ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

Πρόγραμμα Σπουδών: ΔΙΟΙΚΗΣΗ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ και ΟΡΓΑΝΙΣΜΩΝ

Θεματική Ενότητα: ΔΕΟ-13 – Ποσοτικές Μέθοδοι

Σημειώσεις Γραμμικού Προγραμματισμού

Ακαδημαϊκό Έτος: 2005-2006

Πρόλογος

Οι σημειώσεις αυτές συνοδεύουν, υπό την έννοια των προαπαιτούμενων γνώσεων, τον Τόμο Γ΄ "Επιχειρησιακή Έρευνα" της Θεματικής Ενότητας "Ποσοτικές Μέθοδοι". Το πρώτο μέρος των σημειώσεων επικεντρώνεται στη διαμόρφωση μοντέλων γραμμικού προγραμματισμού. Στο δεύτερο μέρος επιδεικνύεται ο τρόπος γραφικής επίλυσης ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού με δύο μεταβλητές. Η γραφική επίλυση ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού στο χώρο των δύο διαστάσεων φωτίζει τα βασικά σημεία της θεωρίας πάνω στην οποία στηρίζεται η κυρίαρχη, ακόμα και σήμερα, αναλυτική μέθοδος για την επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού, η μέθοδος simplex. Το τρίτο μέρος των σημειώσεων αφιερώνεται στο δυϊκό πρόβλημα, το οποίο παρέχει σημαντικές πληροφορίες σχετικά με τη βέλτιστη λύση του πρωτεύοντος προβλήματος και διευρύνει τον κύκλο των αποτελεσμάτων στην περιοχή της οριακής οικονομικής ανάλυσης. Χωρίς υπερβολή, ο δυϊσμός βρίσκεται στον πυρήνα της θεωρίας και των αλγορίθμων του γραμμικού προγραμματισμού. Μάλιστα μια από τις πιο πρακτικές και εκλεπτυσμένες εφαρμογές της θεωρίας δυϊσμού είναι η θεωρία παιγνίων.

Χαράλαμπος Ε. Μπότσαρης
Καθηγητής Επιχειρησιακής Έρευνας
Πανεπιστήμιο Πατρών

Νίκος Τσάντας
Αναπληρωτής Καθηγητής Επιχειρησιακής Έρευνας
Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Ανδρέας Κ. Γεωργίου
Αναπληρωτής Καθηγητής Επιχειρησιακής Έρευνας
Πανεπιστήμιο Μακεδονίας

Φεβρουάριος 2004

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Γραμμικός προγραμματισμός (linear programming) είναι το σύνολο των υπολογιστικών τεχνικών για τον προσδιορισμό του μεγίστου ή του ελαχίστου μιας γραμμικής συνάρτησης της οποίας οι μεταβλητές απαιτείται να ικανοποιούν ένα σύστημα γραμμικών ανισοεξισώσεων. Τέτοιας μορφής προβλήματα αναφέρονται στον τρόπο αξιοποίησης των διαθέσιμων πόρων ενός συστήματος έτσι ώστε οι απαιτήσεις του συστήματος να ικανοποιούνται και η απόδοσή του να βελτιστοποιείται.

Με τον όρο ***σύστημα (system)*** χαρακτηρίζεται ένα σύνολο αλληλεπιδρώντων στοιχείων, τα οποία συνεργάζονται μεταξύ τους για την επίτευξη κάποιου κοινού σκοπού. Οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των δομικών στοιχείων του συστήματος είναι οι κανόνες που διέπουν τη λειτουργία του. Η ***λήψη αποφάσεων (decision making)*** σχετικά με το βέλτιστο τρόπο λειτουργίας ή τη βέλτιστη δομή ενός συστήματος δεν γίνεται με αυτό το ίδιο το σύστημα, αλλά με ένα ***μοντέλο*** του ***(model)***. Το μοντέλο είναι μια αναπαράσταση του πραγματικού συστήματος, η οποία πρέπει να το απεικονίζει όσο το δυνατόν πιο πιστά.

Η εφαρμογή του γραμμικού και γενικότερα του μαθηματικού προγραμματισμού για τη βελτιστοποίηση της λειτουργίας ή της δομής ενός συστήματος, προϋποθέτει την περιγραφή του με ένα ***μαθηματικό μοντέλο (mathematical model)***. Η μοντελοποίηση του συστήματος με ένα μαθηματικό μοντέλο επιτυγχάνεται με τη βοήθεια μαθηματικών σχέσεων, οι οποίες περιγράφουν τόσο τη δομή του, όσο και τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των δομικών στοιχείων του συστήματος.

Η μαθηματική μοντελοποίηση ενός συστήματος οδηγεί συχνά στη ***βελτιστοποίηση (optimization)*** μιας συνάρτησης, της οποίας οι μεταβλητές απαιτείται να ικανοποιούν ένα σύστημα ανισοεξισώσεων. Η συνάρτηση της οποίας αναζητείται το μέγιστο ή το ελάχιστο περιγράφει ένα κριτήριο ή μέτρο απόδοσης του συστήματος. Οι ανισοεξισώσεις του μοντέλου αντιπροσωπεύουν τους φυσικούς περιορισμούς στους οποίους υπόκειται το σύστημα. Όταν η προς βελτιστοποίηση συνάρτηση και οι ανισοεξισώσεις του μοντέλου είναι ***γραμμικές*** ως προς τις μεταβλητές, οι οποίες εκφράζουν τις αποφάσεις που πρόκειται να ληφθούν, έχουμε ένα ***μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού***.

Ο όρος ***προγραμματισμός*** εδώ δεν πρέπει να συγχέεται με τον προγραμματισμό των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Ο όρος αυτός υποδηλώνει τον ***προγραμματισμό της λειτουργίας*** ενός συστήματος, υπό την έννοια της λήψης των κατάλληλων αποφάσεων έτσι ώστε η απόδοσή του να βελτιστοποιείται. Πρέπει, ωστόσο, να παρατηρήσουμε ότι τα συστήματα του πραγματικού κόσμου είναι τόσο πολύπλοκα και τόσο μεγάλης διάστασης, ώστε η βελτιστοποίησή τους με τις τεχνικές του γραμμικού προγραμματισμού να μην είναι δυνατή χωρίς τη χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή και τη βοήθεια ειδικού λογισμικού.

