ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

Πρόγραμμα Σπουδών: ΔΙΟΙΚΗΣΗ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ και ΟΡΓΑΝΙΣΜΩΝ

Θεματική Ενότητα: ΔΕΟ-13 – Ποσοτικές Μέθοδοι

Περίληψη της Ύλης της Επιχειρησιακής Έρευνας

Ακαδημαϊκό Έτος 2003-2004

Πρόλογος

Το φυλλάδιο που έχετε στα χέρια σας αποτελεί περίληψη της ύλης της Επιχειρησιακής Έρευνας και φυσικά δεν στοχεύει στο να αντικαταστήσει με κανένα τρόπο το επίσημο υλικό που πρέπει να μελετήσετε σχετικά με αυτό το θεματικό αντικείμενο στα πλαίσια των υποχρεώσεών σας στη ΔΕΟ13. Τα εγχειρίδια, για το ακαδημαϊκό έτος 2003-2004, είναι οι Σημειώσεις Γραμμικού Προγραμματισμού, τη νέα έκδοση των οποίων θα πρέπει να «κατεβάσετε» από την ιστοσελίδα του ΕΑΠ και ο Τόμος Γ΄ του ΕΑΠ, με τίτλο «Επιχειρησιακή Έρευνα». Η περίληψη αυτή είναι χρήσιμη για μία πρώτη ανάγνωση και γνωριμία με τα βασικά στοιχεία της ύλης που πρέπει να καλύψετε για το συγκεκριμένο θεματικό αντικείμενο και ως περίληψη, ενδείκνυται να τη διαβάσετε πρώτη. Υπάρχουν και άλλα βοηθητικά κείμενα για την Επιχειρησιακή Έρευνα, τα οποία έχουν ως σκοπό να σας βοηθήσουν στην πληρέστερη κατανόηση του αντικειμένου. Συνολικά, στην ιστοσελίδα του ΕΑΠ θα βρείτε:

1. *Παροράματα*
2. *Τυπολόγιο Επιχειρησιακής Έρευνας (θεωρία ουρών αναμονής, θα σας δοθεί και στις εξετάσεις)*
3. *Οδηγίες μελέτης Επιχειρησιακής Έρευνας (με ακριβή περιγραφή της ύλης)*
4. *Απαντήσεις σε συχνές ερωτήσεις Επιχειρησιακής Έρευνας (για το Γραμμικό Προγραμματισμό)*
5. *Τις σημειώσεις του Γραμμικού Προγραμματισμού που αναφέρθηκαν παραπάνω*

Επίσης, ο Γ' τόμος του ΕΑΠ σας έχει σταλεί ταχυδρομικά. Επιπλέον, ταχυδρομικά σας έχει αποσταλεί και ο οδηγός μελέτης του βιβλίου του εμπορίου (Οικονόμου, Γ. Σ. και Α. Κ. Γεωργίου, "Ποσοτική Ανάλυση για τη Λήψη Διοικητικών Αποφάσεων", τόμος Α), ο οποίος όμως δεν θα σας φανεί χρήσιμος αφού το βιβλίο αυτό δεν διδάσκεται κατά το τρέχον ακαδημαϊκό έτος. Αντί του βιβλίου αυτού, έχετε τις σημειώσεις του Γραμμικού Προγραμματισμού.

Τέλος, υπογραμμίζουμε ότι η προσεκτική μελέτη των θεμάτων των εργασιών και των εξετάσεων των προηγουμένων ακαδημαϊκών ετών, η επίλυσή τους, θεωρώντας τις ως επιπλέον ασκήσεις αυτοαξιολόγησης και ακολούθως η σύγκριση των απαντήσεων σας με τις απαντήσεις που παρέχονται στην ιστοσελίδα του ΕΑΠ, αποτελεί ένα ακόμη σημαντικό βοηθητικό στοιχείο για τη κατανόηση του θεματικού αντικειμένου.

Νικόλαος Μπάτης
Καθηγητής Πληροφορικής
ΤΕΙ Λάρισας

Ιωάννης Γκανάς
Καθηγητής Εφαρμογών
ΤΕΙ Ηπείρου

Ανδρέας Κ. Γεωργίου
Αναπληρωτής Καθηγητής Επιχειρησιακής Έρευνας
Πανεπιστήμιο Μακεδονίας

Φεβρουάριος 2004

Επιχειρησιακή Έρευνα

Εισαγωγή

Επιχειρησιακή Έρευνα (Operations Research)

Η επιστήμη που ασχολείται με τη ***βελτιστοποίηση (optimization)*** της απόδοσης ενός συστήματος. Πρόκειται για ένα σύνολο από τεχνικές, οι οποίες χρησιμοποιώντας (μαθηματικά) μοντέλα, δημιουργούν μια ποσοτική και ορθολογιστική βάση για τη λήψη αποφάσεων με σκοπό τη βελτιστοποίηση της λειτουργίας του υπό μελέτη συστήματος. Για το λόγο αυτό χαρακτηρίζεται συχνά και με τους όρους ***Ποσοτική Ανάλυση (Quantitative Analysis)*** ή ***Διοικητική Επιστήμη (Management Science).***

Σύστημα

Σύνολο οντοτήτων (ανθρώπινο δυναμικό, μηχανές, κεφάλαια κ.α.) που αλληλοεπιδρούν (κανόνες) και συνεργάζονται μεταξύ τους για την επίτευξη κάποιου στόχου (π.χ. επιχείρηση, οργανισμός)

Μοντέλο (model)

Αναπαράσταση ή απεικόνιση των πλέον σημαντικών λειτουργικών σχέσεων και χαρακτηριστικών ενός συστήματος, με την οποία καθίσταται δυνατή η ανάλυσή του.

Μαθηματική Μοντελοποίηση Συστημάτων (mathematical modeling)

Χρήση μαθηματικών συμβόλων και σχέσεων για την αναπαράσταση – περιγραφή του υπό μελέτη συστήματος. Συστατικά στοιχεία ενός μαθηματικού μοντέλου:

1) ***μεταβλητές απόφασης (ελέγχου) (decision variables)***: δομικά στοιχεία του προβλήματος. Καθορίζονται από τον αναλυτή (λήπτη αποφάσεων) και αντιπροσωπεύουν τις αποφάσεις που πρέπει να ληφθούν
2) ***αντικειμενική συνάρτηση (objective function)***: κριτήριο απόδοσης/επιλογής (performance measure) του υπό μελέτη συστήματος, εκφρασμένο ως μια μαθηματική συνάρτηση των μεταβλητών απόφασης
3) ***παράμετροι (parameters - συντελεστές, σταθερές)***: μετρήσιμα στοιχεία, γνωστά ή εκτιμούμενα εκ των προτέρων.
4) ***περιορισμοί (constraints)***: μαθηματικές σχέσεις (εξισώσεις ή ανισώσεις) που πρέπει να ικανοποιούν οι τιμές των μεταβλητών ώστε να απεικονίζονται στο μοντέλο οι συνθήκες λειτουργίας του συστήματος

Επιθυμητές ιδιότητες ενός μαθηματικού μοντέλου

1. απλότητα (simple)
2. πληρότητα (complete)
3. ευκολία χρήσης (easy manipulation)
4. προσαρμοστικότητα (adaptive)
5. ευκολία επικοινωνίας (easy communication)
6. χρησιμότητα (usefulness), κατάλληλο ως προς το κόστος και το χρόνο (appropriate) και σχετικό ως προς τις πληροφορίες (relevant)

Παράδειγμα

Θεωρήστε μια βιομηχανία γάλακτος που σχεδιάζει την ημερήσια γραμμή παραγωγής της. Πολλές είναι οι μεταβλητές που υπάρχουν σε ένα τέτοιο παραγωγικό σύστημα. Μεταξύ αυτών εύκολα μπορεί κάποιος να αναφέρει την ποσότητα των διαφόρων προϊόντων (είδη γάλακτος, τυριού και γιαουρτιού) που παράγονται. Συμβολίζουμε με:

x_1 την ποσότητα (lit) πλήρους γάλακτος που θα παραχθεί,

x_2 την ποσότητα (lit) άπαχου γάλακτος που θα παραχθεί, και

x_3 την ποσότητα (kg) τυριού φέτας που θα παραχθεί,

(το γράμμα x χρησιμοποιείται συνήθως για την αναπαράσταση μιας μεταβλητής ενώ με τη χρήση του δείκτη i = 1, 2, … επιτυγχάνεται η μεταξύ τους διάκριση)

Το μαθηματικό πρόβλημα αφορά τον εντοπισμό τιμής για την κάθε μεταβλητή απόφασης ώστε να επιτυγχάνεται κάποιος στόχος. Απαιτείται δηλαδή η ύπαρξη κάποιου στόχου προς επίτευξη. Ο στόχος αυτός μπορεί να αφορά τη μεγιστοποίηση του κέρδους, την καλύτερη αξιοποίηση του εργατικού δυναμικού, ή την ελαχιστοποίηση του κόστους, της υπερωριακής απασχόλησης, κτλ.

Στο παράδειγμά μας, ως στόχος θα μπορούσε να καθοριστεί η μεγιστοποίηση του ημερήσιου περιθωρίου κέρδους. Συνεπώς, αναζητούνται εκείνες οι τιμές των μεταβλητών ελέγχου οι οποίες θα βελτιστοποιήσουν το κριτήριο απόδοσης – στόχος που ορίζεται σε αυτό το στάδιο της μοντελοποίησης.

Στη συνέχεια, θα πρέπει να προσδιοριστεί και να καταγραφεί ένας τρόπος έκφρασης του συνολικού κέρδους της γαλακτοβιομηχανίας, ως συνάρτηση όλων των μεταβλητών απόφασης (ποσότητες προϊόντων που παρασκευάζονται), εκτιμώντας τη συνεισφορά του καθενός χωριστά.

Ο στόχος που ορίστηκε πρέπει να επιτευχθεί λαμβάνοντας υπόψη τις συνθήκες λειτουργίας του υπό μελέτη συστήματος. Η περιορισμένη ανεπάρκεια των πόρων του συστήματος (π.χ. περιορισμένες πρώτες ύλες, διαθέσιμες ώρες εργατικού δυναμικού, διαθέσιμα κεφάλαια κλπ), η απορροφητικότητα της αγοράς, οι συμφωνίες με προμηθευτές και αγοραστές, οι χρόνοι παράδοσης των παραγόμενων προϊόντων, κτλ. δημιουργούν αυτές τις συνθήκες. Εάν η γαλακτοβιομηχανία ήταν σε θέση να εξασφαλίσει απεριόριστη πρώτη ύλη και παραγωγική δυναμικότητα, καθώς επίσης και μονοπωλιακή παρουσία στην αγορά, θα εκτόξευε τα κέρδη της στο άπειρο. Στην πραγματικότητα όμως, αυτό δεν μπορεί να συμβεί ποτέ !

Στο στάδιο αυτό της μοντελοποίησης, πρέπει να προσδιοριστούν και να καταγραφούν, ως συνάρτηση των μεταβλητών απόφασης, οι παράγοντες εκείνοι οι οποίοι επιβάλλουν όρια στις τιμές τους και συνεπώς, και στην τιμή του κριτηρίου επίδοσης του συστήματος (κέρδος). Οι (μαθηματικές) σχέσεις που αντιπροσωπεύουν τους περιορισμούς είναι συνήθως ανισότητες της μορφής «δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερο ($\leq$) ή μικρότερο ($\geq$)» από κάποια συγκεκριμένη τιμή, ή «πρέπει να ισούται με» κάποια συγκεκριμένη τιμή.

Όλα τα υπόλοιπα στοιχεία του μοντέλου που χρησιμοποιούνται για να ολοκληρωθούν οι σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών απόφασης ονομάζονται παράμετροι. Το κέρδος ή το κόστος ανά μονάδα προϊόντος, η (προβλεπόμενη) ζήτηση της αγοράς, η διαθεσιμότητα των πρώτων υλών, η απαιτούμενη ποσότητα εκάστης εξ' αυτών για την παραγωγή μιας μονάδας προϊόντος, είναι μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα παραμέτρων ενός μοντέλου για συστήματα τα οποία μοντελοποιούνται από το γραμμικό μοντέλο. Οι τιμές των παραμέτρων θεωρούνται γνωστές και αμετάβλητες.

Γραμμικός Προγραμματισμός (Linear Programming)

Αποτελεί μία από τις πλέον διαδεδομένες τεχνικές της Επιχειρησιακής Έρευνας που χρησιμοποιείται ευρύτατα για την κατάρτιση βέλτιστων σχεδίων κατανομής περιορισμένων πόρων (π.χ. εργασία, πρώτες ύλες, δυναμικότητα, διαθέσιμα κεφάλαια) ενός συστήματος, σε εναλλακτικές και ανταγωνιζόμενες μεταξύ τους δραστηριότητες (π.χ. παραγωγή διαφορετικών προϊόντων), συμβάλλοντας έτσι αποτελεσματικά στη λήψη βέλτιστων επιχειρηματικών αποφάσεων.

Είναι η μαθηματική μεθοδολογία (σύνολο των υπολογιστικών τεχνικών - μαθηματικές μέθοδοι) που χρησιμοποιείται για τη βελτιστοποίηση (μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση) μιας γραμμικής συνάρτησης (παριστάνει το κριτήριο επίδοσης του συστήματος), της οποίας οι μεταβλητές απαιτείται να ικανοποιούν ένα σύστημα γραμμικών περιορισμών (ανισότητες ή/και εξισώσεις) που αντιπροσωπεύουν τις συνθήκες κάτω από τις οποίες αυτή επιχειρείται.

Το υπόδειγμα (μοντέλο) του Γραμμικού Προγραμματισμού

Αφού διατυπωθούν όλες οι σχέσεις και συνθήκες σε φυσική γλώσσα (αυτό καλείται εννοιολογικό ή προφορικό μοντέλο - verbal model), θα πρέπει να μετατραπούν σε μαθηματικές σχέσεις που να είναι σε θέση να εκφράσουν τις συγκεκριμένες πτυχές του συστήματος που προσεγγίζουμε. Υπενθυμίζουμε ότι κάθε μοντέλο αποτελεί μία προσπάθεια απομίμησης της λειτουργίας ενός πραγματικού συστήματος, επομένως με την επίλυση του μοντέλου εφαρμόζοντας κάποια συστηματική μαθηματική μεθοδολογία, μπορεί κανείς να καταλήξει σε προτάσεις προς την κατεύθυνση της βελτιστοποίησης της λειτουργίας του συστήματος από τις οποίες προέκυψε και το αρχικό πρόβλημα.

Στο γραμμικό προγραμματισμό, οι μαθηματικές σχέσεις που συνδέουν μεταξύ τους τις διάφορες μεταβλητές του προβλήματος πρέπει να είναι γραμμικές. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι όπου εμφανίζεται μία μεταβλητή σε κάθε συνάρτηση του μοντέλου, δεν είναι υψωμένη σε καμία δύναμη εκτός από την μονάδα, και ότι δεν υπάρχουν γινόμενα μεταξύ των μεταβλητών, ούτε άλλου είδους συναρτήσεις των μεταβλητών όπως εκθετική λογαριθμική, ρίζες κλπ.

