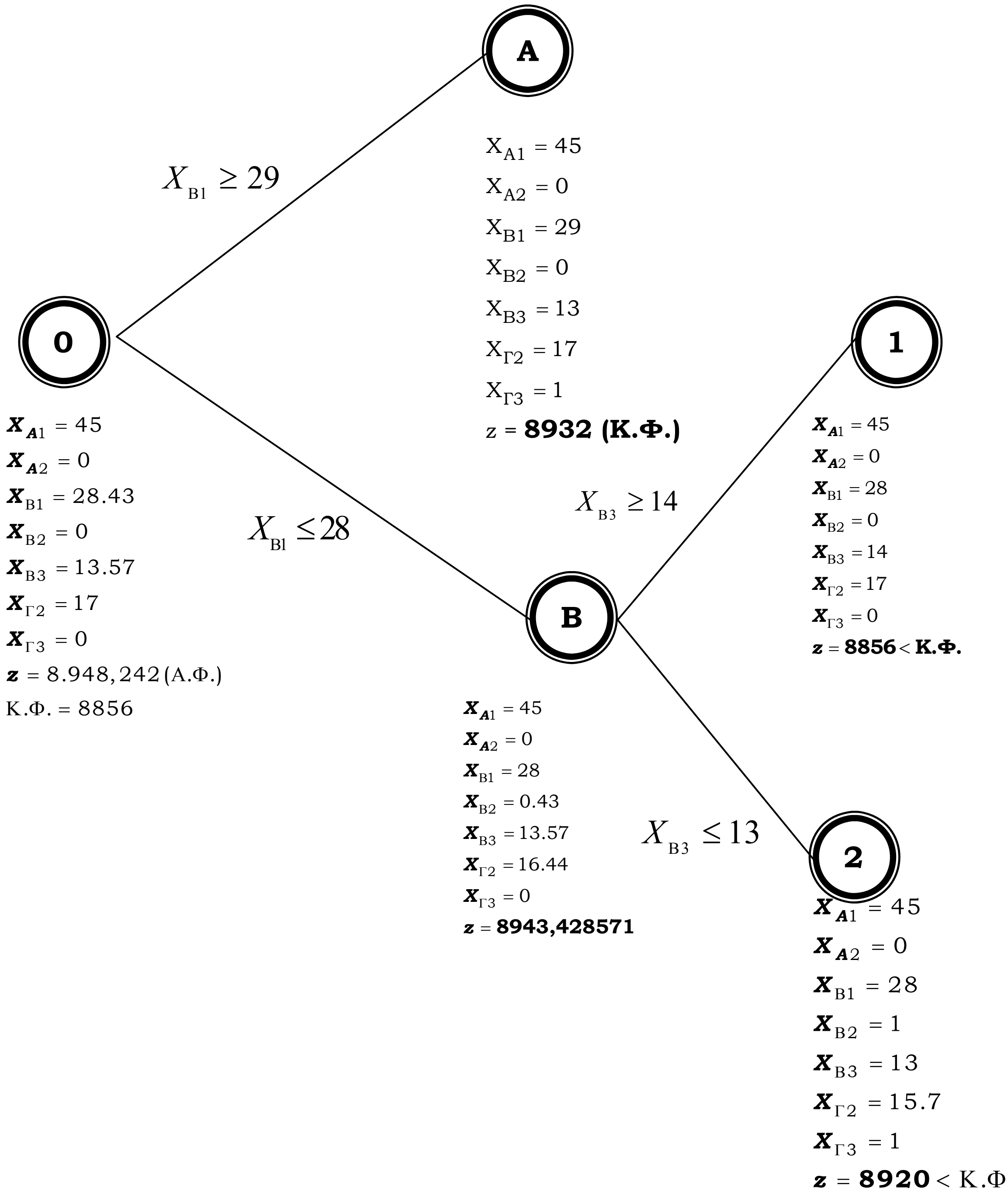
Η λύση φυσικά δεν είναι αποδεκτή, ως μη ακέραιη. Η τιμή της z ορίζει το αρχικό άνω φράγμα (Α.Φ.). Για τον υπολογισμό του αρχικού κάτω φράγματος (Κ.Φ.), πραγματοποιούμε κάποιες στρογγυλοποιήσεις που σέβονται τους περιορισμούς του Γ.Π. Μια τέτοια λύση είναι η εξής:

$X_{A1} = 45$
$X_{A2} = 0$
$X_{B1} = 28$
$X_{B2} = 0$
$X_{B3} = 14$
$X_{\Gamma 2} = 17$
$X_{\Gamma 3} = 0$
$z = 8.856 (Κ.Φ.)$

Η εφαρμογή της μεθόδου διακλάδωσης και οριοθέτησης δίνεται στο σχήμα 2.2. Η όλη διαδικασία είναι πολύ ταχεία λόγω του υψηλού κάτω ορίου που επιτυγχάνει η διακλάδωση $X_{B1} \geq 29$ (Κάτω φράγμα = 8932)

Πίνακας 2.5: Ανεκμετάλλευτες πτήσεις/εβδομάδα		
Τύπος αεροσκάφους	**Αριθμός πτήσεων**	**Επιπλέον κέρδος (€) /θέση /εβδ.)**
Α	0	180
Β	0	126
Γ	36	0

Πίνακας 2.6: Διαθέσιμες κενές θέσεις/εβδομάδα		
Διαδρομή	**Αριθμός θέσεων**	**Επιπλέον κόστος (€) /θέση /εβδ.)**
001	1.015	0
002	0	0
003	0	18

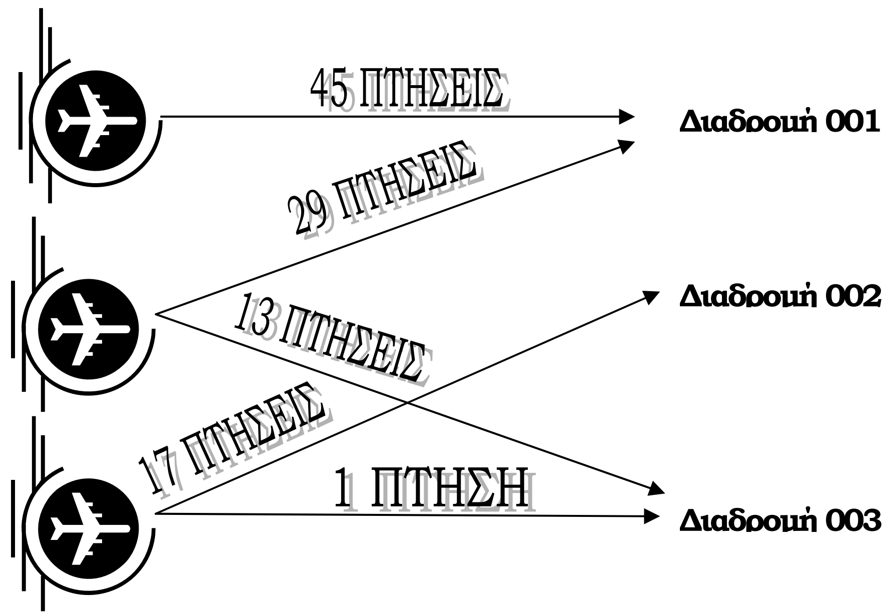


Σχήμα 2.2: Η διαδικασία διακλάδωση και οριοθέτηση στο πρόβλημα της ανάθεσης πτήσεων

Ο βέλτιστος εβδομαδιαίος προγραμματισμός των αεροσκαφών της εταιρείας φαίνεται στο σχήμα 2.3 και αναλύεται στους πίνακες 2.5 και 2.6. Το εβδομαδιαίο κέρδος της εταιρείας ανέρχεται σε 8.932€

Σύμφωνα με τα στοιχεία του πίνακα 2.6, στις διαδρομές 2 και 3 δεν υπάρχει πλεόνασμα θέσεων, ενώ για τη διαδρομή 1 θα υπάρξουν 1.015 κενές θέσεις. Ειδικότερα, στη διαδρομή 3 κάθε νέα θέση που θα διατεθεί, εφόσον αυτό είναι επιτρεπτό, θα επιφέρει μείωση του συνολικού κέρδους κατά 18€ .

Ο πίνακας 2.5 δίνει πρόσθετο κέρδος 180€ δραχμών για κάθε νέα πτήση αεροσκάφους τύπου Α και 126€ δραχμών για κάθε νέα πτήση αεροσκάφους τύπου Β. Αντίθετα, ο στόλος αεροσκαφών τύπου Γ μένει ανεκμετάλλευτος κατά 36 πτήσεις, που θα μπορούσε η εταιρεία να προγραμματίσει σε άλλες διαδρομές.



Σχήμα 2.3: Βέλτιστη ανάθεση πτήσεων (Κέρδος=8.932 €/εβδ.)