Η μεθοδολογία του γραμμικού προγραμματισμού έχει τις ρίζες της στη θεωρία των γραμμικών ανισώσεων, η μελέτη των οποίων είχε ξεκινήσει ήδη από 1826 με τον Fourier. Ωστόσο, τη βάση του γραμμικού προγραμματισμού αποτέλεσαν τα θεωρητικά μοντέλα οικονομικής ισορροπίας και βέλτιστης κατανομής πόρων, τα οποία αναπτύχθηκαν κατά τη δεκαετία του 1930. Μεταξύ αυτών προέχουσα θέση κατέχουν το γραμμικό μοντέλο μιας αναπτυσσόμενης οικονομίας του von Neumann (1935-1936) και το μοντέλο εισροών-εκροών (input-output model) του Leontief (1951), το οποίο περιγράφει τις σχέσεις αλληλεξάρτησης μεταξύ των παραγωγικών κλάδων μιας οικονομίας.

Το μοντέλο εισροών-εκροών έτυχε σημαντικής θεωρητικής ανάπτυξης και εφαρμογής σε πολλά προβλήματα οικονομικού προγραμματισμού, με αποτέλεσμα το 1973 να απονεμηθεί στον Leontief το Βραβείο Νόμπελ Οικονομίας. Θα πρέπει όμως να παρατηρήσουμε ότι το μοντέλο του Leontief δεν απαιτούσε τη βελτιστοποίηση κάποιας συνάρτησης, αλλά μόνο την επίλυση ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων. Η σημερινή μορφή του μοντέλου του γραμμικού προγραμματισμού, καθώς και η βασική τεχνική για την επίλυση γραμμικών προβλημάτων βελτιστοποίησης, η ***μέθοδος simplex***, οφείλονται στον Dantzig (1951).

ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

Ο τρόπος με τον οποίο επιτυγχάνεται η μαθηματική περιγραφή ενός συστήματος του οποίου επιδιώκεται η βελτιστοποίηση, γίνεται καλύτερα κατανοητός με τη βοήθεια μερικών αντιπροσωπευτικών παραδειγμάτων. Για περισσότερα παραδείγματα διαμόρφωσης μοντέλων γραμμικού προγραμματισμού συνιστούμε ειδικότερα τα βιβλία των Bradley, Hax και Magnanti (1977), Bazaraa, Jarvis και Sherali (1990), και Hillier και Lieberman (1995), τα οποία χαρακτηρίζονται για τις πλούσιες συλλογές τους από ενδιαφέρουσες πρακτικές εφαρμογές. Πιο κοντά στη διοικητική διάσταση των μοντέλων γραμμικού προγραμματισμού βρίσκονται τα βιβλία των Anderson, Sweeny και Williams (2003), Eppen, Gould, Schmidt, Moore, και Weatherford (1998), και Winston (1994).

Παράδειγμα 1 (*προγραμματισμός παραγωγής*)

Ας θεωρήσουμε μια βιομηχανική μονάδα, η οποία για την παραγωγή τεσσάρων προϊόντων $Π_1$, $Π_2$, $Π_3$ και $Π_4$ διαθέτει τρεις μηχανές M_1, M_2 και M_3. Στον Πίνακα 1 παρουσιάζονται ο χρόνος που απαιτείται για την επεξεργασία μιας μονάδας από το κάθε προϊόν σε κάθε μηχανή, ο διαθέσιμος ημερήσιος χρόνος κάθε μηχανής και το κέρδος ανά μονάδα προϊόντος (σε νομισματικές μονάδες). Τα μηδενικά στοιχεία του Πίνακα 1 υποδηλώνουν ότι τα προϊόντα $Π_2$ και $Π_4$ δεν υφίστανται επεξεργασία στη μηχανή M_3.

Πίνακας 1. Τεχνικοοικονομικές παράμετροι της παραγωγικής διαδικασίας

Μηχανή	Χρόνος επεξεργασίας μιας μονάδας κάθε προϊόντος στις διάφορες μηχανές (min)				Διαθέσιμος ημερήσιος χρόνος κάθε μηχανής (min)
	$Π_1$	$Π_2$	$Π_3$	$Π_4$	
M_1	5	2	3	1	300
M_2	1	2	1	2	200
M_3	1	0	1	0	100
Κέρδος ανά μονάδα προϊόντος	6	4	2	1	

Είναι λογικό η επιχείρηση να θέλει να αξιοποιήσει το διαθέσιμο χρόνο των μηχανών κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο, ρυθμίζοντας την ημερήσια παραγωγή κάθε προϊόντος σε τέτοιο ύψος, ώστε η απόδοση του συστήματος, όπως εκφράζεται από το συνολικό κέρδος που αποφέρει η πώληση των προϊόντων αυτών, να μεγιστοποιείται. Θα υποθέσουμε ότι όλες οι παραγόμενες ποσότητες απορροφούνται από την αγορά.

Ο χρόνος επεξεργασίας των προϊόντων στις διάφορες μηχανές, ο διαθέσιμος ημερήσιος χρόνος κάθε μηχανής και το κέρδος ανά μονάδα προϊόντος αποτελούν τις σταθερές ή ***παραμέτρους (parameters)*** του προβλήματος. Ο καθορισμός των παραμέτρων, ο οποίος γίνεται κατά το στάδιο ανάλυσης του συστήματος, αποτελεί μια κρίσιμη φάση της όλης διαδικασίας διαμόρφωσης ενός μαθηματικού μοντέλου. Είναι αυτονόητο ότι κατά την ανάλυση του συστήματος πρέπει να γίνει μια αξιολόγηση των παραμέτρων του ώστε να εντοπισθούν όλες οι παράμετροι, οι οποίες πραγματικά επηρεάζουν το κριτήριο απόδοσης του συστήματος. Οι τιμές των παραμέτρων πρέπει, επίσης, να προσδιορίζονται με τη μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια προκειμένου το μαθηματικό μοντέλο που τελικά θα διαμορφωθεί, να ανταποκρίνεται όσο το δυνατόν πιο πιστά στο πραγματικό σύστημα.

Η επόμενη φάση της μαθηματικής διατύπωσης του προβλήματος περιλαμβάνει τον καθορισμό των ***μεταβλητών*** του ***(variables)***. Στα προβλήματα του γραμμικού προγραμματισμού οι μεταβλητές ποσοτικοποιούν τις αποφάσεις που πρόκειται να ληφθούν και για το λόγο αυτό ονομάζονται ***μεταβλητές απόφασης (decision variables)***. Είναι φανερό ότι ο προγραμματισμός της παραγωγής απαιτεί τη λήψη αποφάσεων σχετικά με τις ποσότητες x_1, x_2, x_3 και x_4 που θα παράγονται ημερησίως από τα προϊόντα Π_1, Π_2, Π_3 και Π_4, αντίστοιχα. Οι άγνωστες αυτές ποσότητες αποτελούν τις μεταβλητές του προβλήματος, των οποίων οι τιμές πρέπει να προσδιορισθούν έτσι ώστε το κέρδος να μεγιστοποιείται.