Δεδομένα και σύμβολα θεωρητικού υποδείγματος Γραμμικού Προγραμματισμού

	Δραστηριότητα j					
Πόρος i	1	2	3	. . .	n	Δεξιό μέλος
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}		a_{1n}	b_1
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}		a_{2n}	b_2
3	a_{31}	a_{32}	a_{33}		a_{3n}	b_3
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}		a_{mn}	b_m
ΔZ	c_1	c_2	c_3		c_n	
επίπεδο	X_1	X_2	X_3		X_n	

Βελτιστοποίηση (***max ή min***) της ***αντικειμενικής συνάρτησης (objective function)***

$Z = (c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \ldots + c_nx_n)$

κάτω από περιορισμούς:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n$ [≤, ≥, =] b_1

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots +$ a2nxn [≤, ≥, =] b_2

… … … … …

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n$ [≤, ≥, =] b_m

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \geq 0$

όπου:

m : πλήθος περιορισμών προβλήματος (πόροι, ζήτηση, απαιτήσεις)

n : πλήθος ανταγωνιζόμενων δραστηριοτήτων (π.χ. οι ποσότητες παραγωγής τριών προϊόντων γάλακτος)

x_j: επίπεδο δραστηριότητας (μεταβλητές απόφασης), j=1, 2, …, n (π.χ. x_1 = ποσότητα παραγόμενου προϊόντος 1)

Z : το συνολικό μέτρο απόδοσης (τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης)

c_j: ο αντικειμενικός συντελεστής της x_j, (π.χ. μοναδιαίο περιθώριο κέρδους της δραστηριότητας j), j=1, 2, …, n

b_i: το δεξιό μέλος του περιορισμού i (π.χ. ποσότητα διαθέσιμου πόρου), i = 1, 2, …, m

a_{ij} : τεχνολογικός συντελεστής (π.χ. η ποσότητα που καταναλώνεται απαιτείται από τον πόρο i για να παραχθεί μία μονάδα του προϊόντος j), i = 1, 2, …, m και j=1, 2, …, n

Επίσης άλλα στοιχεία βασικής ορολογίας είναι:

Λύση (solution): κάθε συνδυασμός τιμών των μεταβλητών απόφασης του προβλήματος (επομένως μία λύση δεν είναι κατ' ανάγκη ή άριστη λύση στο πρόβλημα)
Εφικτή λύση (feasible solution): κάθε συνδυασμός τιμών των μεταβλητών απόφασης που ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς του προβλήματος
Βέλτιστη λύση (optimal solution): η εφικτή λύση που βελτιστοποιεί (μεγιστοποιεί ή ελαχιστοποιεί) την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης

Για να χρησιμοποιηθεί ένα μοντέλο (υπόδειγμα) γραμμικού προγραμματισμού θα πρέπει αρχικά να ελεγχθεί εάν μπορεί να εκφραστεί με τη μορφή γραμμικών σχέσεων (συναρτήσεων), που σημαίνει ότι ικανοποιούνται οι παρακάτω θεμελιώδεις παραδοχές - αρχές:

1. ***Αρχή της αναλογικότητας (proportionality)***
   το γεγονός ότι η αντικειμενική συνάρτηση είναι γραμμική σημαίνει ότι η συνεισφορά στη συνολική τιμή του z από μία μεταβλητή απόφασης είναι ανάλογη (γραμμικά) της τιμής που παίρνει η εν λόγω μεταβλητή
2. ***Αρχή της αθροιστικότητας (additivity)***
   a. όσον αφορά την αντικειμενική συνάρτηση αυτό σημαίνει ότι η συνεισφορά κάθε μεταβλητής απόφασης στην τιμή του z είναι ανεξάρτητη από τις τιμές που παίρνουν οι άλλες μεταβλητές απόφασης
   b. όσον αφορά τους περιορισμούς, η αθροιστικότητα σημαίνει ότι η κατανάλωση από μία μεταβλητή απόφασης ενός πόρου στο αριστερό μέλος ενός περιορισμού, είναι ανεξάρτητη από τις τιμές που παίρνουν οι άλλες μεταβλητές

(οι δύο προηγούμενες παραδοχές διασφαλίζουν ότι το μοντέλο θα είναι γραμμικό και ως προς την αντικειμενική συνάρτηση και ως προς τους περιορισμούς)

3. ***Η αρχή της διαιρετότητας (divisibility)***
   όλες οι μεταβλητές θεωρούνται συνεχείς, δηλαδή μπορούν να πάρουν κλασματικές τιμές (εξασφαλίζει τη δυνατότητα επίλυσης του προβλήματος με τη μέθοδο simplex)
4. ***Η αρχή της προσδιοριστικότητας (certainty)***
   οι τιμές των παραμέτρων του προβλήματος θεωρούνται γνωστές (για την εφαρμογή της μεθόδου simplex είναι απαραίτητο όλες οι παράμετροι να είναι γνωστές)

Γραφική Επίλυση Προβλημάτων (μοντέλων) Γραμμικού Προγραμματισμού (π.γ.π.)

Στο στάδιο αυτό μπορείτε να προχωρήσετε εφόσον πρώτα ολοκληρώσετε τη σαφή διατύπωση του προβλήματος, τη συλλογή και ανάλυση δεδομένων για την εκτίμηση των σημαντικών παραμέτρων που διέπουν τη λειτουργία του συστήματος και τη διαμόρφωση του μοντέλου που περιγράφει το σύστημα τουλάχιστον σε σχέση με τις πτυχές που μας ενδιαφέρει να αναλύσουμε περαιτέρω. Συνήθως ακολουθεί η φάση ελέγχου της εγκυρότητας του μοντέλου και επομένως εγκαθίδρυσης της αξιοπιστίας του πριν να επιλυθεί, ώστε τα αποτελέσματα να χρησιμοποιηθούν για τη βελτιστοποίηση της λειτουργίας του πραγματικού συστήματος, δηλαδή για τη λήψη της άριστης απόφασης.

Οποιοδήποτε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού με <u>δύο μόνο μεταβλητές μπορεί να λυθεί γραφικά</u>. Το αρχικό στάδιο της γραφικής επίλυσης του προβλήματος περιλαμβάνει τον προσδιορισμό του **εφικτού χώρου** (συνόλου εφικτών λύσεων – εφικτή περιοχή), δηλαδή τον προσδιορισμό των σημείων (x_1, x_2) του επιπέδου που ικανοποιούν όλους τους περιορισμούς του προβλήματος ταυτόχρονα. Για τη δημιουργία **του χώρου των εφικτών λύσεων** ακολουθείται η παρακάτω διαδικασία:

1. Αντιστοιχούμε τις τιμές των μεταβλητών x_1 και x_2 σε ένα σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων: ο οριζόντιος άξονας παριστά τις τιμές της x_1 και ο κάθετος τις τιμές της x_2. Επειδή οι μεταβλητές παίρνουν τιμές μεγαλύτερες ή ίσες του μηδενός χρησιμοποιείται μόνο το πρώτο τεταρτημόριο όπου η αρχή των αξόνων παριστά τη λύση (x1, x2) = (0, 0). Η λύση αυτή σπανίως είναι η βέλτιστη. Για παράδειγμα, για ένα πρόβλημα παραγωγής δύο προϊόντων παριστάνει την περίπτωση να μην παράγεται τίποτε (!). Κάθε λύση του προβλήματος η οποία ικανοποιεί τη συνθήκη μη αρνητικότητας των μεταβλητών είναι σημείο του θετικού (πρώτου) τεταρτημορίου.
2. Η επόμενη φάση της γραφικής επίλυσης αφορά τη διαδοχική χάραξη των ευθειών των περιορισμών (περιοριστικές ευθείες) με παράλληλη σκιαγράφηση της ***εφικτής περιοχής*** (feasible region - κοινή περιοχή όλων των περιορισμών). Πιο συγκεκριμένα:
    i. Υποθέστε, ότι το πρόβλημα έχει m γραμμικούς περιορισμούς. Κάθε περιορισμός i, όπου i=1,…,m, έχει τη μορφή $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2$ [≤,≥,=] b_i. Χαράσσουμε την αντίστοιχη (περιοριστική όπως ονομάζεται) ευθεία: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$.
    ii. Το σύνολο των σημείων (x_1, x_2) που ικανοποιούν τον τυχαίο γραμμικό περιορισμό $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2$ [≤,≥,=] b_i, σχηματίζεται από τα σημεία της αντίστοιχης ευθείας $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$, μαζί με όλα τα σημεία που βρίσκονται στη μια πλευρά της.
    iii. Για να προσδιορίσετε τη συγκεκριμένη πλευρά, διαλέγετε ένα τυχαίο σημείο P(x_1, x_2) το οποίο δεν βρίσκεται επάνω στην ευθεία $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$. Αν ικανοποιεί τον περιορισμό, τότε και όλα τα σημεία της περιοχής που βρίσκεται από την πλευρά της ευθείας που βρίσκεται και το P(x_1, x_2), ικανοποιούν τον περιορισμό.
3. Έχοντας κατασκευάσει την περιοχή των εφικτών λύσεων, μπορείτε να προχωρήσετε στον υπολογισμό της βέλτιστης λύσης χρησιμοποιώντας εναλλακτικά δύο προσεγγίσεις:
    i. χαράσσοντας την ευθεία της αντικειμενικής συνάρτησης $Z = c_1x_1 + c_2x_2$ για αυθαίρετη τιμή Z (ευθεία ίσου κέρδους/κόστους ή ισοσταθμική ευθεία) και

μετακινώντας την παράλληλα προς την κατεύθυνση βελτίωσης της τιμής (αύξησης σε προβλήματα μεγιστοποίησης, μείωσης σε προβλήματα ελαχιστοποίησης) της αντικειμενικής συνάρτησης. Κάθε σημείο της εφικτής περιοχής στο οποίο τέμνονται δύο περιοριστικές ευθείες ονομάζεται ***κορυφή ή ακραίο σημείο (vertex, extreme point)***, και ανήκει στην εφικτή περιοχή καθώς βρίσκεται πάνω στο σύνορό της. Η κορυφή από την οποία διέρχεται η αντικειμενική συνάρτηση πριν απομακρυνθεί από την εφικτή περιοχή είναι η ***βέλτιστη λύση (optimal solution)*** του προβλήματος και είναι φυσικά μία εκ των εφικτών λύσεων. Σημειώνεται ότι αποδεικνύεται μαθηματικά, ότι η βέλτιστη λύση ενός π.γ.π. είναι μια από τις κορυφές της εφικτής περιοχής.

ii. υπολογίζοντας τις συντεταγμένες όλων των κορυφών της εφικτής περιοχής και επιλέγοντας εκείνη που μεγιστοποιεί ή ελαχιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση αναλόγως του κριτηρίου απόδοσης.

Ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού μπορεί να έχει μία ή άπειρες βέλτιστες λύσεις. Μπορεί ακόμη να μην έχει καμία εφικτή λύση (γεωμετρικά αυτό σημαίνει ότι η εφικτή περιοχή είναι το κενό σύνολο δηλαδή οι περιορισμοί δε συναληθεύουν πουθενά). Μία τελευταία περίπτωση αποτελεί ένα μη φραγμένο πρόβλημα (δηλαδή η τιμή Z της αντικειμενικής συνάρτησης μπορεί να πάρει οποιαδήποτε μεγάλη ή μικρή τιμή σε πρόβλημα μεγιστοποίησης ή ελαχιστοποίησης αντίστοιχα). Στην περίπτωση αυτή το πιθανότερο είναι η ύπαρξη κάποιου σφάλματος στην προσέγγιση του προβλήματος κατά τη δημιουργία του γραμμικού μοντέλου που χρησιμοποιείται για την αναπαράστασή του (στην πράξη δεν υπάρχουν μη φραγμένα προβλήματα, καθώς επιδιώκεται πάντα, στα μέτρα του εφικτού, η εύρεση μιας πεπερασμένης λύσης).

Επίλυση Προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού (π.γ.π.) με τη Μέθοδο Simplex

Η μέθοδος simplex αποτελεί το σημαντικότερο εργαλείο του γραμμικού προγραμματισμού και μία από τις μεγαλύτερες μαθηματικές επινοήσεις του εικοστού αιώνα. Πρόκειται για μια γρήγορη και αποτελεσματική αλγεβρική μέθοδο επίλυσης (προσδιορισμού της βέλτιστης λύσης) προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού ανεξαρτήτως πλήθους μεταβλητών. Η εξέλιξη της τεχνολογίας των προσωπικών υπολογιστών σε επίπεδο υλικού και λογισμικού, οδήγησε στην ευρεία χρήση της μεθόδου και από μη ειδικούς έτσι ώστε να αποτελεί την πιο γνωστή και διαδεδομένη ποσοτική μέθοδο επίλυσης διοικητικών προβλημάτων.

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο simplex το μοντέλο παριστάνεται από ένα ***πίνακα simplex (simplex tableau)***. Με στοιχειώδεις πράξεις μεταξύ των γραμμών του πίνακα ο αλγόριθμος οδηγείται στη διαμόρφωση νέων πινάκων simplex, μέχρι να φτάσει στον εντοπισμό της βέλτιστης λύσης. Η simplex βασίζεται στο γεγονός ότι η βέλτιστη λύση είναι μία από τις κορυφές της εφικτής περιοχής. Η τεχνική, ξεκινώντας από την αρχή των αξόνων (δηλαδή από το σημείο όπου όλες οι μεταβλητές απόφασης έχουν μηδενική τιμή), διερευνά τις κορυφές της εφικτής περιοχής (δηλαδή κάθε ενδιάμεσος πίνακας simplex αντιστοιχεί σε μια κορυφή) και τελικά εντοπίζει την καλύτερη κορυφή.

Δυϊκή Θεωρία (Duality Theory)

Δυϊκό (dual) - Πρωτεύον (primal) π.γ.π.

Κάθε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού συνδέεται με ένα νέο πρόβλημα το οποίο ονομάζεται ***δυϊκό (dual)***, ενώ το αρχικό πρόβλημα ονομάζεται ***πρωτεύον (primal)***. Το δυϊκό πρόβλημα παρέχει σημαντικές πληροφορίες οικονομικού χαρακτήρα σχετικά με τη βέλτιστη λύση του πρωτεύοντος προβλήματος, διευρύνοντας τον κύκλο των αποτελεσμάτων στην περιοχή της οριακής οικονομικής ανάλυσης.

Ενώ το πρωτεύον π.γ.π. διαπραγματεύεται το πρόβλημα εντοπισμού βέλτιστου προγράμματος που μεγιστοποιεί το συνολικό κέρδος ή ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος, το δυϊκό μοντέλο από την άλλη πλευρά διαπραγματεύεται ακριβώς το ίδιο πρόβλημα από την πλευρά των πόρων. Πολλές φορές δυνατό αλλά και σημαντικότερο για την επιχείρηση να μπορεί να εξασκήσει έλεγχο στους διαθέσιμους πόρους και στον τρόπο με τον οποίο συνεισφέρουν στο κέρδος. Το δυϊκό π.γ.π. (και η λύση του) συνδράμει στη θεώρηση το ιδίου προβλήματος από την πλευρά της αξίας των πόρων που χρησιμοποιούνται στο βέλτιστο πρόγραμμα και μπορεί να βοηθήσει στη λήψη αποφάσεων σχετικά με την απόκτηση ή μη επιπλέον πόρων.

Κατασκευή του δυϊκού π.γ.π.

Το δυϊκό π.γ.π. μπορεί να κατασκευαστεί από οποιοδήποτε αρχικό π.γ.π. χρησιμοποιώντας τους παρακάτω κανόνες:

1. Το δυϊκό π.γ.π. είναι ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης όταν το πρωτεύον είναι πρόβλημα μεγιστοποίησης (και αντίστροφα).
2. Σε κάθε περιορισμό του πρωτεύοντος π.γ.π. αντιστοιχεί μια μεταβλητή του δυϊκού προβλήματος. Το δυϊκό π.γ.π. έχει τόσες μεταβλητές απόφασης (πλήθους m) όσοι και οι περιορισμοί του πρωτεύοντος οι οποίες ονομάζονται ***δυϊκές μεταβλητές (dual variables)***.
3. Αν ένας περιορισμός *i* (i = 1, 2, …, m) του αρχικού π.γ.π. είναι της μορφής $\leq$ η αντίστοιχη δυϊκή μεταβλητή w_i θα είναι μη αρνητική δηλαδή $w_i \geq 0$.

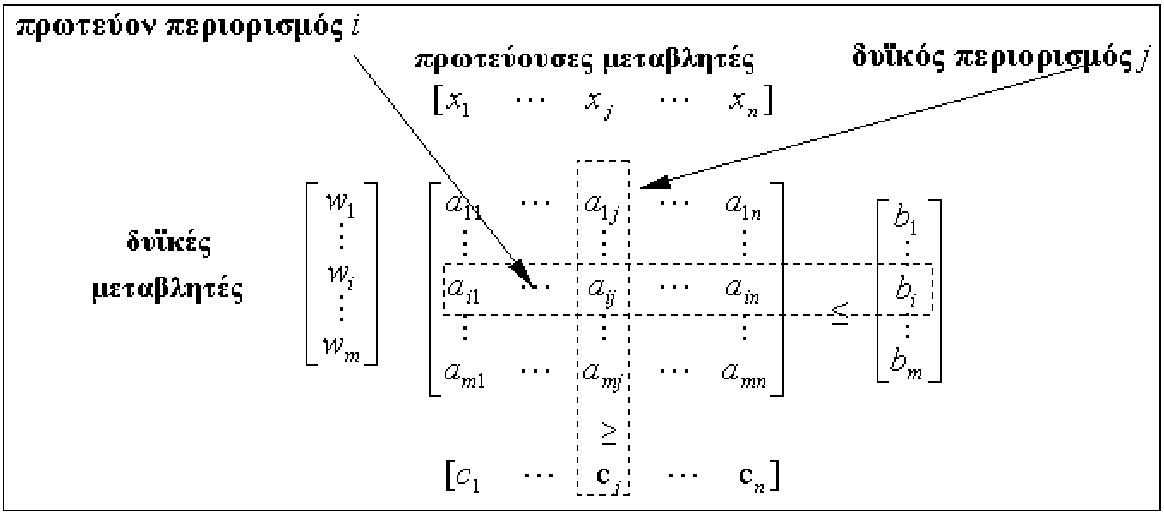
   Εάν ένας περιορισμός *i* του αρχικού είναι της μορφής $\geq$ η αντίστοιχη δυϊκή μεταβλητή w_i θα είναι μη θετική δηλαδή $w_i \leq 0$.

   Εάν ένας περιορισμός *i* του αρχικού προβλήματος είναι ισότητα, η αντίστοιχη δυϊκή μεταβλητή w_i δε θα περιορίζεται ως προς το πρόσημο δηλαδή $w_i \in R$.
4. Σε κάθε μεταβλητή απόφασης του πρωτεύοντος π.γ.π. αντιστοιχεί ένας δυϊκός περιορισμός - το δυϊκό π.γ.π. έχει τόσους περιορισμούς (πλήθους n) όσες και οι

μεταβλητές απόφασης του πρωτεύοντος.

