ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $x^3 - x - 1 = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα $\bar{x}$ στο διάστημα [1,2]. Να γίνουν 3 επαναλήψεις της μεθόδου της διχοτόμησης. Πόσες επαναλήψεις πρέπει να γίνουν ώστε $|x_k - \bar{x}| \le 10^{-4}$;

2. Η συνάρτηση $f(x) = 1/(3x-1)$ έχει αντίθετα πρόσημα στα σημεία 0 και 1. Ποιό σημείο εντοπίζει η μέθοδος της διχοτόμησης αν εφαρμοστεί στο διάστημα [0,1]; Είναι αυτό το σημείο ρίζα της $f(x) = 0$;

3. Η εξίσωση $5x^3 - 20x + 3 = 0$ έχει μια μοναδική ρίζα $\bar{x}$ στο [0,1]. Να δειχθεί ότι η γενική επαναληπτική μέθοδος $x_{k+1} = g(x_k) := (5x_k^3 + 3)/20$ συγκλίνει στη ρίζα αυτή για οποιοδήποτε x_0 στο [0,1]. Να γίνουν 3 επαναλήψεις με $x_0 = 0.2$ και να δοθεί μια εκτίμηση του σφάλματος $|x_3 - \bar{x}|$. Επίσης, θέτοντας $e_k = x_k - \bar{x}$, να δειχθεί ότι $\lim(e_{k+1}/e_k) = (3/4)\bar{x}^2$ όταν $k \to \infty$.

4. Να δειχθεί ότι η ακολουθία (x_k), με $x_k = 1 + 2^{-k}$, συγκλίνει στο 1 γραμμικά και ότι η ακολουθία (x_k), με $x_k = 1 + 2^{-2^k}$, συγκλίνει στο 1 τετραγωνικά.

5. Έστω $g:[a,b] \to [a,b]$, $g \in C^1[a,b]$, $L = \max|g'(x)| < 1$ και $\bar{x}$ μια λύση της εξίσωσης $x = g(x)$ στο [a,b]. Έστω επίσης η γενική επαναληπτική μέθοδος $x_{k+1} = g(x_k)$, $k = 0,1,2,\ldots$, με $x_0 \in [a,b]$. Να δειχθεί ότι, αν $g'(x) > 0\ \forall x \in [a,b]$, τότε η ακολουθία (x_k) συγκλίνει στο $\bar{x}$ μονότονα, ενώ αν $g'(x) < 0\ \forall x \in [a,b]$, τότε η (x_k) συγκλίνει στο $\bar{x}$ και το $\bar{x}$ βρίσκεται πάντα μεταξύ δύο διαδοχικών επαναλήψεων.

6. Έστω η εξίσωση $f(x) = 0$. Υποθέτουμε ότι $f \in C^1$ και ότι η εξίσωση αυτή έχει μια ρίζα $\bar{x}$. Γράφοντας την εξίσωση αυτή στην ισοδύναμη μορφή

$$x = g(x) = x - cf(x),$$

να βρεθούν οι τιμές του c για τις οποίες η επαναληπτική μέθοδος $x_{k+1} = g(x_k)$, x_0 δεδομένο, συγκλίνει για x_0 αρκετά κοντά στο $\bar{x}$. Για ποιά (θεωρητική) τιμή του c η σύγκλιση είναι υπεργραμμική;

7. Να δειχθεί ότι η επαναληπτική μέθοδος $x_{k+1} = g(x_k)$, με $g(x) = \sin x$, συγκλίνει στην μοναδική ρίζα 0 της εξίσωσης $x = g(x)$, για κάθε αρχικό $x_0 \in [-1, 1]$ (και άρα για κάθε $x_0 \in \mathbf{R}$, γιατί;), παρόλο που δεν ισχύει η συνθήκη $|g'(\bar{x})| < 1$ (αφού έχουμε εδώ $|g'(0)| = 1$). Αντίθετα, να δειχθεί ότι η επαναληπτική μέθοδος, με $g(x) = x + x^3$, δεν συγκλίνει για κανένα αρχικό $x_0 \ne 0$ στη μοναδική ρίζα 0 της εξίσωσης $x = g(x)$, και ότι πάλι δεν ισχύει η συνθήκη $|g'(\bar{x})| < 1$.

8. Έστω η εξίσωση $x\ln x - 1 = 0,\ x > 0$. Να εφαρμοστεί η μέθοδος Newton-Raphson για την εύρεση μιας προσέγγισης x_k της ρίζας $\bar{x}$ της εξίσωσης αυτής τέτοια ώστε να ισχύει $|x_k - \bar{x}| \le 10^{-4}$. Ο εντοπισμός του αρχικού σημείου x_0 να γίνει γραφικά.

9. Ο αντίστροφος ενός αριθμού $a \ne 0$ μπορεί να υπολογιστεί χωρίς διαίρεση από τον αλγόριθμο $x_{k+1} = x_k(2 - ax_k),\quad k = 0,1,2...$

a) Να δειχθεί ότι η σχέση αυτή προκύπτει από την εφαρμογή της μεθόδου Newton Raphson στην εξίσωση $(1/x) - a = 0$. Για ποιες αρχικές τιμές η ακολουθία (x_k) συγκλίνει;

b) Με $x_0 = 0.2$, να γίνουν 2 επαναλήψεις για να υπολογιστεί μια προσέγγιση του αντίστροφου του αριθμού 4 με τη μέθοδο αυτή.

10. Η εξίσωση $x^3 - 2x - 5 = 0$ έχει μόνο μια πραγματική ρίζα $\bar{x}$ και μάλιστα η ρίζα αυτή βρίσκεται στο διάστημα (2,3). Αποδείξτε αναλυτικά ότι, αν $x_0 \ge 1$, τότε η ακολουθία (x_k) που παράγει η μέθοδος Newton-Rapshon συγκλίνει στη ρίζα $\bar{x}$. (Υπόδειξη: Δείξτε ότι η ακολουθία (x_k), $k \ge 1$, είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη).

11. Να εφαρμοστεί η μέθοδος της Τέμνουσας για την εύρεση της ρίζας της εξίσωσης $e^x - 3 = 0$ με $x_0 = 3$, $x_1 = 2$ (δύο επαναλήψεις).

12. Να εφαρμοστεί η μιγαδική μέθοδος Newton-Rapshon στην εξίσωση $1 + z^2 = 0$ (τρεις επαναλήψεις, με $z_0 = 1 + i$).

13. Να εφαρμοστεί η μέθοδος Newton-Raphson στο μη γραμμικό σύστημα

$$x^3 - 3xy^2 + 1 = 0$$
$$3x^2y - y^3 = 0$$

με $(x_0, y_0) = (1,1)$ (μία επανάληψη).