Με τη βοήθεια των παραμέτρων και των μεταβλητών του προβλήματος μπορούμε τώρα να διαμορφώσουμε μια μαθηματική σχέση που να περιγράφει το κριτήριο απόδοσης του συστήματος. Ως ***κριτήριο*** ή ***μέτρο απόδοσης (performance criterion*** ή ***measure)*** του συστήματος εδώ έχει ορισθεί το ***κέρδος*** από τη διάθεση των προϊόντων και ***στόχος*** είναι η ***μεγιστοποίηση (maximize)*** του κριτηρίου αυτού. Δεδομένου ότι το κέρδος ανά μονάδα προϊόντος είναι γνωστό, το συνολικό κέρδος προκύπτει από το άθροισμα

$$z = 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4$$

Η συνάρτηση αυτή, της οποίας αναζητείται το μέγιστο και η οποία περιγράφει το κριτήριο απόδοσης του συστήματος, αποτελεί την ***αντικειμενική συνάρτηση (objective function)*** του μοντέλου.

Είναι φανερό, ότι αυξανομένης της παραγωγής, δηλαδή αυξανομένων των x_1, x_2, x_3 και x_4, αυξάνει και το κέρδος. Ωστόσο, οι παραγόμενες ποσότητες δεν είναι δυνατόν να αυξηθούν απεριόριστα δεδομένου ότι ο ημερήσιος χρόνος που διατίθεται σε κάθε μηχανή είναι περιορισμένος. Οι ημερήσιοι χρόνοι απασχόλησης των μηχανών M_1, M_2 και M_3 είναι, αντίστοιχα, $5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4$, $x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4$, και $x_1 + x_3$. Δεδομένου ότι ο ημερήσιος χρόνος απασχόλησης κάθε μηχανής πρέπει να είναι μικρότερος ή ίσος ($\leq$) του αντίστοιχου διαθέσιμου, θα πρέπει να ισχύει

$$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &\leq 300 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &\leq 200 \\ x_1 + x_3 &\leq 100 \end{aligned}$$

Το γεγονός εξάλλου ότι οι μεταβλητές x_1, x_2, x_3 και x_4 παριστάνουν παραγόμενες ποσότητες σημαίνει ότι οι μεταβλητές αυτές δεν είναι δυνατόν να παίρνουν αρνητικές τιμές. Έτσι, θα πρέπει να είναι $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$.

Οι ***ανισώσεις*** τις οποίες εισάγει στο πρόβλημα ο διαθέσιμος χρόνος των μηχανών και η ***μη αρνητικότητα*** των μεταβλητών απόφασης, εκφράζουν τους φυσικούς ***περιορισμούς (contraints)*** στους οποίους υπόκειται το εξεταζόμενο σύστημα. Η αντικειμενική συνάρτηση και οι περιορισμοί συναποτελούν το ***μαθηματικό μοντέλο*** του συστήματος. Επομένως, το μαθηματικό μοντέλο για το συγκεκριμένο πρόβλημα προγραμματισμού της παραγωγής είναι:

να μεγιστοποιηθεί (maximize) η $z = 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4$

με τους περιορισμούς

$$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &\leq 300 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &\leq 200 \\ x_1 + x_3 &\leq 100 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0&, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2 (*επιλογή επενδυτικού προγράμματος*)

Μια εταιρεία προτίθεται να επενδύσει 80 εκατομμύρια νομισματικές μονάδες σε κοινές και σε προνομιούχες μετοχές εταιρειών εισηγμένων στο χρηματιστήριο, καθώς και σε ομόλογα του δημοσίου. Η αναμενόμενη ετήσια απόδοση των τριών αυτών τύπων επένδυσης είναι, κατά σειρά, 15%, 17% και 12%. Δεδομένου ότι οι επενδύσεις σε κοινές και σε προνομιούχες μετοχές κρίνονται υψηλού κινδύνου, η εταιρεία έχει αποφασίσει να επενδύσει σε τέτοιες μετοχές όχι παραπάνω από το 25% του επενδυόμενου συνολικά κεφαλαίου. Επιπλέον, το επενδυόμενο ποσό σε προνομιούχες μετοχές δεν πρέπει να υπερβαίνει το 75% της συνολικής επένδυσης σε μετοχές, ενώ τουλάχιστον το 20% του επενδυόμενου κεφαλαίου πρέπει να είναι σε ομόλογα του δημοσίου. Η εταιρεία ενδιαφέρεται να επιλέξει εκείνο το επενδυτικό σχήμα που μεγιστοποιεί την απόδοση του κεφαλαίου της.

Μεταβλητές

Έστω x_1, x_2 και x_3, αντίστοιχα, το ποσό σε εκατομμύρια νομισματικές μονάδες, που θα επενδυθεί σε κοινές μετοχές, σε προνομιούχες μετοχές και σε ομόλογα του δημοσίου.

Αντικειμενική συνάρτηση

Το ποσό x_1 θα έχει απόδοση ίση με $0.15\,x_1$, το ποσό x_2 θα έχει απόδοση ίση με $0.17\,x_2$ και το ποσό x_3 θα έχει απόδοση ίση με $0.12\,x_3$. Στόχος είναι η μεγιστοποίηση της συνολικής απόδοσης $z = 0.15\,x_1 + 0.17\,x_2 + 0.12\,x_3$.

Περιορισμοί

Το επενδυόμενο συνολικά ποσό δεν μπορεί να υπερβαίνει το διαθέσιμο. Άρα,

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 80.$$

Το επενδυόμενο ποσό, $x_1 + x_2$, σε μετοχές δεν πρέπει να είναι μεγαλύτερο από το 25% της συνολικής επένδυσης, $x_1 + x_2 + x_3$. Επομένως,

$$x_1 + x_2 \le 0.25(x_1 + x_2 + x_3) \Leftrightarrow 0.75\,x_1 + 0.75\,x_2 - 0.25\,x_3 \le 0$$