5. Εάν μία μεταβλητή απόφασης του αρχικού είναι μη αρνητική δηλαδή $x_j \geq 0$ (j = 1, 2, …, n), τότε ο αντίστοιχος περιορισμός του δυϊκού είναι της μορφής $\geq$.
   Εάν μία μεταβλητή απόφασης του αρχικού είναι μη θετική δηλαδή $x_j \leq 0$, τότε ο αντίστοιχος περιορισμός του δυϊκού είναι της μορφής $\leq$.
   Εάν μία μεταβλητή απόφασης του αρχικού δεν περιορίζεται ως προς το πρόσημο δηλαδή $x_j \in R$, τότε ο αντίστοιχος περιορισμός του δυϊκού είναι ισότητα.
6. Οι συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης του δυϊκού π.γ.π. προκύπτουν από τα δεξιά μέλη των περιορισμών του αρχικού π.γ.π., ($b_1, b_2, \ldots, b_m$)
7. Τα δεξιά μέλη των περιορισμών του δυϊκού π.γ.π. προκύπτουν από τους αντικειμενικούς συντελεστές του πρωτεύοντος π.γ.π. ($c_1, c_2, \ldots, c_n$).

Ο τρόπος αντιστοίχισης των μεταβλητών του ενός προβλήματος με τους περιορισμούς του άλλου, καθώς και η σχέση μεταξύ των δομών του πρωτεύοντος π.γ.π. και του δυϊκού του, αποδίδονται παραστατικά στο παρακάτω σχήμα:



Παράδειγμα – οικονομική ερμηνεία του δυϊκού π.γ.π.

Θεωρούμε μια βιομηχανία Π, η οποία χρησιμοποιεί τρεις πρώτες ύλες R_1, R_2 και R_3 για την παραγωγή τεσσάρων προϊόντων P_1, P_2, P_3 και P_4. Θεωρούμε επίσης ότι υπάρχει μια άλλη βιομηχανία Δ η οποία χρησιμοποιεί τις ίδιες πρώτες ύλες R_1, R_2 και R_3 με τη βιομηχανία Π και η οποία για λόγους που σχετίζονται με τις ανάγκες της παραγωγής της, επιθυμεί να αυξήσει τα αποθέματα των τριών αυτών πρώτων υλών. Η βιομηχανία Δ σχεδιάζει την αγορά των αποθεμάτων πρώτων υλών της βιομηχανίας Π, έναντι συμφέροντος τιμήματος και για τις δύο βιομηχανίες. Προς την κατεύθυνση αυτή η βιομηχανία Δ πρέπει να προσφέρει στη βιομηχανία Π τέτοιες τιμές ώστε η βιομηχανία Π να προτιμήσει να πωλήσει τα αποθέματά της σε πρώτες ύλες αντί να τα χρησιμοποιήσει για την παραγωγή προϊόντων.

Η προσφορά της βιομηχανίας Δ είναι συνολικά ανταγωνιστική στο βαθμό που το εισόδημα y (τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του δυϊκού π.γ.π.-$y=b_1w_1+b_2w_2+\ldots+b_mw_m$) της βιομηχανίας Π από την πώληση των πρώτων υλών της στη βιομηχανία είναι τουλάχιστον ίσο με το κέρδος z (τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του πρωτεύοντος π.γ.π. - $z = c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n$) που θα είχε η βιομηχανία Π, αν χρησιμοποιούσε τις πρώτες ύλες της για την παραγωγή προϊόντων. Ο συλλογισμός αυτός οδηγεί στη μονόπλευρη ανισότητα $z \le y$, η οποία είναι γνωστή ως ***ασθενής δυϊσμός (weak duality).***

Άμεση συνέπεια του ασθενούς δυϊσμού είναι ότι οι τιμές των αντικειμενικών συναρτήσεων των δύο προβλημάτων (πρωτεύον και δυϊκό) για τις βέλτιστες λύσεις τους, πρέπει να είναι ίσες δηλαδή, εαν z^* είναι η μέγιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του πρωτεύοντος π.γ.π. και y^* είναι η ελάχιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του δυϊκού π.γ.π., ισχύει $z^* = y^*$. Η ισότητα αυτή αναφέρεται ως ***ισχυρός δυϊσμός (strong duality)*** και ρυθμίζει τη σχέση μεταξύ του πρωτεύοντος προβλήματος που είναι πρόβλημα μεγιστοποίησης και του δυϊκού του που είναι πρόβλημα ελαχιστοποίησης. **Η μέγιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του πρωτεύοντος προβλήματος μεγιστοποίησης είναι ίση με την ελάχιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του δυϊκού του, το οποίο είναι ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης**. Συνεπώς, μεταξύ των βέλτιστων λύσεων των δύο προβλημάτων, δηλαδή μεταξύ παραγωγής και πώλησης των πρώτων υλών, η βιομηχανία Π δεν έχει κανένα δίλημμα επιλογής.

Εκτός από τη σχέση μεταξύ των βέλτιστων τιμών των αντικειμενικών συναρτήσεων των δύο προβλημάτων, υπάρχει μια ακόμη σχέση με ιδιαίτερη οικονομική σημασία μεταξύ των βέλτιστων τιμών των μεταβλητών του πρωτεύοντος ($x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$) και του δυϊκού ($w_1^*, w_2^*, \ldots, w_m^*$) π.γ.π.

Η σχέση αυτή η οποία εκφράζει την **ισορροπία** ή **οικονομική ευστάθεια** μεταξύ των βέλτιστων λύσεων των δύο προβλημάτων αποτελεί το γνωστό **θεώρημα ισορροπίας** ή **θεώρημα του συμπληρωματικού περιθωρίου** ή της **συμπληρωματικής χαλαρότητας**. Σύμφωνα με το θεώρημα αυτό, εάν στη βέλτιστη λύση, μια μεταβλητή του ενός προβλήματος είναι θετική, τότε ο αντίστοιχος περιορισμός του άλλου είναι ενεργός (δεσμευτικός – ικανοποιείται ως ισότητα), ενώ εάν ένας περιορισμός του ενός προβλήματος είναι αδρανής (μη δεσμευτικός – δεν ικανοποιείται ως ισότητα), τότε η αντίστοιχη μεταβλητή του άλλου έχει τιμή ίση με το μηδέν.

Είναι γνωστό ότι η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του πρωτεύοντος είναι ίση με τη βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του δυϊκού, δηλαδή

$$z^* = (c_1x_1^* + c_2x_2^* + \ldots + c_nx_n^*) = y^* = (b_1w_1^* + b_2w_2^* + \ldots + b_mw_m^*)$$

Συνεπώς, εάν η διαθέσιμη ποσότητα b_i της πρώτης ύλης R_i αυξηθεί κατά Δb_i, τότε το εισόδημα της βιομηχανίας Π είτε από την παραγωγή των προϊόντων P_1, P_2, P_3 και P_4, είτε από την πώληση των πρώτων υλών R_1, R_2 και R_3 (διαθέσιμοι πόροι), αυξάνεται κατά $\Delta b_i \times w_i^*$.

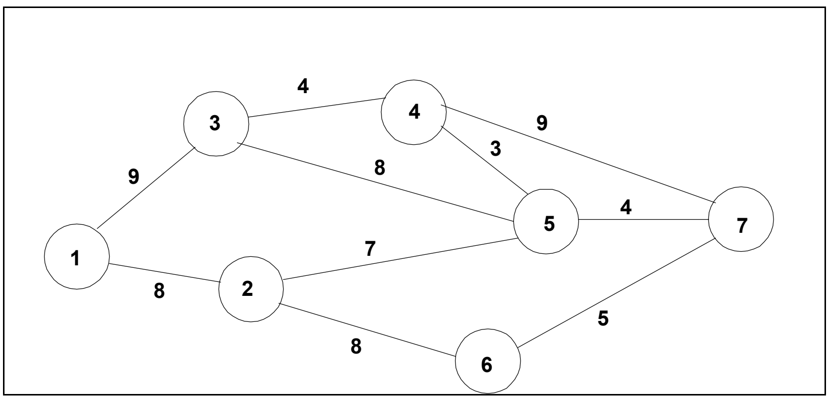
Η δυϊκή τιμή του πόρου (πρώτης ύλης) i (w_i^*), εκφράζει την **οριακή αξία** μιας επιπλέον μονάδας πρώτης ύλης i (το μέγιστο τίμημα, πέρα και πάνω από την τρέχουσα τιμή της πρώτης αυτής ύλης στην αγορά, το οποίο θα ήταν διατεθειμένη να καταβάλει η βιομηχανία Π για την αγορά μιας επιπλέον μονάδας από την πρώτη ύλη R_i), και υποδεικνύει τη βελτίωση που θα προκύψει στο κέρδος που θα είχε η βιομηχανία Π λόγω αύξησης της ποσότητας της πρώτης ύλης i κατά μια μονάδα. Υπό την έννοια αυτή, η αύξηση του κέρδους της βιομηχανίας Π λόγω της αύξησης της διαθεσιμότητας της πρώτης ύλης R_i κατά μια μονάδα ονομάζεται ***σκιώδης τιμή*** *(**shadow / dual price**)*.

Εάν από τη βέλτιστη λύση του π.γ.π. προκύπτει ότι γίνεται μερική χρησιμοποίηση της πρώτης ύλης R_i (ο αντίστοιχος περιορισμός δεν ικανοποιείται ως ισότητα – μη δεσμευτικός περιορισμός), τότε μια μικρή μεταβολή Δb_i στη διαθέσιμη ποσότητα από τη συγκεκριμένη πρώτη ύλη δεν έχει επιπτώσεις στο εισόδημα της βιομηχανίας Π. Στην περίπτωση αυτή η βέλτιστη τιμή της δυϊκής μεταβλητής w_i ισούται με μηδέν, δηλαδή $w_i^* = 0$.

Θεωρία Δικτύων

Βασικά συστατικά στοιχεία ενός δικτύου

Ένα δίκτυο αναπαρίσταται με τη μορφή διαγράμματος, το οποίο αποτελείται από μία συλλογή ***κόμβων (nodes)*** που παριστάνονται με κύκλους και οι οποίοι συνδέονται μεταξύ τους με γραμμές, οι οποίες ονομάζονται ***ακμές (arcs, branches)***. βασική υπόθεση είναι ότι υπάρχει ροή μεταξύ των κόμβων διαμέσου των ακμών. Στο ακόλουθο σχήμα βλέπετε ένα δίκτυο το οποίο αποτελείται από επτά κόμβους και δέκα ακμές.



Το διάγραμμα μοιάζει με ένα χάρτη στον οποίο οι ακμές ενδεχομένως παριστάνουν πόλεις και οι γραμμές δρόμους με τους οποίους συνδέονται. Το σχήμα είναι μία αναπαράσταση, ένα μοντέλο δηλαδή ενός πραγματικού δικτύου και επομένως δεν θα πρέπει να αναμένετε πάντα ακριβή απεικόνιση των στοιχείων που αποτελούν το πραγματικό σύστημα σε κλίμακα.

Κάθε κόμβος συμβολίζεται με έναν αριθμό ή γράμμα ή λέξη. Οι αριθμοί αυτοί μπορούν να χρησιμοποιηθούν για το συμβολισμό των ακμών. Για παράδειγμα λέμε ότι: «ο κόμβος 2 συνδέεται άμεσα με τον κόμβο 5 και η σύνδεση αυτή επιτυγχάνεται μέσω της ακμής 2-5». Κάθε ακμή που συνδέει δύο κόμβους συνοδεύεται από ένα αριθμό, ο οποίος μπορεί να παριστάνει το μήκος της διαδρομής της ακμής αυτής, το χρόνο που απαιτείται για τη διαδρομή, το κόστος της ακμής, τον παράγοντα του κινδύνου ή κάποια άλλη ποσότητα, η οποία προκύπτει όταν πραγματοποιηθεί η διαδρομή από τον ένα κόμβο στον άλλο. Οι ακμές του παραπάνω δικτύου ονομάζονται ***μη προσανατολισμένες (undirected arcs)***, επειδή επιτρέπεται η ροή και προς τα δύο άκρα τους. Στις περιπτώσεις που απαγορεύεται η ροή προς κάποια κατεύθυνση, χρησιμοποιούνται προσανατολισμένες ακμές, στις οποίες επιτρέπεται η ροή μόνο προς μία κατεύθυνση και αυτό διακρίνεται φαίνεται με τη χρήση βελών προς κάποια συγκεκριμένη κατεύθυνση. Μία ακολουθία συνεχόμενων ακμών ορίζει ένα ***μονοπάτι (path)***. Ένα μονοπάτι μπορεί να αποτελεί ένα ***κύκλο (cycle)***, όταν μπορεί να κανείς επιστρέψει στον κόμβο από τον οποίο έγινε η εκκίνηση χωρίς να περάσει από την ίδια ακμή. Όταν υπάρχει τουλάχιστον ένα μονοπάτι που μπορεί να συνδέσει κάθε δυάδα κόμβων ενός δικτύου τότε το δίκτυο ονομάζεται ***συνεκτικό (connected) δίκτυο***. Όταν το δίκτυο δεν περιέχει κύκλους, τότε είναι ένα ***δέντρο (tree)***. Ένα δέντρο που συνδέει όλους τους κόμβους ενός δικτύου ονομάζεται ***ζευγνύον δέντρο (spanning tree)***.

Στον επόμενο πίνακα βλέπετε μερικά αντιπροσωπευτικά συστήματα, τα οποία θα μπορούσαν να παρασταθούν με τη μορφή δικτύων.

Σύστημα	**Κόμβοι**	**Ακμές**	**Τιμή στις ακμές**	**Ροή**
Συγκοινωνιακό δίκτυο	Πόλεις, Διασταυρώσεις Σταθμοί επιβατών, Στάσεις	Δρόμοι, Αεροδιάδρομοι, Γραμμές τραίνων, κλπ	Απόσταση, Χρόνος ταξιδιού, Κόστος	Οχήματα, Μέσα μεταφοράς
Γραμμή παραγωγής	Σταθμοί επεξεργασίας	Ταινίες μεταφοράς	Χρόνος/κόστος μεταφοράς	Ημικατεργασμένα προϊόντα, Εργασίες
Δίκτυο υπολογιστών	Υπολογιστές, Εκτυπωτές, Άλλοι πόροι	Καλώδια, Συνδέσεις ασύρματης επικοινωνίας	Μήκος καλωδίου, Ύπάρξη σύνδεσης (ασύρματη), Κόστος	Δεδομένα
Δίκτυο υδροδότησης ή άρδευσης	Σημεία κατανάλωσης νερού, Αντλιοστάσια	Σωληνώσεις	Μήκος, Κόστος	Νερό

Το πρόβλημα της συντομότερης διαδρομής

Ο στόχος είναι να εντοπιστεί η ***συντομότερη διαδρομή (shortest route - path)***, δηλαδή εκείνη με το μικρότερο συνολικό μήκος ακμών (ή κόστος, χρονική διάρκεια, κίνδυνο κλπ), από μία αφετηρία προς ένα κόμβο τερματισμού (προορισμό). Η τεχνική της συντομότερης διαδρομής (αλγόριθμος) στηρίζεται στο γεγονός ότι σε κάθε βήμα μπορεί να βρεθεί ένας τουλάχιστον κόμβος, για τον οποίο η διαδρομή από την αφετηρία μέχρι αυτόν δεν μπορεί να βελτιωθεί περαιτέρω. Τότε, ο κόμβος αυτός ονομάζεται ***μόνιμος ή λυμένος (permanent)***. Στη συνέχεια, εξετάζεται αν μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο κόμβος αυτός ως ενδιάμεσος, βελτιώνοντας προσωρινές διαδρομές που έχουν βρεθεί για τους υπόλοιπους κόμβους του δικτύου συμπεριλαμβανόμενου και του προορισμού. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι να γίνει μόνιμος ο προορισμός ή, αν θέλουμε να βρούμε τη συντομότερη διαδρομή προς κάθε άλλο κόμβο από την αφετηρία, τότε ο αλγόριθμος τερματίζει όταν όλοι ο κόμβοι γίνουν μόνιμοι.

Μέθοδος εντοπισμού συντομότερης διαδρομής

1. Ξεκινάμε από την αφετηρία. Δεν υπάρχει προφανώς συντομότερη διαδρομή από την αφετηρία στον εαυτό της, οπότε ο πρώτος κόμβος γίνεται μόνιμος.
2. Εντοπίζουμε όλους τους κόμβους που συνδέονται άμεσα με την αφετηρία (δηλαδή μέσω μίας ακμής). Σημειώνουμε το μήκος των διαδρομών από την αφετηρία προς τους κόμβους αυτούς (προσωρινό μήκος διαδρομής). Επιλέγουμε έναν άμεσα συνδεδεμένο κόμβο, τον πλησιέστερο στην αφετηρία. Ο κόμβος αυτός ονομάζεται μόνιμος και μπαίνει σ' ένα σύνολο μόνιμων κόμβων μαζί με την αφετηρία.
3. Εντοπίζουμε όλους τους κόμβους που συνδέονται άμεσα με τουλάχιστον ένα από τους κόμβους του συνόλου των μόνιμων κόμβων. Σημειώνουμε το μήκος των διαδρομών από την αφετηρία προς τους κόμβους αυτούς (προσωρινό μήκος διαδρομής).
4. Από τους παραπάνω κόμβους επιλέγεται εκείνος με τη συντομότερη διαδρομή και εισέρχεται στο σύνολο των μόνιμων κόμβων. Η διαδρομή από την αφετηρία προς αυτόν δεν επιδέχεται περαιτέρω βελτίωση. Αν υπάρχει ισοβάθμιση επιλέγουμε αυθαίρετα έναν από τους ισοβαθμούντες.
5. Επαναλαμβάνουμε τα βήματα 3 και 4 μέχρι να γίνει μόνιμος ο προορισμός ή μέχρι να καταστούν όλοι οι κόμβοι μόνιμοι.