Επιπλέον, το επενδυόμενο ποσό, x_2, σε προνομιούχες μετοχές δεν πρέπει να είναι μεγαλύτερο από το 75% της συνολικής επένδυσης, $x_1 + x_2$, σε μετοχές. Αυτό σημαίνει ότι

$$x_2 \le 0.75(x_1 + x_2) \Leftrightarrow -0.75\,x_1 + 0.25\,x_2 \le 0$$

Τέλος, τουλάχιστον το 20% του επενδυόμενου κεφαλαίου, $x_1 + x_2 + x_3$, πρέπει να έχει διατεθεί σε ομόλογα του δημοσίου. Άρα, θα πρέπει

$$x_3 \ge 0.20(x_1 + x_2 + x_3) \Leftrightarrow -0.20\,x_1 - 0.20\,x_2 + 0.80\,x_3 \ge 0.$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι οι μεταβλητές x_1, x_2 και x_3 είναι μη αρνητικοί αριθμοί, το μαθηματικό μοντέλο για τη βέλτιστη σύνθεση του επενδυτικού χαρτοφυλακίου είναι:

$$\begin{array}{ll}
\textbf{να μεγιστοποιηθεί η } z = & 0.15x_1 + 0.17x_2 + 0.12x_3 \\
& x_1 + x_2 + x_3 \le 80 \\
\textbf{με τους} & 0.75x_1 + 0.75x_2 - 0.25x_3 \le 0 \\
\textbf{περιορισμούς} & -0.75x_1 + 0.25x_2 \le 0 \\
& -0.20x_1 - 0.20x_2 + 0.80x_3 \ge 0 \\
& x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0
\end{array}$$

Παράδειγμα 3 (σύνθεση ζωοτροφών – το πρόβλημα της δίαιτας)

Μια βιομηχανία παραγωγής ζωοτροφών πρέπει να παραδώσει σε κάποιον πελάτη της μια ποσότητα ζωοτροφής με περιεκτικότητα τουλάχιστον 21% σε πρωτεΐνες και 5% σε λιπαρά. Το κόστος και η περιεκτικότητα σε πρωτεΐνες και σε λιπαρά των χρησιμοποιούμενων από τη βιομηχανία πρώτων υλών παρουσιάζονται στον Πίνακα 2. Το ζητούμενο είναι η ελαχιστοποίηση του κόστους των πρώτων υλών για την παραγωγή ζωοτροφής με την επιθυμητή περιεκτικότητα σε πρωτεΐνες και λιπαρά.

Πίνακας 2. Κόστος και περιεκτικότητα σε θρεπτικά συστατικά των πρώτων υλών για τη σύνθεση ζωοτροφών.

Θρεπτικά συστατικά	Περιεκτικότητα (%) των πρώτων υλών σε θρεπτικά συστατικά				Ελάχιστη επιθυμητή περιεκτικότητα (%)
	Κριθάρι	Βρόμη	Σησάμι	Καλαμποκάλευρο	
Πρωτεΐνες	12	11	41	52	21
Λιπαρά	2	5	11	1	5
Κόστος πρώτων υλών ανά κιλό	800	850	1200	1500	

Μεταβλητές

Έστω x_1, x_2, x_3 και x_4, αντίστοιχα, η ποσότητα κριθαριού, βρόμης, σησαμιού και καλαμποκάλευρου που θα περιέχεται σε ένα κιλό ζωοτροφής που πληροί τις διατροφικές απαιτήσεις.

Αντικειμενική συνάρτηση

Στόχος είναι η ελαχιστοποίηση του κόστους $z = 800x_1 + 850x_2 + 1200x_3 + 1500x_4$ για την παραγωγή ενός κιλού ζωοτροφής.

Περιορισμοί

Το άθροισμα των ποσοτήτων x_1, x_2, x_3 και x_4 πρέπει να είναι ίσο με ένα κιλό, δηλαδή

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

Η ζωοτροφή πρέπει να έχει περιεκτικότητα τουλάχιστον 21% σε πρωτεΐνες και 5% σε λιπαρά. Δεδομένου ότι οι ποσότητες x_1, x_2, x_3 και x_4 περιέχονται σε ένα κιλό ζωοτροφής, θα πρέπει να ισχύει

$$\begin{array}{lr} \textit{(περιεκτικότητα σε πρωτεΐνες)} & 12x_1 + 11x_2 + 41x_3 + 52x_4 \geq 21 \\ \textit{(περιεκτικότητα σε λιπαρά)} & 2x_1 + 5x_2 + 11x_3 + x_4 \geq 5 \end{array}$$

Επιπλέον, οι ποσότητες x_1, x_2, x_3 και x_4 πρέπει να είναι μη αρνητικές.

Επομένως, η σύνθεση η οποία ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος των πρώτων υλών, θα προκύψει από την επίλυση του μαθηματικού μοντέλου:

να ελαχιστοποιηθεί (minimize) η $z = 800x_1 + 850x_2 + 1200x_3 + 1500x_4$

με τους περιορισμούς

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ 12x_1 + 11x_2 + 41x_3 + 52x_4 &\geq 21 \\ 2x_1 + 5x_2 + 11x_3 + x_4 &\geq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 4 (*εκχώρηση προσωπικού σε θέσεις εργασίας – assignment problem*)

Ο διευθυντής προσωπικού μιας επιχείρησης επιθυμεί να καλύψει τρεις θέσεις που πρόσφατα έμειναν κενές λόγω συνταξιοδότησης του προσωπικού, με τρία νεότερα στελέχη της. Με βάση την εμπειρία που έχει από την απόδοση των στελεχών αυτών κατήρτισε τον Πίνακα 3, τα στοιχεία του οποίου δείχνουν την αναμενόμενη απόδοση των συγκεκριμένων τριών στελεχών της εταιρείας στις τρεις συγκεκριμένες θέσεις. Η εταιρεία επιθυμεί να καλύψει τις θέσεις με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε η συνολική απόδοση να μεγιστοποιείται.

Πίνακας 3. Δείκτες απόδοσης

Στέλεχος	**Θέση**		
	1η	**2η**	**3η**
1ο	8	26	17
2ο	13	28	4
3ο	39	19	18

Μεταβλητές

Η απόφαση που καλείται να πάρει το ΔΣ της εταιρείας είναι κατά πόσο το i-οστό στέλεχος (i=1,2,3) πρέπει να αναλάβει τα καθήκοντα της j-οστής θέσης (j=1,2,3). Η απάντηση στο ερώτημα αυτό, το οποίο τίθεται για κάθε συνδυασμό στελέχους-θέσης, είναι της μορφής ''ναι-όχι'', ή σε μαθηματική γλώσσα ''1-0''. Έτσι, λοιπόν, για κάθε συνδυασμό στελέχους i, (i=1,2,3)-θέσης j, (j=1,2,3) πρέπει να ορίσουμε μια μεταβλητή x_{ij}, η οποία, αν έχει τιμή ίση με τη μονάδα θα σημαίνει ότι το i-οστό στέλεχος θα αναλάβει καθήκοντα στη j-οστή θέση, ενώ αν η μεταβλητή αυτή έχει τιμή ίση με το μηδέν θα σημαίνει ότι το συγκεκριμένο στέλεχος θα τοποθετηθεί αλλού.