Το πρόβλημα του ελάχιστου ζευγνύοντος δέντρου

Ενώ στο πρόβλημα της συντομότερης διαδρομής ο στόχος είναι να εντοπιστεί η διαδρομή μικρότερης απόστασης (ή κόστους, χρόνου) από μία αφετηρία προς ένα τελικό κόμβο προορισμού, στο πρόβλημα του ***ελάχιστου ζευγνύοντος δέντρου (minimal spanning tree)*** εξετάζεται ένα δίκτυο ως ένα σύνολο κόμβων που πρέπει να επικοινωνούν όλοι μεταξύ τους. Εδώ η απαίτηση είναι ότι όλοι οι κόμβοι πρέπει να επικοινωνούν άμεσα ή έμμεσα μεταξύ τους, δηλαδή να συνδέονται μέσω ενός συνόλου ακμών, των οποίων το συνολικό κόστος (απόσταση, χρονική διάρκεια, κλπ) να είναι το ελάχιστο δυνατό.

Μέθοδος εντοπισμού του ελάχιστου ζευγνύοντος δέντρου

1. Επιλέγουμε αυθαίρετα ένα οποιοδήποτε κόμβο του δικτύου για να ξεκινήσουμε. Ο κόμβος αυτός εισέρχεται πρώτος στο σύνολο των συνδεδεμένων κόμβων.

2. Συνδέουμε τον προηγούμενο κόμβο με αυτόν που βρίσκεται πιο κοντά του από τους άμεσα συνδεδεμένους. Ο εν λόγω κόμβος εισέρχεται στο σύνολο των συνδεδεμένων.
3. Εντοπίζουμε τον κόμβο που είναι πιο κοντά σε κάποιον από τους συνδεδεμένους κόμβους και τον συνδέουμε και αυτόν. Σε περίπτωση ισοβάθμισης επιλέγουμε αυθαίρετα ένα από τους ισοβαθμούντες κόμβους. Τότε, πιθανώς υπάρχει εναλλακτική λύση.
4. Επαναλαμβάνουμε το βήμα 3 μέχρι να συνδεθούν όλοι οι κόμβοι.

Το δίκτυο που θα προκύψει αν διατηρηθούν ενεργές μόνο οι ακμές που χρησιμοποιήθηκαν από την παραπάνω διαδικασία, είναι ένα δέντρο και το πλήθος των ακμών του είναι όσο το πλήθος των κόμβων του δικτύου μείον 1. Προφανώς σε ένα δίκτυο μπορούμε να βρεθούν πολλά υποδίκτυα που να είναι δέντρα, δηλαδή να μην περιέχουν κύκλους και να έχουν ακμές όσο το πλήθος των κόμβων μείον 1. Το ελάχιστο ζευγνύον δέντρο όμως, είναι εκείνο που κατασκευάζεται με την παραπάνω περιγραφείσα διαδικασία και συνδέει όλους τους κόμβους άμεσα ή έμμεσα με ελάχιστο συνολικό κόστος ακμών.

Το πρόβλημα της μέγιστης ροής

Αφορά, το πρόβλημα την της δυναμικότητας ροής διαμέσου των ακμών, όταν η ροή διαμέσου των ακμών περιορίζεται ως προς το πλήθος (ή τον όγκο ή άλλη μονάδα μέτρησης) των αντικειμένων, που μπορούν να περάσουν από αυτές στη μονάδα του χρόνου, ή γενικότερα σε ένα ορίζοντα προγραμματισμού. Ο αντικειμενικός μας στόχος είναι να μεγιστοποιηθεί η ροή από έναν κόμβο, ο οποίος θεωρείται η ***πηγή (origin, source)***, σε έναν άλλο κόμβο, ο οποίος θεωρείται ο ***δέκτης (sink, destination)***, όταν οι ενδιάμεσες ακμές περιορίζουν τη συνολική ροή του συστήματος, χαρακτηριζόμενες από τη δυναμικότητα ροής τους.

Η μέθοδος εντοπισμού της μέγιστης ροής

Παραθέτουμε συνοπτικά τα βήματα του αλγορίθμου, ο οποίος χρησιμοποιείται για να εντοπίσει εκείνες τις ακμές που πρέπει να χρησιμοποιηθούν, ώστε να μεγιστοποιείται η ροή από μία πηγή σε ένα δέκτη.

1. Επιλέγουμε αυθαίρετα ένα μονοπάτι από την πηγή προς το δέκτη με θετική (μη μηδενική) δυναμικότητα ροής.
2. Αναπροσαρμόζουμε τις δυναμικότητες ροής των ακμών του μονοπατιού, αφαιρώντας τη δυναμικότητα ροής του απ' όλες τις δυναμικότητες των ακμών του προς την κατεύθυνση του δέκτη.
3. Αναπροσαρμόζουμε τις δυναμικότητες ροής των ακμών του μονοπατιού, προσθέτοντας τη δυναμικότητα ροής του σε όλες τις δυναμικότητες των ακμών του προς την κατεύθυνση της πηγής.
4. Ελέγχουμε αν υπάρχει μονοπάτι με θετική δυναμικότητα ροής προς το δέκτη. Αν ναι, επαναλαμβάνουμε από το βήμα 1, διαφορετικά έχουμε εντοπίσει την άριστη λύση.

Θεωρία Παιγνίων

Βασικές Έννοιες Παιγνίων

Η μεθοδολογία της θεωρίας παιγνίων χρησιμοποιείται στη λήψη των αποφάσεων για να περιγράψει καταστάσεις ανταγωνιστικής αλληλεξάρτησης και να δώσει απάντηση στα αντίστοιχα προβλήματα όπου εμπλέκονται περισσότεροι από ένας λήπτες αποφάσεων ταυτόχρονα. Ως *παίγνιο (game) θεωρείται εκείνη η κατάσταση λήψης απόφασης, κατά την οποία δύο ή περισσότεροι ορθολογικοί παίκτες με αντικρουόμενα ενδιαφέροντα επιλέγουν τρόπους ενέργειας, που δημιουργούν συνθήκες ανταγωνιστικής αλληλεξάρτησης*. Τα στοιχεία του παιγνίου είναι οι **παίκτες**, οι **κανόνες** που διέπουν το παίγνιο, οι **πληροφορίες** που υπάρχουν κατά τη διάρκεια του παιγνίου, η **αξιολόγηση** των διάφορων αποτελεσμάτων από τους παίκτες και οι **μεταβλητές** (απόφασης) που ελέγχονται από αυτούς. Τα στοιχεία αυτά είναι κοινά σε όλες τις ανταγωνιστικές καταστάσεις και αποτελούν το θεμέλιο λίθο της θεωρίας παιγνίων.

Ο **παίκτης** θεωρείται ως αυτόνομη μονάδα λήψης της απόφασης, παρά το γεγονός ότι δεν ελέγχει όλους τους παράγοντες που επηρεάζουν το αποτέλεσμα του παιγνίου. ***Στρατηγική*** ενός παίκτη είναι το σύνολο των κανόνων που ορίζουν τις εφικτές επιλογές που οφείλει να ακολουθεί σε κάθε κίνησή του μέχρι το τέλος του παιγνίου, γνωρίζοντας όλες τις πληροφορίες που αφορούν τις κινήσεις του αντίπαλου παίκτη. Στενά συνδεδεμένο με τη στρατηγική είναι το *αποτέλεσμα του παιγνίου*, το οποίο για κάθε παίκτη εξαρτάται από τη δική του στρατηγική και από τις στρατηγικές των ανταγωνιστών του. Όταν βρείτε την άριστη στρατηγική όλων των παικτών, τότε έχετε βρει και τη **λύση του παιγνίου**.

Η θεωρία παιγνίων διέπεται από την παραδοχή ότι ο αριθμός των παικτών (n) είναι πεπερασμένος, $n \geq 2$. **Παίγνιο μηδενικού αθροίσματος** (zero-sum game) είναι εκείνο, στο οποίο το κέρδος του ενός παίκτη είναι ίσο με τη ζημιά του άλλου παίκτη ή των άλλων παικτών. Αντίθετα, αν αυτό δεν συμβαίνει, επειδή κάποιο τρίτο μέρος λαμβάνει ορισμένες πληρωμές, τότε πρόκειται για **παίγνιο μη-μηδενικού αθροίσματος** (nonzero-sum game). Ένα παίγνιο δύο-παικτών μηδενικού-αθροίσματος περιγράφεται συνήθως με έναν **πίνακα αποτελεσμάτων ή πληρωμών** (payoff matrix), δηλαδή έναν πίνακα που δείχνει ποιες πληρωμές πρέπει να γίνουν μετά την εύρεση της λύσης του παιγνίου.

Αμιγείς Στρατηγικές - Κριτήριο Minimax

Έστω ότι τα αποτελέσματα ενός παιγνίου δύο-παικτών μηδενικού-αθροίσματος, δίνονται στον παρακάτω πίνακα που παριστάνει **τις πληρωμές για τον παίκτη Α**. Ο παίκτης Α των σειρών έχει m στρατηγικές και ο παίκτης Β των στηλών έχει n στρατηγικές.

Στρατηγικές Α	Στρατηγικές Β					Ελάχιστο σειράς
	B_1	B_2	..	B_{n-1}	B_n	
A_1	$α_{11}$	$α_{12}$	$α_{1.}$	$α_{1n-1}$	$α_{1n}$	α^*_{1j}
A_2	$α_{21}$	$α_{22}$	$α_{2.}$	$α_{2n-1}$	$α_{2n}$	..
..	..	..	..	..	..	..
A_{m-1}	$α_{m-11}$	$α_{m-12}$	$α_{m-11.}$	$α_{m-1n-1}$	$α_{m-1n}$	..
A_m	$α_{m1}$	$α_{m2}$	$α_{m.}$	$α_{mn-1}$	$α_{mn}$	α^*_{mj}
Μέγιστο στήλης	a^*_{j1}	α^*_{j2}	..	..	α^*_{jn}	

Οι τιμές του πίνακα αντιπροσωπεύουν το κέρδος (ή ζημιά αν είναι αρνητικό) του παίκτη Α και επομένως τη ζημιά (κέρδος αν είναι αρνητικό για τον παίκτη Α) του παίκτη Β, μια και στο παίγνιο δύο-παικτών μηδενικού-αθροίσματος το κέρδος του ενός παίκτη είναι ίσο με τη ζημιά του άλλου.

Κατά τη διάρκεια του παιγνίου οι παίκτες γνωρίζουν τόσο τις δικές τους στρατηγικές, όσο και τις στρατηγικές του αντιπάλου τους. Επίσης, κάθε παίκτης γνωρίζει ότι ο αντίπαλος γνωρίζει τις πληρωμές του πίνακα. Επιπλέον κάθε παίκτης γνωρίζει ότι ο αντίπαλος του ξέρει ότι αυτός γνωρίζει τις πληρωμές του πίνακα, κ.ο.κ. (Common Knowledge -κοινή γνώση). Ο αντικειμενικός σκοπός του παίκτη Α είναι η μεγιστοποίηση του κέρδους του ενώ του Β η ελαχιστοποίηση της ζημιάς του. Επειδή ο Α ενδιαφέρεται για το μέγιστο δυνατό κέρδος και ο Β για την ελάχιστη ζημιά, γνωρίζοντας ο καθένας τους τον αντικειμενικό σκοπό του αντιπάλου, προκύπτει ότι ο Α θα ακολουθεί τη λεγόμενη στρατηγική **maximin** δηλαδή επιλέγει από κάθε στρατηγική την μικρότερη τιμή και κατόπιν επιλέγει την μέγιστη τιμή από αυτές τις ελάχιστες τιμές. Αντίστοιχα ο Β ακολουθεί τη λεγόμενη στρατηγική **minimax**. Δηλαδή επιλέγει το ελάχιστο των μέγιστων που προκύπτουν από κάθε στρατηγική. Με άλλα λόγια κάθε παίκτης προσπαθεί να ελαχιστοποιήσει το χειρότερο που μπορεί να πάθει! Αυτό για τον παίκτη Α ερμηνεύεται ως εντοπισμός του μεγαλύτερου από τα ελάχιστα (από κάθε στρατηγική) δηλαδή maximin, ενώ για τον παίκτη Β ερμηνεύεται ως επιλογή του μικρότερου από τα μέγιστα (κάθε στήλης-στρατηγικής) δηλαδή minimax. ***Το κριτήριο – διαδικασία εντοπισμού αυτών των στρατηγικών ονομάζεται εφαρμογή του κριτηρίου minimax***.

Εάν ισχύει η σχέση $\max_i \min_j \alpha_{ij} = \min_j \max_i \alpha_{ij} = V$,

όπου $[α_{ij}]$ ο πίνακας πληρωμών, τότε το V αντιπροσωπεύει την τιμή του παιγνίου και το στοιχείο του πίνακα που είναι ίσο με το V ονομάζεται *σημείο ισορροπίας ή σαγματικό σημείο (saddle point)*. Η τιμή του παιγνίου, αν υπάρχει ισορροπία, είναι το μέγιστο από τα ελάχιστα των σειρών και το ελάχιστο από τα μέγιστα των στηλών και είναι το κέρδος του παίκτη Α και η ζημία του παίκτη Β στο οποίο οι δύο παίκτες θα ισορροπήσουν γιατί κάθε άλλος συνδυασμός στρατηγικών οδηγεί, για κάποιον από τους δύο παίκτες, σε χειρότερη απόδοση. Όταν κάθε παίκτης μπορεί να εντοπίσει μία στρατηγική για να ισορροπήσει, τότε η στρατηγική του αυτή ονομάζεται **αμιγής** στρατηγική. Σημειώνεται, ότι είναι δυνατόν σε ένα παίγνιο να υπάρχουν περισσότερα του ενός σαγματικά σημεία (με ίδια φυσικά τιμή) και επομένως περισσότερες από μία αμιγείς στρατηγικές. Υπάρχουν και παίγνια δύο-παικτών μηδενικού-αθροίσματος χωρίς σημείο ισορροπίας τα οποία θα εξεταστούν παρακάτω.

Στο επόμενο παράδειγμα, βλέπετε ένα πίνακα πληρωμών για τον παίκτη Α, στον οποίο το σημείο ισορροπίας βρέθηκε με το κριτήριο minimax και είναι η τιμή V=3 που είναι η maximin των σειρών και η minimax των στηλών. Προσέξτε ότι αυτό επιτυγχάνεται με τους συνδυασμούς των αμιγών στρατηγικών (Α1, Β1) ή (Α1, Β3).

Στρατηγικές Α	Στρατηγικές Β B_1	B_2	B_3	Ελάχιστο σειράς
A_1	3 *	5	3 *	3*
A_2	-2	0	1	-2
A_3	1	4	-3	-3
Μέγιστο στήλης	3 *	5	3 *	V=3

Κυρίαρχες στρατηγικές - υποδεέστερες στρατηγικές

Στη θεωρία παιγνίων μεγάλη σημασία έχει η έννοια της **κυρίαρχης ή υπερέχουσας** στρατηγικής, με την οποία είναι δυνατή η μείωση των διαστάσεων ενός πίνακα πληρωμών. Αυτό γίνεται με απαλοιφή των **υποδεέστερων** στρατηγικών, δηλαδή των στρατηγικών εκείνων τις οποίες ο παίκτης δεν θα επιλέξει ποτέ, επειδή κυριαρχούνται από κάποια άλλη. Μια στρατηγική ενός παίκτη είναι υποδεέστερη και μπορεί να απομακρυνθεί από το παίγνιο, αν κάθε στοιχείο της είναι ***χειρότερο ή ίδιο (ίσο)*** από το αντίστοιχο στοιχείο κάποιας άλλης στρατηγικής του ίδιου παίκτη. Στο προηγούμενο παράδειγμα, θα μπορούσαμε να είχαμε διαγράψει τις στρατηγικές Α2 και Α3 του παίκτη Α διότι είναι υποδεέστερες της Α1, αφού τα στοιχεία τους είναι μικρότερα ένα προς ένα από αυτά της Α1. Επίσης, θα μπορούσαμε να είχαμε διαγράψει τη στρατηγική Β2 γιατί τα στοιχεία της εν λόγω στήλης είναι μεγαλύτερα από της Β1 (και από της Β3, πάντως αρκεί να υπάρχει μία υπερέχουσα). Παρατηρήστε, ότι σε ένα πίνακα πληρωμών για τον παίκτη Α, ο οποίος βρίσκεται στις σειρές, υποδεέστερη στρατηγική για τον παίκτη Α είναι εκείνη που τα στοιχεία της σειράς της είναι μικρότερα ή ίσα από κάποιας άλλης σειράς, ενώ υποδεέστερη στρατηγική για τον παίκτη Β είναι εκείνη που η στήλη της έχει τα στοιχεία της μεγαλύτερα ή ίσα από κάποιας άλλης στήλης. Στο παράδειγμα, ο αρχικός πίνακας στο τέλος θα μειωθεί στον ακόλουθο:

Στρατηγικές A	Στρατηγικές B B_1	B_3	Ελάχιστο σειράς
A_1	3 *	3 *	3*
Μέγιστο στήλης	3 *	3 *	V=3

ο οποίος καταδεικνύει την ύπαρξη ισορροπίας στους συνδυασμούς στρατηγικών που αναφέραμε παραπάνω. Έχετε υπόψη, ότι η διαγραφή υποδεέστερων στρατηγικών δεν είναι απαραίτητο να γίνεται εξ΄ αρχής, δηλαδή μία στρατηγική που αρχικά δε φαίνεται να είναι υποδεέστερη κάποιας άλλης, μπορεί να καταστεί υποδεέστερη και να δύναται να διαγραφεί, μετά από την απάλειψη κάποιων άλλων υποδεέστερων στρατηγικών. Κοιτάξτε το ακόλουθο παράδειγμα:

Στρατηγικές A	Στρατηγικές B B_1	B_2	B_3	Ελάχιστο σειράς
A_1	4	1	3	1
A_2	5*	10	8	5*
Μέγιστο στήλης	5*	10	8	V= 5

Στον παραπάνω πίνακα, με εφαρμογή του κριτηρίου minimax, αποδεικνύεται εύκολα ότι το σημείο ισορροπίας είναι η τιμή 5 στην τομή των στρατηγικών (Α2, Β1). Αυτή είναι και η λύση του παιγνίου με αμιγείς στρατηγικές. Αν θα θέλατε να διαγράψετε τις υποδεέστερες στρατηγικές πριν την εφαρμογή του κριτηρίου minimax, τότε παρατηρείστε ότι αρχικά για τον παίκτη Β δεν υπάρχει υποδεέστερη στρατηγική αφού καμία στήλη δεν έχει όλα της τα στοιχεία μεγαλύτερα ή ίσα από κάποιας άλλης. Από την άλλη πλευρά όμως, η σειρά της στρατηγικής Α2 είναι υπερέχουσα της Α1, οπότε η Α1 μπορεί να διαγραφεί και έτσι μεταβαίνουμε στον επόμενο πίνακα.

Στρατηγικές A	Στρατηγικές B B_1	B_2	B_3
A_2	5	10	8

Παρατηρείστε, ότι οι στρατηγικές Β2 και Β3 μπορούν τώρα να διαγραφούν, αφού το στοιχείο που τους απέμεινε (10 και 8 αντιστοίχως) είναι μεγαλύτερο από το 5. Αν τις διαγράψουμε, απομένει ένας πίνακας διάστασης 1×1 που δίνει τις άριστες αμιγείς στρατηγικές (Α2 - Β1) και την τιμή του παιγνίου (V=5), που βρέθηκαν προηγουμένως με απευθείας εφαρμογή του κριτηρίου minimax.

Παίγνια δύο-παικτών σταθερού-αθροίσματος

Ονομάζονται τα παίγνια δύο-παικτών, στα οποία για οποιοδήποτε συνδυασμό επιλογών των δυο παικτών το άθροισμα των ανταμοιβών τους είναι μια σταθερά c (θετική ή αρνητική). Ένα παίγνιο δύο-παικτών μηδενικού-αθροίσματος είναι ένα παίγνιο δύο-παικτών σταθερού-αθροίσματος με c=0.

Μικτές Στρατηγικές

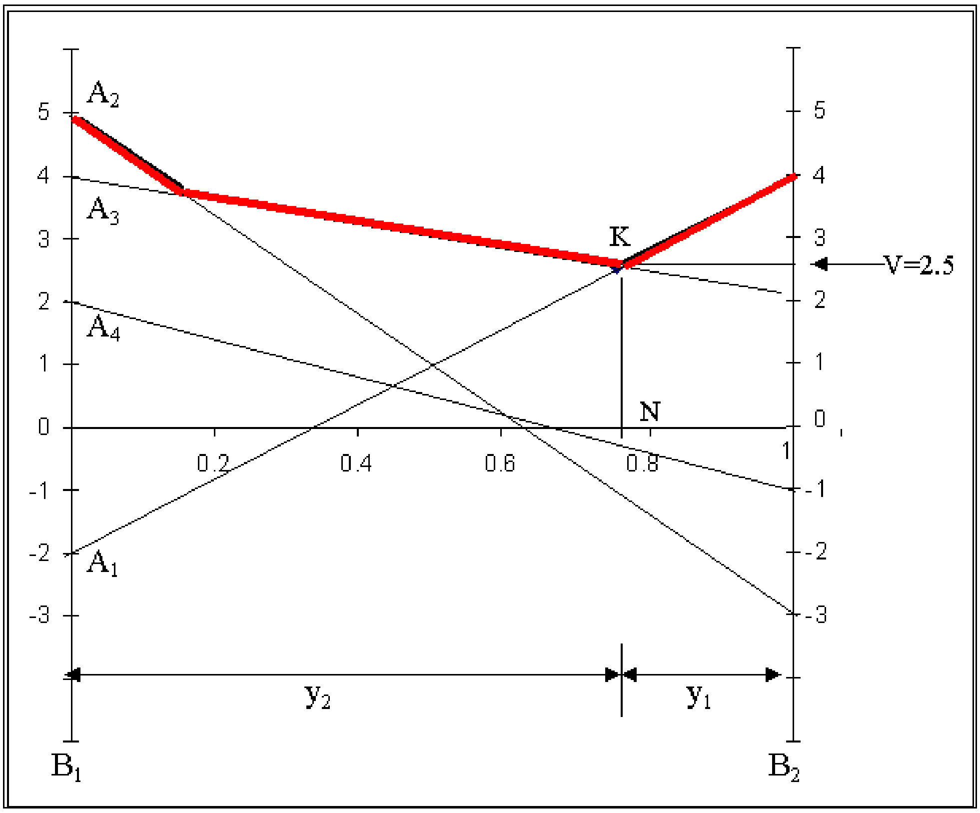
Ακολουθείται σε παίγνια που δεν έχουν σημείο ισορροπίας, οπότε οι παίκτες δεν μπορούν να ακολουθήσουν αμιγείς στρατηγικές. Σ' αυτή την περίπτωση συνιστάται όπως κάθε παίκτης ορίσει μία πιθανότητα για κάθε στρατηγική του με στόχο να μεγιστοποιήσει το προσδοκώμενο κέρδος. Οι πιθανότητες με τις οποίες κάθε παίκτης εφαρμόζει τις στρατηγικές του ονομάζονται **μικτή στρατηγική**. Για να προσδιοριστεί η βέλτιστη μικτή στρατηγική για κάθε παίκτη, υπάρχουν διάφοροι τρόποι ανάλογα με τον αριθμό των στρατηγικών του κάθε παίκτη. Εάν από τα δεδομένα του παιγνίου μπορείτε να απαλείψετε τις υποδεέστερες στρατηγικές ώστε κάποιος παίκτης να έχει το πολύ δύο στρατηγικές, τότε η βέλτιστη στρατηγική μπορεί να βρεθεί με την γραφική μέθοδο όπου ένα παίγνιο **nx2** ή **2xn** μπορεί να μετασχηματισθεί σε ένα παίγνιο **2x2**. Εάν αυτό δεν είναι εφικτό, τότε έχετε υπόψη ότι κάθε πρόβλημα μπορεί να επιλυθεί ως πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού με τη μέθοδο simplex. Στην συνέχεια παρατίθεται ένα παράδειγμα εύρεσης μικτής στρατηγικής με τη χρήση της γραφικής μεθόδου.

Παράδειγμα Παιγνίου n×2 (Γραφική μέθοδος)

Υποθέστε ότι δίνεται ο πίνακας πληρωμών ενός παιγνίου, στον οποίο ο παίκτης Α έχει τέσσερις στρατηγικές και ο Β δύο και ότι κάθε παίκτης χρησιμοποιεί τις στρατηγικές του με τις αντίστοιχες πιθανότητες που δίνονται στον πίνακα αυτό.

Στρατηγικές Α		Στρατηγικές Β B_1 y_1	 B_2 y_2
A_1	x_1	-2	4
A_2	x_2	5	-3
A_3	x_3	4	2
A_4	x_4	2	-1

Κατ' αρχήν, με εφαρμογή του κριτηρίου minimax βλέπετε ότι δεν υπάρχει σαγματικό σημείο (να το επιβεβαιώσετε) οπότε η βέλτιστη στρατηγική για κάθε παίκτη θα πρέπει να είναι μία μικτή στρατηγική.



Γραφική επίλυση του παιγνίου

Στο παραπάνω σχήμα, οι κάθετοι άξονες, που απέχουν μεταξύ τους μια μονάδα, αντιπροσωπεύουν τις δύο στρατηγικές του παίκτη Β. Οι τέσσερις στρατηγικές του παίκτη Α απεικονίζονται στο σχήμα αυτό από τα τέσσερα αντίστοιχα ευθύγραμμα τμήματα. Η στρατηγική A_4 κυριαρχείται από τη στρατηγική A_3 και μπορεί φυσικά να διαγραφεί, μια και ο παίκτης Α δεν θα την ακολουθήσει ποτέ. Επειδή ο παίκτης Α ενδιαφέρεται για το μέγιστο δυνατό κέρδος, θα κινηθεί στο επάνω τεθλασμένο ευθύγραμμο τμήμα του σχήματος. Ο παίκτης Β που έχει ως σκοπό του την ελάχιστη δυνατή ζημιά θα επιλέξει το Ν, δηλαδή τις τιμές των πιθανοτήτων y_1 και y_2, κατά τρόπο, ώστε το σημείο Κ (σημείο minimax) να είναι το χαμηλότερο σημείο του υψηλότερου τεθλασμένου ευθύγραμμου τμήματος. Όμως, το σημείο Κ είναι το σημείο τομής των δύο ευθύγραμμων τμημάτων που αντιστοιχούν στις στρατηγικές A_1 και A_3, οπότε το 4×2 παίγνιο μειώνεται στο 2×2 παίγνιο του παρακάτω πίνακα

Στρατηγικές Α		Στρατηγικές Β B_1 y_1	B_2 y_2
A_1	x_1	-2	4
A_3	x_3	4	2

Έστω $V(A,B_i)$ η προσδοκώμενη πληρωμή στον παίκτη Α όταν ο Β εφαρμόζει τη στρατηγική B_i. Τότε, όπως είναι γνωστό, για την άριστη μικτή στρατηγική του παίκτη Α, θα πρέπει να ισχύει $V(A,B_1) = V(A,B_2)$ διότι το προσδοκώμενο κέρδος του πρέπει να είναι το ίδιο ανεξάρτητα της στρατηγικής του άλλου παίκτη (κριτήριο minimax για τις μεικτές στρατηγικές). Οπότε:

$$-2x_1 + 4x_3 = 4x_1 + 2x_3$$

ή $3x_1 = x_3$

και $x_1 + x_3 = 1$.

Επιλύνοντας το σύστημα αυτό θα βρείτε ότι x_1=0.25 και x_3=0.75, οπότε το μέγιστο προσδοκώμενο κέρδος του Α είναι $V(A) = -2 \cdot 0.25 + 4 \cdot 0.75 = 2.5$.

Για την άριστη μικτή στρατηγική του παίκτη Β θα πρέπει ομοίως να είναι $V(B,A_1) = V(B,A_3)$ δηλαδή,

$$-2y_1 + 4y_2 = 4y_1 + 2y_2$$

ή $3y_1 = y_2$

και $y_1 + y_2 = 1$.

Η λύση του συστήματος αυτού δίνει y_1=0.25 και y_2=0.75, οπότε η ελάχιστη προσδοκώμενη ζημιά του Β είναι $V(B) = -2 \cdot 0.25 + 4 \cdot 0.75 = 2.5$ που φυσικά είναι ίδια με το V(A). Από τα παραπάνω προκύπτει ότι μακροπρόθεσμα, στις τέσσερις φορές που παίζουν το παίγνιο οι δύο παίκτες, ο Α θα παίζει μια φορά τη στρατηγική A_1 και τρεις φορές τη στρατηγική A_3, ενώ ο Β θα παίζει μια φορά τη B_1 και τρεις φορές τη B_2,. Αν έτσι είναι τα πράγματα, το μέσο κέρδος του Α είναι η προσδοκώμενη τιμή του παιγνίου $V = V(A) = V(B) = 2.5$.

Θεωρία Ουρών Αναμονής

Οι ουρές αναμονής αποτελούν καθημερινό και συνηθισμένο φαινόμενο και εμφανίζονται σε συστήματα εξυπηρέτησης, στα οποία η ζήτηση για κάποια υπηρεσία δεν μπορεί να ικανοποιηθεί μερικές φορές άμεσα από τη δυναμικότητα του συστήματος που παρέχει την εξυπηρέτηση, λόγω των τυχαίων διακυμάνσεων που παρατηρούνται τόσο στον ρυθμό προσέλευσης όσο και στον χρόνο εξυπηρέτησης κάθε πελάτη από το σύστημα. Η γνώση των λειτουργικών χαρακτηριστικών των συστημάτων εξυπηρέτησης και των ουρών αναμονής μπορεί να οδηγήσει σε θεαματικές βελτιώσεις της απόδοσής τους. Η απόδοση του συστήματος αξιολογείται με βάση τις τιμές ορισμένων βασικών δεικτών (δείκτες απόδοσης – μέτρα λειτουργικότητας), όπως για παράδειγμα ο μέσος χρόνος αναμονής ενός πελάτη στην ουρά, ο συνολικός μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα, το μέσο πλήθος πελατών στην ουρά, το μέσο πλήθος πελατών στο σύστημα, το ποσοστό απασχόλησης της θέσης εξυπηρέτησης ή των θέσεων εξυπηρέτησης κλπ. Στόχος της μελέτης ενός συστήματος εξυπηρέτησης είναι η ελαχιστοποίηση του κόστους λειτουργίας του υπό τον όρο ότι οι τιμές των δεικτών απόδοσης του συστήματος ικανοποιούν κάποιες ελάχιστες προδιαγραφές.

Χαρακτηριστικά Συστημάτων Ουρών Αναμονής

Πηγή Πελατών: Ο πληθυσμός από τον οποίο προέρχονται οι αφίξεις των πελατών θεωρείται είτε άπειρος (πρακτικά πολύ μεγάλου μεγέθους) όπως π.χ. πελάτες τραπεζών, αυτοκίνητα σε σταθμούς διοδίων κλπ, ή πεπερασμένος όπως για παράδειγμα στην περίπτωση των μηχανών ενός εργοστασίου πού αναμένουν επισκευή. Στα πιο πολλά προβλήματα ουρών αναμονής, εκτός αν ειδικά αναφερθούμε σε πεπερασμένο πληθυσμό, θα θεωρούμε ότι ο πληθυσμός από τον οποίο προέρχονται οι “πελάτες” του συστήματος είναι άπειρος.