Αντικειμενική συνάρτηση

Είναι φανερό ότι η συνολική απόδοση προκύπτει αθροίζοντας τους δείκτες απόδοσης των τριών στελεχών για τις τρεις θέσεις που τελικά θα καταλάβουν. Επομένως, η απόδοση c_{ij} του i-οστού στελέχους στη j-οστή θέση πρέπει να συνυπολογισθεί στο άθροισμα μόνο στην περίπτωση που το i-οστό στέλεχος τοποθετηθεί στη j-οστή θέση, δηλαδή μόνον όταν x_{ij}=1. Αυτό επιτυγχάνεται, αν ως αντικειμενική συνάρτηση θεωρήσουμε το άθροισμα των γινομένων $c_{ij} \cdot x_{ij}$ για όλους τους δυνατούς συνδυασμούς των i και j, δηλαδή $z = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}x_{ij}$. Προφανώς, στο άθροισμα αυτό υπεισέρχονται μόνο οι δείκτες απόδοσης c_{ij} για τους οποίους τελικά θα προκύψει ότι x_{ij}=1.

Περιορισμοί

Δεδομένου ότι οι μόνες επιτρεπτές τιμές των x_{ij} είναι το μηδέν και η μονάδα, κάθε δε στέλεχος θα καταλάβει μια και μόνο θέση, για κάθε i μια και μόνο από τις τρεις μεταβλητές x_{i1}, x_{i2} και x_{i3} μπορεί (και πρέπει) να είναι ίση με τη μονάδα, ενώ οι υπόλοιπες δύο πρέπει να είναι ίσες με το μηδέν. Αυτό εξασφαλίζεται, αν για κάθε i ισχύει ο περιορισμός: $x_{i1} + x_{i2} + x_{i3}$=1 (i=1,2,3). Ακολουθώντας ένα παρόμοιο σκεπτικό, μπορούμε (και πρέπει) να εξασφαλίσουμε ότι σε κάθε θέση θα τοποθετηθεί ένα και μόνο στέλεχος, υποχρεώνοντας για κάθε j να ισχύει: $x_{1j} + x_{2j} + x_{3j}$ =1 (j=1,2,3).

Επομένως, το προς επίλυση πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού είναι:

να μεγιστοποιηθεί η $z = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}x_{ij}$

με τους περιορισμούς

$$\sum_{j=1}^{3} x_{ij} = 1 \ (i = 1,2,3)$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} = 1 \ (j = 1,2,3)$$

$$x_{ij} = 0 \text{ ή } 1 \quad \forall\, i, j$$

Παράδειγμα 5 (*Κατάρτιση προγράμματος εργασίας ελαχίστου κόστους*)

Σε ένα εστιατόριο, ο ελάχιστος αριθμός σερβιτόρων που απαιτούνται για κάθε μία από τις επτά ημέρες της εβδομάδος δίνεται στον ακόλουθο πίνακα.

Ημέρα	ΔΕ	ΤΡ	ΤΕ	ΠΕ	ΠΑ	ΣΑ	ΚΥ
Σερβιτόροι	17	13	15	19	14	16	11

Θεωρώντας ότι στο συγκεκριμένο εστιατόριο όλοι οι σερβιτόροι αμείβονται το ίδιο και ότι κάθε σερβιτόρος πρέπει να εργάζεται 5 συνεχόμενες ημέρες και στη συνέχεια να παίρνει ρεπό δύο ημερών, θέλουμε να κατασκευαστεί ένα μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού το οποίο να μπορεί να εντοπίσει το ελάχιστο συνολικό πλήθος εργαζομένων που πρέπει να προσλάβει το εστιατόριο καθώς επίσης και ο τρόπος με τον οποίο το προσωπικό αυτό θα κατανέμεται σε πενθήμερα προγράμματα εργασίας. Ο στόχος ποιος είναι; Επειδή θεωρήσαμε ότι οι αμοιβές είναι ίδιες, αν ελαχιστοποιήσουμε το συνολικό πλήθος εργαζομένων ταυτόχρονα ελαχιστοποιείται και το συνολικό κόστος εργασίας (το οποίο θα υπάρχει στο παρασκήνιο).

Μεταβλητές

Θεωρώντας ότι η παραπάνω εβδομάδα είναι μία τυπική εβδομάδα, ορίζουμε να είναι x_i ο αριθμός των σερβιτόρων που <u>ξεκινούν</u> την πενθήμερη εβδομαδιαία βάρδια εργασίας τους την i-ημέρα (i=1 = Δευτέρα, i=2 = Τρίτη , ..., i=7 = Κυριακή).

Αντικειμενική συνάρτηση

Το προσωπικό με πρώτη ημέρα εργασίας τη Δευτέρα, θα συνεχίσει να εργάζεται μέχρι και την Παρασκευή (δηλαδή, θα έχουν «ρεπό» Σάββατο και Κυριακή). Τα άτομα που ξεκινούν με πρώτη ημέρα εργασίας την Τρίτη, εργάζονται μέχρι και το Σάββατο (και έχουν «ρεπό» Κυριακή και Δευτέρα), κ.ο.κ. Κατά συνέπεια, ο συνολικός αριθμός των σερβιτόρων που εργάζονται στο εστιατόριο και που θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε, είναι το άθροισμα του πλήθους των σερβιτόρων που ξεκινούν να εργάζονται τη Δευτέρα με το πλήθος εκείνων που ξεκινούν τη βάρδια τους την Τρίτη κ.ο.κ. μέχρι και το πλήθος εκείνων που ξεκινούν την Κυριακή. Επομένως, η αντικειμενική συνάρτηση είναι:

minimize $z = x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7$

Περιορισμοί

Λόγω της εβδομαδιαίας κυκλικότητας, και της συνεχούς λειτουργίας του εστιατορίου, αν πάρουμε μία τυχαία ημέρα, την Παρασκευή για παράδειγμα, τότε θα διαπιστώσουμε ότι θα εργάζονται στο εστιατόριο οι x_1 σερβιτόροι που έπιασαν δουλειά τη Δευτέρα, οι x_2 που έπιασαν δουλειά την Τρίτη, οι x_3 που ξεκίνησαν να εργάζονται την Τετάρτη, οι x_4 σερβιτόροι της Πέμπτης και τέλος οι x_5 σερβιτόροι που ξεκίνησαν εργασία την Παρασκευή. Συνεπώς, οι πλήθους $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5$ υπάλληλοι που εργάζονται την Παρασκευή, πρέπει τουλάχιστον να καλύπτουν τη ζήτηση των 14 σερβιτόρων που απαιτούνται. Άρα, θα πρέπει:

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 14$ (Παρασκευή).