Αφίξεις στο Σύστημα: Σε κάθε σύστημα ουράς αναμονής υπάρχουν "πελάτες" οι οποίοι προσέρχονται για εξυπηρέτηση. Με τον γενικό όρο "πελάτης" εννοούμε τα πρόσωπα, αντικείμενα ή συμβάντα που εισέρχονται στο σύστημα για εξυπηρέτηση. Οι αφίξεις σε ένα σύστημα ουράς αναμονής χαρακτηρίζονται από τα εξής βασικά χαρακτηριστικά:

Κατανομή Αφίξεων: Οι "πελάτες" καταφθάνουν στο σύστημα είτε σύμφωνα με κάποια γνωστό και σταθερό ρυθμό (π.χ. ένα ημικατεργασμένο προϊόν σε ένα σταθμό εργασίας ακριβώς κάθε 15 λεπτά) ή αλλιώς, όπως στις περισσότερες περιπτώσεις, σε «τυχαίες» χρονικές στιγμές (π.χ. ασθενείς σε εφημερίες). Οι αφίξεις θεωρούνται τυχαίες όταν είναι ανεξάρτητες η μία από την άλλη (δεν επηρεάζεται μία άφιξη από κάποια προηγούμενη) και η χρονική στιγμή πραγματοποίησης τους δεν μπορεί να προβλεφθεί ακριβώς. Στην περίπτωση αυτή ο μέσος ρυθμός των αφίξεων χαρακτηρίζεται από το μέσο αριθμό αφίξεων ανά μονάδα του χρόνου (π.χ. “πελάτες” ανά ώρα). Στην θεωρία ουρών αναμονής, η τυχαία μεταβλητή «αριθμός των αφίξεων ανά μονάδα χρόνου», μπορεί πολλές φορές να προσεγγισθεί από την κατανομή **Poisson**. Αν γίνει αυτό, τότε η μέση τιμή της Poisson αντιστοιχεί στη μέση τιμή των αφίξεων ανά μονάδα χρόνου, συμβολίζεται με λ και αποτελεί το μέσο ρυθμό αφίξεων στη μονάδα του χρόνου. Για παράδειγμα, αν σε ένα σύστημα εξυπηρέτησης η διαδικασία αφίξεων ακολουθεί την κατανομή Poisson και καταφθάνουν κατά μέσο όρο 10 πελάτες ανά ώρα, τότε λ=10 και αυτό αποτελεί τη μέση τιμής της κατανομής Poisson που χαρακτηρίζει τη διαδικασία αφίξεων. Αν παρασταθεί με X το πλήθος των αφίξεων που πιθανόν να πραγματοποιηθούν σε μία ώρα (δηλαδή στη μονάδα του χρόνου), τότε όπως αναφέρθηκε, το X είναι τυχαία μεταβλητή και η πιθανότητα να πάρει αυτή κάποια συγκεκριμένη, τιμή έστω x (το x είναι δεδομένος αριθμός), δίνεται από την σχέση:

$$\boxed{P\{X = \mathrm{x}\} = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{x}}{x!}, x = 0,1,2,3,...}$$

Σημειώστε, ότι όταν ο μέσος ρυθμός αφίξεων είναι λ (=10 άτομα/ώρα όπως αναφέρθηκε παραπάνω), τότε είναι λογικό να υποτεθεί ότι ανάμεσα σε δύο διαδοχικές αφίξεις, παρεμβάλλεται χρόνος που κατά μέσο όρο είναι ίσος με 1/λ (= 1/10 ώρες δηλαδή 6 λεπτά στο παράδειγμα).

Χρόνος Εξυπηρέτησης: Ο χρόνος που απαιτείται για την εξυπηρέτηση του πελάτη μπορεί να είναι σταθερός (π.χ. σε ένα αυτόματο πλυντήριο αυτοκινήτων όπου απαιτούνται ακριβώς 10 λεπτά για κάθε όχημα, σε ένα σταθμό επεξεργασίας σε μία βιομηχανία όπου απαιτούνται ακριβώς τρία δευτερόλεπτα για να τοποθετηθεί ένα εξάρτημα), ή όπως συμβαίνει και στα περισσότερα συστήματα ουρών αναμονής, να παρουσιάζει μεταβλητότητα που οφείλεται σε διάφορους παράγοντες. Για πολλές περιπτώσεις συστημάτων ουράς αναμονής, μπορεί να θεωρηθεί ότι ο χρόνος εξυπηρέτησης ακολουθεί την **εκθετική κατανομή**, με μέση τιμή 1/μ. Για παράδειγμα, αν σε ένα ταμείο μίας τράπεζας ο ταμίας είναι σε θέση να εξυπηρετήσει κατά μέσο όρο 15 άτομα ανά ώρα, τότε λέμε ότι ο μέσος ρυθμός εξυπηρέτησης είναι το μ=15 άτομα / ώρα και λογικά 1/μ= 1/15 ώρες αποτελεί το μέσο χρόνο εξυπηρέτησης (δηλαδή στην προκείμένη περίπτωση είναι 1/μ=1/15 ώρες = 4 λεπτά). Αν με παραστήσετε με Τ το χρόνο που απαιτείται για μία εξυπηρέτηση, τότε το Τ είναι τυχαία μεταβλητή και η πιθανότητα ο χρόνος αυτός να είναι μικρότερος ή ίσος από μία δεδομένη τιμή έστω t, δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{P(T \leq t) = 1 - e^{-\frac{1}{\mu}t}}$$

όπου με **μ** όπως αναφέρθηκε συμβολίζεται ο μέσος αριθμός πελατών που εξυπηρετούνται στη χρονική μονάδα.

Θέσεις εξυπηρέτησης:Για τον πελάτη που αναμένει στην ουρά μπορεί να υπάρχουν περισσότερες από μία παράλληλες θέσεις εξυπηρέτησης (π.χ. ταμεία στην τράπεζα, διάδρομοι διοδίων, ταμεία σε υπεραγορές κλπ.). Στην περίπτωση αυτή ο πελάτης εξυπηρετείται από την πρώτη διαθέσιμη θέση εξυπηρέτησης. Επίσης, άλλες φορές για την πλήρη εξυπηρέτηση του πελάτη απαιτείται η διαδοχική προσέλευσή του σε περισσότερες από μία θέσεις εξυπηρέτησης, δηλαδή εξυπηρετείται σε διαδοχικές φάσεις (π.χ. η διεκπεραίωση κάποιας εργασίας που απαιτεί εγκρίσεις σε πολλά στάδια).

Λειτουργία της Ουράς Αναμονής: Η ουρά σχηματίζεται από «πελάτες» που αναμένουν τη σειρά τους να εξυπηρετηθούν. Ο τρόπος με τον οποίο επιλέγεται ένας πελάτης που αναμένει στην ουρά για να εξυπηρετηθεί είναι ένα από τα κύρια χαρακτηριστικά των συστημάτων ουρών αναμονής και ονομάζεται **πειθαρχία**. Οι μέθοδοι που εφαρμόζονται είναι κυρίως οι εξής:

- **FIFO (First In First Out)**: Οι πελάτες εξυπηρετούνται με βάση τη σειρά προσέλευσης.
- **LIFO (Last In First Out):** Οι πελάτες εξυπηρετούνται αντίστροφα με την σειρά προσέλευσης.
- **Τυχαία Επιλογή:** Οι πελάτες επιλέγονται τυχαία από τους αναμένοντες στην ουρά.
- **Προτεραιότητες**: Οι πελάτες χωρίζονται σε κατηγορίες με διαφορετικές προτεραιότητες. Επιλέγονται πρώτα οι πελάτες με την πιο υψηλή προτεραιότητα.

Μεταξύ πελατών με την ίδια κλάση προτεραιότητας επιλέγεται αυτός που αναμένει τον περισσότερο χρόνο (π.χ. τα άτομα με ειδικές ανάγκες, οι ηλικιωμένοι, εξυπηρετούνται πρώτα)

Ένα ακόμη ενδιαφέρον στοιχείο που αφορά την ουρά αναμονής είναι η **χωρητικότητά** της. Η χωρητικότητα της ουράς μπορεί να είναι άπειρη (πρακτικά, όποιος προσέρχεται μπορεί να μείνει) ή πεπερασμένη (όταν κάποιος προσέρχεται αφού έχουν καταληφθεί όλες οι θέσεις αναμονής, δεν μπορεί να εισέλθει στο σύστημα).

Συμβολισμός μοντέλων: Ανάλογα με τα χαρακτηριστικά λειτουργίας ενός συστήματος ουράς αναμονής χρησιμοποιείται και ένα διαφορετικό μοντέλο για την ανάλυσή του.
Για τη διάκριση των μοντέλων ο D. G. Kendall πρότεινε έναν εύχρηστο συμβολισμό με πέντε σύμβολα που έχει τη γενική μορφή «A/B/s/k/N», όπου τα σύμβολα παριστάνουν τα εξής:

- **A:** θέση για το σύμβολο της κατανομής εισόδου πελατών. Πιθανό σύμβολο για τη θέση A είναι το M, που παριστάνει τη διαδικασία Poisson. Άλλα σύμβολα είναι το G που σημαίνει γενική ή οποιαδήποτε κατανομή (General), και το D που σημαίνει προσδιοριστική διαδικασία εισόδου, δηλαδή με γνωστό και σταθερό ρυθμό (Deterministic).
- **B:** θέση για το σύμβολο της κατανομής του χρόνου εξυπηρέτησης. Χρησιμοποιούνται τα ίδια σύμβολα με την περίπτωση A.
- **s:** θέση για το πλήθος των παράλληλων θέσεων εξυπηρέτησης.
- **k:** θέση για τη χωρητικότητα του συστήματος εξυπηρέτησης, όταν οι θέσεις στην ουρά αναμονής είναι περιορισμένες. Το k είναι το πλήθος των θέσεων αναμονής μαζί με τις θέσεις εξυπηρέτησης.
- **N:** θέση για το πλήθος των πελατών στην πηγή, όταν είναι πεπερασμένο.

Πριν γίνει η παράθεση των μοντέλων, σημειώνεται ότι όταν στη διαδικασία εισόδου παρατηρείται ότι ισχύει η κατανομή Poisson με <u>μέσο ρυθμό αφίξεων</u> ίσο με λ, τότε ο χρόνος που μεσολαβεί ανάμεσα σε διαδοχικές αφίξεις ακολουθεί εκθετική κατανομή με <u>μέση τιμή</u> ίση με 1/λ. Ομοίως, όταν ο χρόνος εξυπηρέτησης ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέση τιμή 1/μ, τότε το πλήθος των πελατών που εξυπηρετούνται σε ένα χρονικό διάστημα ακολουθεί κατανομή Poisson με μέση τιμή ίση με μ. Έχουν ήδη αναφέρει κάποια στοιχεία σχετικά, ως επιπλέον παράδειγμα όμως, ας υποτεθεί ότι σε ένα κεντρικό υπολογιστικό σύστημα, η διαδικασία εισόδου εργασιών ακολουθεί κατανομή Poisson με μέση τιμή λ=20 εργασίες το λεπτό. Τότε, ο χρόνος που μεσολαβεί ανάμεσα σε διαδοχικές αφίξεις ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέση τιμή 1/λ = 1/20 λεπτά δηλαδή 3 δευτερόλεπτα κατά μέσο όρο. Αυτό είναι πολύ λογικό, αφού όταν σε ένα σύστημα καταφθάνουν <u>κατά μέσο όρο</u> 20 εργασίες το λεπτό, πράγματι μπορεί κανείς να υποθέσει ότι κατά μέσο όρο καταφθάνει μία εργασία ανά 3 δευτερόλεπτα. Προσέξτε! Αυτό, δε σημαίνει ότι και στην πραγματικότητα θα έχετε σταθερά πάντοτε μία εργασία να καταφθάνει κάθε 3 δευτερόλεπτα, απλώς αυτή είναι η μέση συμπεριφορά της διαδικασίας εισόδου. Από την άλλη πλευρά, ας υποτεθεί ότι στην εξυπηρέτηση του συστήματος αυτού, όπου έχουμε το υπολογιστικό σύστημα (μία θέση εξυπηρέτησης), αυτό δύναται να διεκπεραιώσει, κατά μέσο όρο μία εργασία σε 2 δευτερόλεπτα, ακολουθώντας εκθετική κατανομή για το χρόνο εξυπηρέτησης. Τότε είναι 1/μ=1/30 λεπτά (=2 δευτερόλεπτα) και το πλήθος των εργασιών που εξυπηρετούνται ανά λεπτό ακολουθεί την κατανομή Poisson, με μέση τιμή μ=30 εργασίες ανά το λεπτό.

Επίσης, είναι σημαντικό να αναφερθούμε στην έννοια της **κατάστασης ισορροπίας** (steady state). Ένα σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας, όταν η συμπεριφορά του δεν εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες που υπάρχουν κατά την έναρξη της λειτουργίας του. Δηλαδή, ένα σύστημα εξυπηρέτησης φτάνει σε κατάσταση ισορροπίας, όταν παρέλθει ένα εύλογο χρονικό διάστημα από την αρχική του κατάσταση, στη διάρκειά του οποίου εξαλείφεται η επίδραση των συνθηκών εκκίνησης. Η περίοδος που απαιτείται, ώστε το σύστημα να μην εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες εκκίνησης και να συγκλίνει σε κατάσταση ισορροπίας, ονομάζεται **παροδική περίοδος** (transient period, warm up period). Τα μοντέλα που αναφέρονται παρακάτω και οι τύποι που χρησιμοποιούνται θεωρούν ότι το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας.

Μοντέλο M/M/1

Χρησιμοποιείται για την μελέτη ενός συστήματος ουρών αναμονής όπου ισχύουν τα εξής: Η διαδικασία αφίξεων των πελατών ακολουθεί την κατανομή Poisson με μέσο ρυθμό αφίξεων ίσο με **λ** ανά χρονική μονάδα. Η διαδικασία εξυπηρέτησης ακολουθεί κατανομή Poisson με μέσο πλήθος πελατών που εξυπηρετούνται ανά χρονική μονάδα ίσο με **μ.** Δηλαδή, ο χρόνος εξυπηρέτησης ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέση τιμή 1/μ. Υπάρχει μία θέση εξυπηρέτησης. Το πλήθος των πελατών στην πηγή είναι άπειρο (πάρα πολύ μεγάλο), οι πελάτες εξυπηρετούνται με πειθαρχία FIFO, σχηματίζουν μια ουρά η οποία έχει άπειρη χωρητικότητα και δεν αποχωρούν όσο μεγάλη και εάν είναι η ουρά. Η θεμελιώδης σχέση που πρέπει να ισχύει για να μπορεί να υπάρξει κατάσταση ισορροπίας, είναι $\lambda<\mu$.

Μοντέλο M/M/s

Χρησιμοποιείται για την μελέτη ενός συστήματος ουρών αναμονής όπου ισχύουν τα εξής: Η διαδικασία αφίξεων των πελατών ακολουθεί την κατανομή Poisson με μέσο όρο αφίξεων **λ** ανά χρονική μονάδα. Υπάρχουν περισσότερες από μία παράλληλες θέσεις εξυπηρέτησης (s>1). Ο χρόνος εξυπηρέτησης σε κάθε θέση ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέσο πλήθος πελατών που εξυπηρετούνται σε κάθε θέση, **μ** ανά χρονική μονάδα. Το πλήθος των πελατών στην πηγή είναι πρακτικά άπειρο, οι πελάτες εξυπηρετούνται με βάση τη σειρά προσέλευσης (FIFO), σχηματίζουν μια ουρά η οποία έχει άπειρη χωρητικότητα και δεν αποχωρούν όσο μεγάλη και εάν είναι η ουρά και εξυπηρετούνται από την πρώτη διαθέσιμη μονάδα εξυπηρέτησης. Η θεμελιώδης σχέση που πρέπει να ισχύει για να μπορεί να υπάρξει κατάσταση ισορροπίας, είναι $\lambda<s\mu$.

Μοντέλο M/G/1

Χρησιμοποιείται για την μελέτη ενός συστήματος ουρών αναμονής όπου ισχύουν τα εξής: Η διαδικασία αφίξεων των πελατών ακολουθεί την κατανομή Poisson με μέσο όρο αφίξεων **λ** ανά χρονική μονάδα. Υπάρχει μία θέση εξυπηρέτησης. Ο χρόνος εξυπηρέτησης **δεν** ακολουθεί αναγκαστικά την εκθετική κατανομή αλλά οποιαδήποτε κατανομή με μέση τιμή (1/μ) και διακύμανση σ^2. Συνεπώς, είναι γνωστό μόνο το μέσο πλήθος πελατών που εξυπηρετούνται στη μονάδα του χρόνου που είναι ίσο με **μ**. Το πλήθος των πελατών στην πηγή είναι πρακτικά άπειρο, οι πελάτες εξυπηρετούνται με πειθαρχία FIFO, σχηματίζουν μια ουρά η οποία έχει άπειρη χωρητικότητα και δεν αποχωρούν όσο μεγάλη και εάν είναι η ουρά. Η θεμελιώδης σχέση που πρέπει να ισχύει για να μπορεί να υπάρξει κατάσταση ισορροπίας, είναι $\lambda<\mu$. Για να υπολογιστούν οι δείκτες απόδοσης για το μοντέλο αυτό, χρειάζεται, εκτός από τη μέση τιμή $1/\mu$ και η διακύμανση σ^2 (ή η τυπική απόκλιση σ) της κατανομής του χρόνου εξυπηρέτησης.

Μοντέλο M/M/1/k

Χρησιμοποιείται για την μελέτη ενός συστήματος ουρών αναμονής όπου ισχύουν τα εξής: Η διαδικασία αφίξεων των πελατών ακολουθεί την κατανομή Poisson με μέσο ρυθμό αφίξεων λ ανά χρονική μονάδα. Υπάρχει μία θέση εξυπηρέτησης. Ο χρόνος εξυπηρέτησης ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέση τιμή 1/μ, δηλαδή το μέσο πλήθος πελατών που εξυπηρετούνται είναι μ ανά χρονική μονάδα (κατανομή Poisson). Το πλήθος των πελατών στην πηγή είναι πρακτικά άπειρο, οι πελάτες εξυπηρετούνται με βάση τη σειρά προσέλευσης (FIFO), σχηματίζουν μια ουρά η οποία έχει χωρητικότητα ίση με k-1, δηλαδή k πελάτες συνολικά στο σύστημα (ένας βρίσκεται στη θέση εξυπηρέτησης). Το σύστημα μπορεί να φθάσει σε κατάσταση ισορροπίας χωρίς να ισχύει λ<μ. διότι όταν γεμίσει η ουρά αναμονής απλώς δεν εισέρχονται άλλοι πελάτες.

Μοντέλο M/M/1//N

Χρησιμοποιείται για την μελέτη ενός συστήματος ουρών αναμονής όπου ισχύουν τα εξής: Η διαδικασία αφίξεων των πελατών ακολουθεί την κατανομή Poisson με μέσο όρο αφίξεων λ ανά χρονική μονάδα. Υπάρχει μία θέση εξυπηρέτησης. Ο χρόνος εξυπηρέτησης ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέση τιμή (1/μ), δηλαδή το πλήθος πελατών που εξυπηρετούνται ακολουθεί την κατανομή Poisson με μέση τιμή μ πελάτες ανά χρονική μονάδα. Το πλήθος των πελατών στην πηγή είναι πεπερασμένο (ίσο με N), οι πελάτες εξυπηρετούνται με πειθαρχία FIFO και σχηματίζουν μια ουρά η οποία έχει άπειρη χωρητικότητα.

Οι μαθηματικές σχέσεις που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό των λεγόμενων δεικτών απόδοσης (μέτρων λειτουργικότητας) των παραπάνω συστημάτων σε κατάσταση ισορροπίας, δίνονται για κάθε μοντέλο στους παρακάτω πίνακες. Σημειώστε ότι συνήθως αρκεί να υπολογίσει κανείς ένα ή δύο δείκτες (π.χ. το L_q ή/και το P_0) για να μπορέσει να υπολογίσει και τους υπόλοιπους από τους κυριότερους δείκτες αφού αυτοί συνδέονται μεταξύ τους όπως φαίνεται στους πίνακες που ακολουθούν.

	M/M/1	**M/M/s**
L_s : μέσο πλήθος πελατών που βρίσκονται σε κατάσταση εξυπηρέτησης	$L_s = \frac{\lambda}{\mu}$	$L_s = \frac{\lambda}{\mu}$
ρ: Βαθμός απασχόλησης του συστήματος εξυπηρέτησης	$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$	$\rho = \frac{\lambda}{s\mu}$
L_q: μέσο πλήθος πελατών στην ουρά αναμονής	$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$	$L_q = \frac{(\lambda/\mu)^s \lambda\mu}{(s-1)!(s\mu-\lambda)^2} \cdot P_0$
L: μέσο πλήθος πελατών στο σύστημα συνολικά	$L = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$ ή $L = L_q + L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$	$L = L_q + L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$
W_q: μέσο χρόνος αναμονής ενός πελάτη στην ουρά	$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$ ή $W_q = \frac{L_q}{\lambda}$	$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$
W: μέσο χρόνος παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα	$W = \frac{1}{\mu-\lambda}$ ή $W = \frac{L}{\lambda}$ ή $W = W_q + \frac{1}{\mu}$	$W = \frac{L}{\lambda}$ ή $W = W_q + \frac{1}{\mu}$

	M/M/1 (συνέχεια)	**M/M/s (συνέχεια)**
P_0: πιθανότητα να μην υπάρχει κανένας πελάτης στο σύστημα ή ισοδύναμα το ποσοστό του χρόνου που όλες οι θέσεις είναι αδρανείς	$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$	$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1}\left[\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}\right] + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \cdot \left(\frac{s\mu}{s\mu - \lambda}\right)}$
P_w: πιθανότητα ένας πελάτης που φθάνει στο σύστημα να χρειαστεί να περιμένει	$P_w = 1 - P_0$	$P_w = \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \left(\frac{s\mu}{s\mu - \lambda}\right) P_0$
P_n:πιθανότητα να υπάρχουν n πελάτες στο σύστημα	$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot P_0$	$P_n = \begin{cases} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot P_0, & n \le s \\ \frac{1}{s!\,s^{n-s}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot P_0, & n > s \end{cases}$
$P_{n>k}$:πιθανότητα να υπάρχουν περισσότεροι από κ πελάτες στο σύστημα	$P_{n>k} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1}$	$P_{n>k} = 1 - (P_0 + P_1 + \ldots P_k)$

	M/G/1	M/M/1/k	M/M/1//N
L_s : μέσο πλήθος πελατών που β΄ρισκοντα στη διαδικασία εξυπηρέτησης	$L_s = \frac{\lambda}{\mu}$	$L_s = \frac{\lambda}{\mu}$	$L_s = \frac{\lambda}{\mu}$
ρ: πιθανότητα η θέση να είναι απασχολημένη (βαθμός απασχόλησης της θέσης)	$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$	$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$	$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$
L_q: μέσο πλήθος πελατών στην ουρά αναμονής	$L_q = \frac{\lambda^2\sigma^2 + \left(\lambda/\mu\right)^2}{2\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)}$	$L_q = L - \frac{\lambda(1-P_k)}{\mu}$ ή $L_q = L-(1-P_0)$	$L_q = N - \left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda}\right)(1-P_0)$
L: μέσο πλήθος πελατών στο σύστημα	$L = L_q + L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$	$L = \frac{\lambda/\mu}{1-\lambda/\mu} - \frac{(k+1)\left(\lambda/\mu\right)^{k+1}}{1-\left(\lambda/\mu\right)^{k+1}} =$ $\frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(k+1)\rho^{k+1}}{1-\rho^{k+1}}$	$L = L_q + (1-P_0)$
W_q: μέσος χρόνος αναμονής ενός πελάτη στην ουρά	$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$	$W_q = \frac{L_q}{\lambda(1-P_k)}$ ή $W_q = W - \frac{1}{\mu}$	$W_q = \frac{L_q}{\lambda(N-L)}$
W: μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα	$W = \frac{L}{\lambda}$ ή $W = W_q + \frac{1}{\mu}$	$W = \frac{L}{\lambda(1-P_k)}$	$W = W_q + \frac{1}{\mu}$

	M/G/1 (συνέχεια)	**M/M/1/k (συνέχεια)**	**M/M/1//N (συνέχεια)**
P_0: η πιθανότητα να μην υπάρχει κανένας πελάτης στο σύστημα ή ισοδύναμα το ποσοστό του χρόνου που η μονάδα εξυπηρέτησης δεν απασχολείται	$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$	$P_0 = \frac{1 - \lambda/\mu}{1 - \left(\lambda/\mu\right)^{k+1}} = \frac{1-\rho}{1-\rho^{k+1}}$	$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{(N-n)!}\left(\lambda/\mu\right)^n}$
P_w: η πιθανότητα ένας πελάτης που φθάνει στο σύστημα να χρειαστεί να περιμένει	$P_w = 1 - P_0$	$P_w = 1 - P_0$	$P_w = 1 - P_0$
P_n: η πιθανότητα να υπάρχουν n πελάτες στο σύστημα	$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot P_0$	$P_n = (P_0)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = P_0 \cdot \rho^n$ όταν n≤k	$P_n = (P_0)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{N!}{(N-n)!}$ για $n \le N$
$P_{n>k}$: η πιθανότητα να υπάρχουν περισσότεροι από κ πελάτες στο σύστημα	$P_{n>k} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1}$	$P_{n>k} = 1-(P_0 + P_1 + \ldots P_k)$ όταν το n είναι μικρότερο από τη χωρητικότητα του συστήματος και 0 όταν το n είναι μεγαλύτερο από τη χωρητικότητα του συστήματος	$P_{n>k} = 1-(P_0 + P_1 + \ldots P_k)$

Μοντέλο M/D/1

Μία ειδική περίπτωση του μοντέλου M/G/1 είναι εκείνη, στην οποία η διακύμανση του χρόνου εξυπηρέτησης είναι μηδενική, δηλαδή $\sigma^2 = 0$. Ουσιαστικά, πρόκειται για την περίπτωση συστήματος με μία θέση, που εξυπηρετεί όλους τους πελάτες πάντα στον ίδιο προσδιοριστικό (σταθερό) χρόνο, ίσο με 1/μ. Δηλαδή, είναι ένα σύστημα με πρακτικά αμελητέα μεταβλητότητα στο χρόνο εξυπηρέτησης. Τέτοια συστήματα εμφανίζονται για παράδειγμα σε βιομηχανικές εγκαταστάσεις, όπου μηχανές (σταθμοί επεξεργασίας) εκτελούν επαναλαμβανόμενες εργασίες σε συγκεκριμένο πάντα χρονικό διάστημα. Το σύστημα αυτό, με διαδικασία αφίξεων Poisson, μία θέση εξυπηρέτησης και σταθερό ίδιο για όλους τους πελάτες χρόνο εξυπηρέτησης, συμβολίζεται με M/D/1. Στην περίπτωση αυτή, αρκεί να αντικαταστήσετε στη σχέση για το L_q που δίνεται για το μοντέλο M/G/1 το $\sigma^2 = 0$ και να υπολογίσετε το L_q. Έτσι μετά την εκτέλεση των πράξεων παίρνετε τη σχέση για το μέσο χρόνο αναμονής του μοντέλου M/D/1:

$$L_q = \frac{\lambda^2}{2\mu(\mu-\lambda)} \ ,$$

και στη συνέχεια μπορείτε να βρείτε και τους υπόλοιπους βασικούς δείκτες απόδοσης, χρησιμοποιώντας τους γνωστούς τύπους με τους οποίος συνδέονται μεταξύ τους.

Προσδιορισμός δυναμικότητας συστημάτων εξυπηρέτησης

Ο αντικειμενικός σκοπός της ανάλυσης των συστημάτων ουρών αναμονής είναι συνήθως ο προσδιορισμός εκείνης της δυναμικότητας του συστήματος, δηλαδή του πλήθους των θέσεων εξυπηρέτησης, για την οποία ελαχιστοποιείται το συνολικό προσδοκώμενο (=μέσο) μεταβλητό κόστος λειτουργίας του συστήματος. Το κόστος αυτό για μία επιχείρηση αποτελείται από δύο επιμέρους στοιχεία κόστους, το κόστος από την αναμονή των πελατών και το κόστος από την παροχή της εξυπηρέτησης. Όταν αυξάνεται η δυναμικότητα του συστήματος με επιπρόσθετες θέσεις εξυπηρέτησης, ο μέσος χρόνος παραμονής των πελατών στο σύστημα μειώνεται, με αποτέλεσμα να μειώνεται και το κόστος από την αναμονή των πελατών. Στην περίπτωση όμως αυτή, το κόστος παροχής της εξυπηρέτησης του συστήματος αυξάνεται λόγω της προσθήκης θέσεων εξυπηρέτησης. Αντίθετα, όταν μειώνεται η δυναμικότητα του συστήματος, το κόστος παραμονής των πελατών στο σύστημα αυξάνεται λόγω αύξησης του χρόνου παραμονής τους, αλλά συγχρόνως μειώνεται το κόστος εξυπηρέτησης λόγω μικρότερου αριθμού θέσεων εξυπηρέτησης. Έτσι, το ερώτημα είναι πώς μπορεί να βρεθεί **ισορροπία ανάμεσα στο κόστος αναμονής των πελατών και στο κόστος εξυπηρέτησης από την πλευρά της επιχείρησης**, σχεδιάζοντας με τον πλέον κατάλληλο τρόπο το σύστημα εξυπηρέτησης.

Διαμόρφωση σχέσης κόστους λειτουργίας

Το συνολικό μεταβλητό κόστος λειτουργίας του συστήματος, που συμβολίζεται με *TC* (Total Cost), προκύπτει ως το άθροισμα δύο επιμέρους στοιχείων κόστους, του κόστους αναμονής των πελατών, που συμβολίζεται με *WC* (Waiting Cost) και του κόστους εξυπηρέτησης του συστήματος, που συμβολίζεται με *SC* (Service Cost). Με c_w παριστάνεται το κόστος αναμονής ενός πελάτη στη μονάδα χρόνου. Σημειώστε, ότι όταν γίνεται αναφορά στο κόστος αναμονής, ουσιαστικά εννοούμε και το συνολικό χρόνο παραμονής του πελάτη στο σύστημα. Κατά συνέπεια, αφού με W έχει συμβολιστεί ο μέσος συνολικός χρόνος παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα, το (=μέσο) κόστος από την αναμονή του πελάτη στη μονάδα του χρόνου είναι ίσο με $c_w W$. Όμως, η ποσότητα αυτή αναφέρεται σ' ένα μόνο πελάτη και δεν αντικατοπτρίζει το συνολικό κόστος αναμονής των πελατών. Για να υπολογιστεί το συνολικό προσδοκώμενο κόστος αναμονής των πελατών, πολλαπλασιάζεται η ποσότητα αυτή, με το μέσο ρυθμό αφίξεων των πελατών στη μονάδα του χρόνου, δηλαδή με το *λ*. Έτσι, προκύπτει ο ακόλουθος τύπος:

$$WC = c_w W\lambda = c_w L \qquad (1)$$

Όπως βλέπετε, το κόστος αναμονής των πελατών στη μονάδα το χρόνου, *WC,* προκύπτει τελικά ως το γινόμενο του κόστους αναμονής ενός πελάτη στη μονάδα του χρόνου με το μέσο πλήθος πελατών στο σύστημα. Στο σημείο αυτό είναι σκόπιμο να αναφερθούμε κάπως πιο αναλυτικά στο κόστος αναμονής ενός πελάτη στη μονάδα του χρόνου, δηλαδή στο c_w. Η ευχέρεια εκτίμησης του c_w εξαρτάται κυρίως από το εάν ο πελάτης είναι μέρος του συστήματος εξυπηρέτησης (εσωτερικός πελάτης) ή όχι (εξωτερικός πελάτης). Εάν ο πελάτης είναι εσωτερικός στο σύστημα, π.χ. ιδιόκτητα οχήματα της επιχείρησης που περιμένουν για φόρτωση/εκφόρτωση, μηχανές που παραμένουν αχρησιμοποίητες λόγω βλάβης και δεν επιδιορθώνονται άμεσα, τεχνίτες που αναμένουν εξοπλισμό ή ανταλλακτικά για να επιδιορθώσουν τις βλάβες των μηχανών, ημικατεργασμένα προϊόντα που «περιμένουν» τη μεταφορά τους στην επόμενη φάση παραγωγής, κ.ά., τότε η εκτίμηση του κόστους αναμονής του πελάτη είναι προσεγγιστικά σχετικά εύκολη. Αντίθετα, όταν οι πελάτες δεν είναι μέρος του συστήματος εξυπηρέτησης (εξωτερικοί πελάτες), όπως π.χ. πελάτες στα ταμεία υπεραγορών, οχήματα για συντήρηση ή επισκευή σ' ένα συνεργείο, ασθενείς στα εξωτερικά ιατρεία ενός νοσοκομείου, κ.ά., η εκτίμηση του κόστους από την αναμονή των πελατών είναι περισσότερο δυσχερής. Στις περιπτώσεις αυτές των εξωτερικών πελατών, το πραγματικό κόστος αναμονής μπορεί να διαφέρει σημαντικά από πελάτη σε πελάτη.

Αναφορικά με το κόστος εξυπηρέτησης τα πράγματα είναι πιο απλά. Είδαμε ότι ο βασικός παράγοντας που καθορίζει το κόστος εξυπηρέτησης είναι το πλήθος των θέσεων εξυπηρέτησης, δηλαδή το *s*. Αν c_s παριστάνει το κόστος εξυπηρέτησης της μίας θέσης στη μονάδα του χρόνου, τότε το κόστος εξυπηρέτησης *SC* για προσφερόμενη δυναμικότητα *s* είναι:

$$SC = c_s \cdot s \qquad (2)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει η σχέση (3) που δίνει το συνολικό προσδοκώμενο (=μέσο) μεταβλητό κόστος λειτουργίας του συστήματος στη μονάδα του χρόνου:

$$TC = WC + SC = c_w L + c_s s \qquad (3)$$

Για να εντοπίσετε τη βέλτιστη δυναμικότητα ενός συστήματος εξυπηρέτησης, θα πρέπει να προσδιορίσετε το *TC* για διαφορετικές τιμές του *s* και να επιλέξετε εκείνο το *s*, στο οποίο αντιστοιχεί το μικρότερο συνολικό κόστος λειτουργίας. Επειδή η συμπεριφορά της «συνάρτησης» TC είναι κυρτή είναι εύκολο να εντοπιστεί το μοναδικό ελάχιστο. Στη σχέση (3) οι τιμές των συντελεστών c_w και c_s είναι εκτιμήσεις και ειδικότερα το c_w υπολογίζεται πιο δύσκολα από το c_s. Επομένως και το συνολικό κόστος *TC* είναι μία προσέγγιση τόσο ακριβής όσο ακριβείς είναι και οι εκτιμήσεις των παραπάνω τιμών. Επίσης, αν θεωρήσετε ότι ο χρόνος παραμονής του πελάτη στη θέση εξυπηρέτησης δεν συνυπολογίζεται στο κόστος, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ένα μοντέλο που στηρίζεται μόνο στο χρόνο αναμονής στην ουρά και όχι στο συνολικό χρόνο παραμονής στο σύστημα. Τότε, αρκεί να αντικαταστήσετε στη σχέση (3) το L με το L_q, οπότε θα έχετε την ακόλουθη σχέση:

$$TC = WC + SC = c_w L_q + c_s s \qquad (4)$$

<u>Παράδειγμα (από την τέταρτη εργασία ακαδ. έτους 2002-2003):</u>

Μία τράπεζα λειτουργεί σύμφωνα με τον ακόλουθο τρόπο Α: Τις ώρες αιχμής οι πελάτες οι οποίοι ζητούν εξυπηρέτηση από τα ταμεία (για οποιουδήποτε τύπου συναλλαγή), καταφθάνουν κατά μέσο όρο ένας κάθε 1,6 λεπτά με το χρόνο που παρεμβάλλεται ανάμεσα σε διαδοχικές αφίξεις να ακολουθεί την εκθετική κατανομή. Η τράπεζα τις ώρες αιχμής διατηρεί ανοικτά 5 ομοιόμορφα ταμεία με μία κοινή ουρά αναμονής και πειθαρχία FIFO. Από ανάλυση ιστορικών οικονομικών στοιχείων έχει εκτιμηθεί ότι όταν οι πελάτες βρίσκονται στο κατάστημα, είτε περιμένοντας είτε εξυπηρετούμενοι, προκαλείται ένα κόστος για την τράπεζα το οποίο ανέρχεται στα €3 την ώρα (ανά πελάτη). Ένα οποιοδήποτε από τα πέντε ομοιόμορφα ταμεία χρειάζεται κατά μέσο όρο 6 λεπτά για να ολοκληρώσει την εξυπηρέτηση ενός πελάτη, ακολουθώντας εκθετική κατανομή χρόνου εξυπηρέτησης. Το σχετικό (μεταβλητό) ωριαίο κόστος για την τράπεζα για τη διατήρηση ενός ανοικτού ταμείου ανέρχεται στα €45.