Ομοίως, προκύπτουν και οι περιορισμοί για τις υπόλοιπες ημέρες της εβδομάδος. Οπότε έχουμε,

$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 16$ (Σάββατο),

$x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 11$ (Κυριακή),

$x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 17$ (Δευτέρα),

$x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 13$ (Τρίτη),

$x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 \geq 15$ (Τετάρτη),

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 \geq 19$ (Πέμπτη),

με $x_i \geq 0$ (i=l, 2, 3, 4, 5, 6, 7).

Σημειώστε, ότι ο πειρασμός να ορίσουμε τις μεταβλητές x_i ως το πλήθος των σερβιτόρων που εργάζονται στο εστιατόριο την i-ημέρα είναι ισχυρός αλλά οδηγεί στο ακόλουθο λανθασμένο μοντέλο:

minimize $z= x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7$

με περιορισμούς $x_i \geq$ (απαιτούμενος αριθμός σερβιτόρων για την i-ημέρα), i = 1, …,7.

Στην περίπτωση αυτή όμως, το άθροισμα $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7$ δεν είναι ο συνολικός αριθμός των εργαζομένων σερβιτόρων στο εστιατόριο, διότι ο κάθε εργαζόμενος καταγράφεται πέντε (!) φορές. Επιπλέον, αγνοείται στους περιορισμούς η αλληλεξάρτηση που υπάρχει μεταξύ των μεταβλητών, π.χ. ότι μερικοί από τους x_1 σερβιτόρους που εργάζονται τη Δευτέρα, εξακολουθούν να εργάζονται την Τρίτη, κ.ο.κ.

Η επίλυση του ορθού μοντέλου δίνει $x_1 = 6.33$, $x_2 = 5$, $x_3 = 0.33$, $x_4 = 7.33$, $x_5 = 0$, $x_6 = 3.33$, $x_7 = 0$ με ελάχιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, δηλαδή ελάχιστο απαιτούμενο συνολικό πλήθος εργαζομένων, z= 22.33. Φυσικά, δεν είναι δυνατόν να έχουμε δεκαδικούς αριθμούς όταν αναφερόμαστε σε μεταβλητές που παριστάνουν ανθρώπινο δυναμικό. Ο γραμμικός προγραμματισμός όμως "δεν το γνωρίζει αυτό" και επιλύει το πρόβλημα εντοπίζοντας την καλύτερη δυνατή λύση. Αν από το φυσικό νόημα των μεταβλητών μας θέλουμε οπωσδήποτε ακέραια λύση, μπορούμε να επιλύσουμε το μοντέλο με τη μεθοδολογία του ακέραιου προγραμματισμού, οπότε η βέλτιστη λύση που θα παίρναμε θα ήταν η εξής: $x_1 = 7$, $x_2 = 4$, $x_3 = 0$, $x_4 = 8$, $x_5 = 0$, $x_6 = 4$, $x_7 = 0$ με ελάχιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, δηλαδή συνολικό πλήθος εργαζομένων, z= 23. Παρατηρήστε ότι η άριστη τιμή του z είναι μεγαλύτερη από την προηγούμενη. Πράγματι, αν θέλουμε ακέραια λύση πρέπει να "πληρώσουμε" κάτι παραπάνω. Σύμφωνα με την άριστη αυτή λύση τη Δευτέρα θα ξεκινούν τη βάρδια τους 7 άτομα, την Τρίτη 4 άτομα, την Πέμπτη 8 άτομα και το Σάββατο 4 σερβιτόροι. Τη Δευτέρα θα εργάζονται συνολικά 19 άτομα (2 περισσότεροι από την ελάχιστη απαίτηση), την Τρίτη 15 άτομα (2 περισσότεροι από την ελάχιστη απαίτηση), την Τετάρτη (ακριβώς όσοι χρειάζονται), την Πέμπτη 19 άτομα (ακριβώς όσοι χρειάζονται), την Παρασκευή 19 άτομα (5 άτομα παραπάνω), το Σάββατο 16 άτομα (ακριβώς) και τέλος την Κυριακή εργάζονται 12 άτομα (1 άτομο παραπάνω). Δεν υπάρχει τρόπος κάλυψης των ημερήσιων αναγκών με λιγότερο συνολικό πλήθος σερβιτόρων (23 άτομα).

Παράδειγμα 6 (*επιλογή διαφημιστικών μέσων*)

Μια εταιρεία παραγωγής λογισμικού αναζητά τον καλύτερο τρόπο διαφήμισης του νέου της προγράμματος λογιστικής διαχείρισης. Λόγω της ιδιαιτερότητας του προϊόντος, έχουν αποκλειστεί τα συνήθη μέσα προώθησης (ραδιόφωνο, τηλεόραση, περιοδικά ποικίλης ύλης) και στη θέση τους έχουν επιλεγεί συγκεκριμένα εξειδικευμένα έντυπα του χώρου τα οποία δέχονται ασπρόμαυρες ή/και έγχρωμες καταχωρήσεις. Τα έντυπα είναι τα εξής: «Ανάπτυξη», «Εβδομαδιαία» και «Λογιστής». Ο πίνακας που ακολουθεί περιέχει τα στοιχεία της κυκλοφορίας καθώς επίσης και το κόστος καταχωρήσεων για τα έντυπα αυτά:

Έντυπο	Συχνότητα κυκλοφορίας	Δείκτης απόδοσης (θέασης) ανά καταχώρηση	Τύπος καταχώρησης	Κόστος καταχώρησης (χρηματικές μονάδες)
Ανάπτυξη	καθημερινή (5 ημέρες/εβδομάδα)	102000	(Ολοσέλιδη, ασπρόμαυρη)	800
		40800	(Μισής σελίδας, ασπρόμαυρη)	500
Εβδομαδιαία	Εβδομαδιαίο	9250	(Ολοσέλιδη, ασπρόμαυρη)	1500
		182500	(Ολοσέλιδη, έγχρωμη)	4000
Λογιστής	Μηνιαίο	82000	(Ολοσέλιδη, ασπρόμαυρη)	2000
		164000	(Ολοσέλιδη, έγχρωμη)	6000