Η διοίκηση του καταστήματος διερευνά την εφαρμογή του ακόλουθου προτεινόμενου τρόπου λειτουργίας Β: Δεν μπορεί να αλλάξει τίποτα σχετικά με τον τρόπο άφιξης των πελατών ο οποίος συνεχίζει να είναι κατά μέσο όρο ένας πελάτης ανά 1,6 λεπτά με εκθετική κατανομή. Όμως, προτείνεται να αλλάξει ο τρόπος λειτουργίας των ταμείων τις ώρες αιχμής ώστε να αφιερωθεί ένα από τα πέντε ταμεία αποκλειστικά για την εξυπηρέτηση των πελατών που θέλουν να πραγματοποιήσουν μόνο καταθέσεις. Το ταμείο αυτό θα έχει δική του ξεχωριστή ουρά αναμονής με πειθαρχία FIFO. Τα υπόλοιπα τέσσερα ταμεία θα συνεχίσουν να λειτουργούν όπως πριν με μία κοινή ουρά αναμονής, επίσης με πειθαρχία FIFO. Σημειώνεται, ότι από στοιχεία που υπάρχουν είναι γνωστό ότι το ποσοστό των προσερχόμενων πελατών που ανήκουν στην κατηγορία εκείνη που θέλουν να πραγματοποιήσουν μόνο καταθέσεις ανέρχεται στο 25% του συνόλου των πελατών. Επίσης, ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης των πελατών της κατηγορίας αυτής είναι 3 λεπτά (εκθετική κατανομή χρόνου εξυπηρέτησης) ενώ ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης των υπολοίπων πελατών είναι 7 λεπτά (εκθετική κατανομή χρόνου εξυπηρέτησης). Το κόστος αναμονής – παραμονής πελάτη για την τράπεζα παραμένει το ίδιο όπως και στην περίπτωση Α ανεξάρτητα από την κατηγορία στην οποία ανήκει, δηλαδή ίσο με €3 ανά ώρα (ανά πελάτη). Το ίδιο όπως και πριν παραμένει το κόστος παροχής εξυπηρέτησης για οποιοδήποτε τύπο ταμείου δηλαδή €45 την ώρα.

<u>Ερώτημα:</u>

Σε κατάσταση ισορροπίας, πραγματοποιείστε τους απαραίτητους υπολογισμούς ώστε να επιλέξτε μεταξύ του τρέχοντος τρόπου λειτουργίας Α και του προτεινόμενου τρόπου Β, με βάση το συνολικό προσδοκώμενο λειτουργικό κόστος.

<u>Επίλυση:</u>

Πρόκειται περί σύγκρισης δύο συστημάτων εξυπηρέτησης έστω Α και Β. Η περίπτωση Α είναι η τρέχουσα κατάσταση και είναι ένα σύστημα M/M/5. Η περίπτωση Β είναι ένα σύστημα αποτελούμενο από δύο παράλληλα υποσυστήματα τα οποία λειτουργούν μαζί φυσικά, το πρώτο είναι τύπου M/M/4 και το δεύτερο τύπου M/M/1. Χρησιμοποιούμε ως στοιχειώδη μονάδα μέτρησης του χρόνου την 1 ώρα ώστε να υπάρχει ομοιογένεια στα αποτελέσματα (κυρίως στον υπολογισμό του κόστους).

Προαπαιτούμενοι υπολογισμοί για την τρέχουσα κατάσταση Α:

Οι πελάτες καταφθάνουν με διαδικασία Poisson με μέσο ρυθμό λ = 37,5 πελάτες/ώρα, αφού ο μέσος χρόνος που παρεμβάλλεται μεταξύ διαδοχικών αφίξεων ανέρχεται στα 1,6 λεπτά (60/1,6 = 37,5). Υπάρχουν πέντε ομοιόμορφα ταμεία, δηλαδή έχουν το καθένα ίδια κατανομή εξυπηρέτησης (Poisson) με μέσο ρυθμό έστω μ, ο οποίος για κάθε ταμείο είναι ίσος με 10 πελάτες /ώρα (αφού ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης είναι 6 λεπτά). Επειδή είναι λ/sμ = 37,5/(5×10) = 37,5/50 = 0,75 < 1 υπάρχει σύγκλιση σε κατάσταση ισορροπίας και μπορείτε να προχωρήσετε στους υπολογισμούς.

→Έτσι, για τον τρέχοντα τρόπο λειτουργίας Α, σε κατάσταση ισορροπίας, χρησιμοποιώντας τους τύπους για το σύστημα M/M/s, για λ = 37,5, μ = 10 και s=5, προκύπτουν τα ακόλουθα:

Πρώτα υπολογίζετε την πιθανότητα P_0 που είναι απαραίτητη για τον υπολογισμό του L_{qA} που θα ακολουθήσει. Είναι λοιπόν $P_0 = \dfrac{1}{\sum_{n=0}^{s-1}\left[\dfrac{(\lambda/\mu)^n}{n!}\right] + \dfrac{(\lambda/\mu)^s}{s!}\cdot\left(\dfrac{s\mu}{s\mu-\lambda}\right)}$ που δίνει

για s=5

$$P_0 = \frac{1}{\left[\frac{\left(\frac{37,5}{10}\right)^0}{0!}\right] + \left[\frac{\left(\frac{37,5}{10}\right)^1}{1!}\right] + \left[\frac{\left(\frac{37,5}{10}\right)^2}{2!}\right] + \left[\frac{\left(\frac{37,5}{10}\right)^3}{3!}\right] + \left[\frac{\left(\frac{37,5}{10}\right)^4}{4!}\right] + \frac{\left(\frac{37,5}{10}\right)^5}{5!}\cdot\left(\frac{5\cdot 10}{5\cdot 10 - 37,5}\right)} =$$

= 0,018681 (δηλαδή περίπου 1,87%).

- Μέσο μήκος ουράς αναμονής: $L_{qA} = \dfrac{(\lambda/\mu)^s \lambda\mu}{(s-1)!(s\mu-\lambda)^2}\cdot P_0 = \dfrac{\left(\frac{37,5}{10}\right)^5\cdot 37,5\cdot 10}{(5-1)!(5\cdot 10-37,5)^2}\cdot P_0 =$ 1,385367 πελάτες
- Μέσο πλήθος πελατών στο σύστημα: $L_A = L_{qA} + \dfrac{\lambda}{\mu} =$ 1,385367 + 37,5/10 = 5,135367 πελάτες.

Προαπαιτούμενοι υπολογισμοί για τον προτεινόμενο τρόπο λειτουργίας Β:

Κατ' αρχήν, οι πελάτες <u>όλων των κατηγοριών μαζί</u> συνεχίζουν να καταφθάνουν με συνολικό μέσο ρυθμό λ = 37,5 πελάτες/ώρα. Όμως σύμφωνα με το σενάριο, το 25% από αυτούς είναι πελάτες μόνο καταθέσεων, άρα στην πραγματικότητα γίνεται διάσπαση του αρχικού μέσου ρυθμού άφιξης σε δύο κατευθύνσεις, εκείνη των πελατών της κατηγορίας μόνο καταθέσεων, που είναι $\lambda_1 = \lambda \times 0,25 = 37,5 \times 0,25 = 9,375$ πελάτες την ώρα και εκείνη των πελατών των υπολοίπων κατηγοριών που είναι $\lambda_2 = \lambda \times 0,75 = 37,5 \times 0,75 = 28,125$ πελάτες την ώρα. Προφανώς $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda = 37,5$.

Πρόκειται λοιπόν για ένα σύστημα εξυπηρέτησης αποτελούμενο από δύο παράλληλα, ταυτόχρονα λειτουργούντα υποσυστήματα, με διαφορετική ουρά αναμονής το καθένα, αλλά με κοινή πηγή πελατών και κοινό συνολικό ρυθμό άφιξης λ = 37,5, με διάσπαση όμως σε δύο ουρές, κάθε μία εκ των οποίων έχει το δικό της ρυθμό άφιξης. Το πρώτο υποσύστημα είναι τύπου M/M/1 με $\lambda_1 = 9,375$ και $\mu_1 = 20$ (αφού απαιτούνται

3 λεπτά κατά μέσο όρο για κάθε πελάτη της κατηγορίας αυτής). Το δεύτερο υποσύστημα είναι M/M/4 με $\lambda_2 = 28{,}125$ και $\mu_2 = 60/7 = 8{,}571428$ πελάτες ανά ώρα, για κάθε ένα από τα τέσσερα ομοιόμορφα ταμεία του (αφού απαιτούνται 7 λεπτά κατά μέσο όρο για κάθε πελάτη της κατηγορίας αυτής). Στην πρώτη περίπτωση είναι $\lambda/\mu_1 = 9{,}375/20 < 1$ και στη δεύτερη περίπτωση είναι $\lambda/s\mu = 28{,}125/(4\times 8{,}571428) = 28{,}125/34{,}285712 = 0{,}820312 < 1$. Συνεπώς, υπάρχει σύγκλιση σε κατάσταση ισορροπίας και στα δύο παράλληλα υποσυστήματα του Β τρόπου λειτουργίας επομένως μπορούμε να συνεχίσετε με τους υπολογισμούς. Τα δύο υποσυστήματα ας τα καλούμε εφεξής Β1 και Β2.

➔Έτσι, για το υποσύστημα Β1 σε κατάσταση ισορροπίας, χρησιμοποιώντας τους τύπους για το σύστημα M/M/1, για $\lambda_1 = 9{,}375$ και $\mu_1 = 20$, προκύπτουν τα ακόλουθα:

- Μέσο μήκος ουράς αναμονής υποσυστήματος Β1: $L_{q1} = \dfrac{\lambda_1^2}{\mu_1(\mu_1-\lambda_1)} = \dfrac{(9{,}375)^2}{20(20-9{,}375)} = 0{,}413603$ πελάτες.
- Μέσο πλήθος πελατών, υποσύστημα Β1: $L_1 = \dfrac{\lambda_1}{\mu_1-\lambda_1} = L_{q1} + \dfrac{\lambda_1}{\mu_1} = 0{,}413603 + \dfrac{9{,}375}{20} = 0{,}882353$ πελάτες.

➔Για το υποσύστημα Β2 σε κατάσταση ισορροπίας, χρησιμοποιώντας τους τύπους για το σύστημα M/M/s, για s=4, $\lambda_2 = 28{,}125$ και $\mu_2 = 60/7 = 8{,}571428$ προκύπτουν τα ακόλουθα:

- Πρώτα υπολογίζετε το P_0 που είναι απαραίτητο για τον υπολογισμό του L_{q2} που θα ακολουθήσει. Είναι:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1}\left[\frac{(\lambda_2/\mu_2)^n}{n!}\right] + \frac{(\lambda_2/\mu_2)^s}{s!}\cdot\left(\frac{s\mu_2}{s\mu_2-\lambda_2}\right)}$$ που δίνει:

$$P_0 = \frac{1}{\left[\frac{\left(\frac{28{,}125}{60/7}\right)^0}{0!}\right] + \left[\frac{\left(\frac{28{,}125}{60/7}\right)^1}{1!}\right] + \left[\frac{\left(\frac{28{,}125}{60/7}\right)^2}{2!}\right] + \left[\frac{\left(\frac{28{,}125}{60/7}\right)^3}{3!}\right] + \frac{\left(\frac{28{,}125}{60/7}\right)^4}{4!}\cdot\left(\frac{4\cdot(60/7)}{4\cdot(60/7)-28{,}125}\right)}$$

= 0,023567.

Συνεπώς, το μέσο μήκος ουράς αναμονής στο υποσύστημα Β2 είναι:

- $L_{q2} = \dfrac{(\frac{\lambda_2}{\mu_2})^s \lambda_2 \mu_2}{(s-1)!(s\mu_2 - \lambda_2)^2} \cdot P_0 = \dfrac{\left(\frac{28{,}125}{60/7}\right)^4 \cdot 28{,}125 \cdot (60/7)}{(4-1)!(4 \cdot (60/7) - 28{,}125)^2} \cdot P_0 =$ 2,891954 πελάτες
- Μέσο πλήθος πελατών στο υποσύστημα Β2: $L_2 = L_{q2} + \dfrac{\lambda_2}{\mu_2}$ = 2,891954 + 28,125/(60/7)

 = 6,173203 πελάτες.

Για τον υπολογισμό του συνολικού λειτουργικού κόστους για τον Α τρόπο λειτουργίας έχετε:

c_w = €3 ανά ώρα, c_s = €45 ανά ώρα, L_A = 5,135367 και s=5. Οπότε,

$TC_A = WC_A + SC_A = c_w \times L_A + c_s \times s$, άρα $TC_A = 3 \times 5{,}135367 + 45 \times 5$ = €240,4061 ανά ώρα.

Ενώ, για τον υπολογισμό του συνολικού λειτουργικού κόστους για τον Β τρόπο λειτουργίας έχετε:

- Για το υποσύστημα Β1:

c_w = €3 ανά ώρα, c_s = €45 ανά ώρα, L_1 = 0,882353 και s=1. Οπότε,

$TC_{B1} = WC_{B1} + SC_{B1} = c_w \times L_1 + c_s \times s$, άρα $TC_{B1} = 3 \times 0{,}882353 + 45 \times 1$ = €47,647059 ανά ώρα.

- Για το υποσύστημα Β2:

cw = €3 ανά ώρα, cs = €45 ανά ώρα, L_2 = 6,173203 και s=4. Οπότε,

$TC_{B2} = WC_{B2} + SCB2 = c_w \times L_2 + c_s \times s$, άρα $TC_{B2} = 3 \times 6{,}173203 + 45 \times 4$ = €198,519609 ανά ώρα.

Συνεπώς, το συνολικό αναμενόμενο λειτουργικό κόστος για τον Β τρόπο είναι:

$TC_{B1} + TC_{B2}$ = 47,647059 + 198,519609 = 246,166666 και είναι μεγαλύτερο από το μέσο κόστος του τρόπου Α κατά (περίπου) €5.76 ανά ώρα.

→Κατά συνέπεια, με βάση το αναμενόμενο λειτουργικό κόστος, το κατάστημα παραμένει στον Α τρόπο λειτουργίας.

Βιβλιογραφία

Ιστοσελίδα ΕΑΠ, πρόγραμμα προπτυχιακών σπουδών ΔΕΟ 13, απαντήσεις σε ερωτήσεις για τη διδακτέα ύλη, και σημειώσεις γραμμικού προγραμματισμού, http://www.eap.gr/programmes/1/deo13.htm

Μπότσαρης, Χ., *Επιχειρησιακή Έρευνα*, τόμος Ι, Εκδόσεις Ελληνικά Γράμματα, Αθήνα, 2002.

Οικονόμου, Γ. Σ. και Α. Κ. Γεωργίου, *Ποσοτική Ανάλυση για τη Λήψη Διοικητικών Αποφάσεων*, τόμος Α', εκδόσεις Μπένου, Αθήνα 1999.

Οικονόμου, Γ.Σ. και Α.Κ. Γεωργίου, *Επιχειρησιακή Έρευνα,* Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο, Πρόγραμμα Σπουδών: «Διοίκηση Επιχειρήσεων και Οργανισμών», Θεματική Ενότητα: «Ποσοτικές Μέθοδοι» (ΔΕΟ13), Πάτρα, 2000

Τσάντας Ν. Δ και Π. – Χ. Γ. Βασιλείου, *Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα*, εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη, 2000.

Υψηλάντης, Γ. Π., *Επιχειρησιακή Έρευνα*, 2η έκδοση, Εκδόσεις «ΕΛΛΗΝ», 1998.