Αν η σχεδιαζόμενη διαφημιστική εκστρατεία προγραμματίζεται να διαρκέσει τρεις μήνες (δηλαδή 13 εβδομάδες) κι έχει συνολικό προϋπολογισμό 90000 χρηματικές μονάδες, το ζητούμενο είναι να προσδιοριστεί ο αριθμός των καταχωρήσεων που πρέπει να δοθούν στο κάθε έντυπο, έτσι ώστε να μεγιστοποιείται ο συνολικός αναμενόμενος δείκτης απόδοσης και επιπλέον να ισχύουν οι κάτωθι προϋποθέσεις:

- το πολύ μια καταχώρηση μπορεί να μπει σε κάθε τεύχος των ανωτέρω εντύπων,
- να εμφανιστούν τουλάχιστον 50 ολοσέλιδες καταχωρήσεις,
- να υπάρξουν τουλάχιστον 8 έγχρωμες καταχωρήσεις,
- να υπάρχει οπωσδήποτε μία καταχώρηση σε κάθε τεύχος του «Λογιστής»,
- στα έντυπα «Ανάπτυξη» και «Εβδομαδιαία» να εμφανιστούν καταχωρήσεις που να ισοδυναμούν με τουλάχιστον 4 εβδομάδες, (όχι κατ' ανάγκη συνεχόμενες)
- σε κανένα έντυπο δεν θα διατεθούν περισσότερες από 40000 χρηματικές μονάδες

Μεταβλητές

Ορίζουμε τις μεταβλητές απόφασης ως εξής: x_1, x_2 το πλήθος των ασπρόμαυρων ολοσέλιδων και μισής σελίδας καταχωρήσεων (αντίστοιχα) που θα εμφανιστούν στο «Ανάπτυξη», x_3, x_4 το πλήθος των ασπρόμαυρων και έγχρωμων ολοσέλιδων καταχωρήσεων (αντίστοιχα) που θα εμφανιστούν στο «Εβδομαδιαία», x_5, x_6 το πλήθος των ασπρόμαυρων και έγχρωμων ολοσέλιδων καταχωρήσεων (αντίστοιχα) που θα εμφανιστούν στο «Λογιστής» κατά τη διάρκεια της τρίμηνης διαφημιστικής καμπάνιας.

Αντικειμενική συνάρτηση

Η συνολική απόδοση των ανωτέρω x_1, x_2 x_3, x_4 x_5 και x_6 καταχωρήσεων, την οποία θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε ανέρχεται σε:

$$102000x_1 + 40800x_2 + 91250x_3 + 182500x_4 + 82000x_5 + 164000x_6$$

Περιορισμοί

Οι περιορισμοί του προβλήματος προκύπτουν από

- τον διαθέσιμο προϋπολογισμό δηλαδή:

$$800x_1 + 500x_2 + 1500x_3 + 4000x_4 + 2000x_5 + 6000x_6 \leq 90000$$

- τον αριθμό των καταχωρήσεων που μπορούν να εμφανιστούν στο «Ανάπτυξη»:

$$x_1 + x_2 \leq 65 \text{ (το πολύ 65 καταχωρήσεις αφού είναι } 65 = 5 \times 13 \text{ εβδομάδες)}$$

$x_1 + x_2 \geq 20$ (τουλάχιστον 20 καταχωρήσεις αφού είναι 20 = 5 × 4εβδομάδες)

- τον αριθμό των καταχωρήσεων που μπορούν να εμφανιστούν στο «Εβδομαδιαία»:

$x_3 + x_4 \leq 13$ (το πολύ 13 καταχωρήσεις, μία κάθε εβδομάδα)

$x_3 + x_4 \geq 4$ (τουλάχιστον 4 καταχωρήσεις)

- τον αριθμό των καταχωρήσεων που μπορούν να εμφανιστούν στο «Λογιστής»:

$x_5 + x_6 = 3$ (το πολύ μία σε κάθε τεύχος)

Επιπλέον,

- πρέπει να υπάρξουν τουλάχιστον 50 ολοσέλιδες καταχωρήσεις:

$$x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 50$$

- πρέπει να υπάρξουν τουλάχιστον 8 έγχρωμες καταχωρήσεις:

$$x_4 + x_6 \geq 8$$

- το μέγιστο ποσό που μπορεί να δοθεί σε ένα έντυπο είναι 40000 χρηματικές μονάδες:

$800x_1 + 500x_2 \leq 40000$, $1500x_3 + 4000x_4 \leq 40000$ και $2000x_5 + 6000x_6 \leq 40000$

Τέλος ισχύει ο περιορισμός της μη αρνητικότητας δηλαδή: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$.

<u>Η άριστη λύση</u> για το πρόβλημα είναι η εξής:

Έντυπο	**Καταχωρήσεις**		
	Μορφή	**Πλήθος**	**Κόστος**
Ανάπτυξη (x_1)	Ολοσέλιδη, ασπρόμαυρη	50	40000
Ανάπτυξη (x_2)	Μισής σελίδας ασπρόμαυρη	0	0
Εβδομαδιαία (x_3)	Ολοσέλιδη, ασπρόμαυρη	4.8	7200
Εβδομαδιαία (x_4)	Ολοσέλιδη, έγχρωμη	8.2	32800
Λογιστής (x_5)	Ολοσέλιδη, ασπρόμαυρη	2	4000
Λογιστής (x_6)	Ολοσέλιδη, έγχρωμη	1	6000
		66	90000

που δίνει **άριστη τιμή** (μέγιστο) δείκτη θέασης z= 7362500. Παρατηρήστε, ότι οι μεταβλητές x_3 και x_4 δεν είναι ακέραιες. Αν κάτι τέτοιο είναι απαραίτητο τότε θα πρέπει το μοντέλο να επιλυθεί με τη μεθοδολογία του ακεραίου προγραμματισμού.

Παράδειγμα 7 (*Χρηματοοικονομική ανάλυση*)

Μία ναυτιλιακή εταιρεία έχει καταδικαστεί να καταβάλει χρηματικό πρόστιμο ύψους €1705000 λόγω της μόλυνσης την οποία προκάλεσε δεξαμενόπλοιο ιδιοκτησίας της, το οποίο παρουσίασε ρήγμα κοντά στις ακτές αφήνοντας να διαφύγουν τεράστιες ποσότητες αργού πετρελαίου. Η εταιρεία κατάφερε να πετύχει μία ρύθμιση τμηματικής καταβολής του προστίμου σε μία περίοδο έξι ετών, με τον ακόλουθο τρόπο.

Έτος	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Ποσό (χιλιάδες €)	190	215	240	285	315	460

Η πληρωμή της ετήσιας δόσης πρέπει να λαμβάνει χώρα στην αρχή κάθε έτους. Η επιχείρηση για να μπορέσει να αντεπεξέλθει στις υποχρεώσεις της, σκοπεύει να επενδύσει ένα αρχικό ποσό σε προθεσμιακές καταθέσεις και σε κρατικά ομόλογα δύο τύπων έτσι ώστε από τις αποδόσεις και τα κεφάλαια που θα ωριμάζουν κάθε έτος να μπορεί να έχει κάθε φορά την απαιτούμενη δόση. Οι προθεσμιακές καταθέσεις έχουν απόδοση 4% ετησίως και είναι διαθέσιμες κάθε χρόνο. Στα ομόλογα οι επενδύσεις γίνονται στην αρχή της εξαετίας μία φορά μόνο. Το κρατικό ομόλογο τύπου Α αυτή τη στιγμή πωλείται προς €1055 το μερίδιο, έχει ετήσια απόδοση 6.75% η οποία αποδίδεται στον επενδυτή ετησίως, όμως το κεφάλαιο επιστρέφεται μετά από 3 χρόνια. Το κρατικό ομόλογο τύπου Β πωλείται προς €1000 το μερίδιο, έχει ετήσια απόδοση 5.125% η οποία αποδίδεται στον επενδυτή ετησίως αλλά το αρχικό κεφάλαιο επιστρέφεται σε 4 χρόνια. Υπογραμμίζουμε το γεγονός ότι όλες οι αποδόσεις καταβάλλονται κάθε χρόνο. Η επιχείρηση θέλει να εντοπίσει το ελάχιστο κεφάλαιο που απαιτείται για να ξεκινήσει το επενδυτικό αυτό σχέδιο ώστε να είναι συνεπής στην καταβολή των δόσεων.

Μεταβλητές

Ορίζουμε ως μεταβλητές τις εξής: Έστω F το αρχικό κεφάλαιο που απαιτείται. Αυτό πρέπει να ελαχιστοποιηθεί (για ευνόητους λόγους). Επίσης, έστω Α τα μερίδια των ομολόγων τύπου Α που θα αγοραστούν και Β τα μερίδια των ομολόγων τύπου Β που επίσης θα αγοραστούν. Τέλος, παριστάνουμε με K_i το ποσό που θα τοποθετηθεί σε προθεσμιακή κατάθεση στην αρχή του έτους $i = 1,2,3,4,5$.

Αντικειμενική συνάρτηση

Η αντικειμενική συνάρτηση είναι πάρα πολύ απλή, αφού η επιθυμία μας είναι να ξεκινήσουμε με το ελάχιστο δυνατό κεφάλαιο. Άρα έχουμε:

$$\text{Min } z = F$$

Περιορισμοί

Οι περιορισμοί του προβλήματος αντικατοπτρίζουν τις απαιτήσεις που πρέπει να ικανοποιούνται στην αρχή κάθε έτους σε σχέση με τις χρηματικές εισροές και εκροές της επιχείρησης. Η γενική σχέση που διέπει τις χρηματικές ροές είναι η ακόλουθη:

Ρευστά διαθέσιμα που προέρχονται από την προηγούμενη περίοδο +
αποδόσεις επενδύσεων που έχουν ωριμάσει μέχρι το τέλος της προηγούμενης περιόδου
= ποσά που επενδύονται +
ποσά που χρησιμοποιούνται για την πληρωμή δόσεων +
ποσό που παραμένει σε ρευστά διαθέσιμα.

Στο πρόβλημά μας δεν έχει νόημα η διατήρηση κεφαλαίων σε ρευστά διαθέσιμα καθώς δεν διαφαίνεται η απαίτηση για κάτι τέτοιο από την εκφώνηση. Άλλωστε, είναι λογικό ότι η επιχείρηση δεν έχει την πολυτέλεια να κάνει κάτι τέτοιο αφού στην πραγματικότητα προσπαθεί να έχει όσο γίνεται μεγαλύτερες αποδόσεις ώστε να καλύψει τις δόσεις με το μικρότερο δυνατό αρχικό κεφάλαιο. Ακολουθώντας την παραπάνω γενική σχέση ροής, για την αρχή του πρώτου έτους θα έχουμε ότι η επιχείρηση διαθέτει ένα άγνωστο ποσό F, ένα τμήμα του οποίου κατανέμεται σε τρεις επενδύσεις και ένα άλλο τμήμα χρησιμοποιείται για την καταβολή της πρώτης δόσης. Έτσι παίρνουμε τον ακόλουθο περιορισμό (τα ποσά σε χιλιάδες ευρώ):

$$F = 1.055A + 1.000B + K_1 + 190$$

δηλαδή είναι $F - 1.055A - 1.000B - K_1 = 190$.

Στην αρχή του δεύτερου έτους η επιχείρηση θα εισπράξει τόκους από τα ομόλογα καθώς επίσης τελική αξία (τοποθετηθέν κεφάλαιο και τόκους) από την προθεσμιακή κατάθεση. Δηλαδή, θα έχει στη διάθεσή της ποσό $0.0675A + 0.05125B + 1.04K_1$ το οποίο μπορεί να το διαμοιράσει μεταξύ της προθεσμιακής κατάθεσης K_2 και της πληρωμής της δόσης των 215 χιλιάδων ευρώ. Άρα ο περιορισμός είναι

$$0.0675A + 0.05125B + 1.04K_1 = K_2 + 215$$

δηλαδή είναι $0.0675A + 0.05125B + 1.04K_1 - K_2 = 215$

Στην αρχή του τρίτου έτους η επιχείρηση πάλι θα εισπράξει τόκους από τα ομόλογα όπως επίσης κεφάλαιο και τόκους από την προθεσμιακή κατάθεση K_2. Επομένως, θα έχει στη διάθεσή της ποσό $0.0675A + 0.05125B + 1.04K_2$ το οποίο μπορεί να το τοποθετήσει στην προθεσμιακή κατάθεση K_3 και να καταβάλει και τη δόση των €240000. Συνεπώς, ο επόμενος περιορισμός είναι

$$0.0675A + 0.05125B + 1.04K_2 = K_3 + 240$$

δηλαδή είναι $0.0675A + 0.05125B + 1.04K_2 - K_3 = 240$.

Στην αρχή του τέταρτου έτους η επιχείρηση θα εισπράξει κεφάλαιο και τόκους από το ομόλογο τύπου A, τόκους από το ομόλογο τύπου B καθώς επίσης κεφάλαιο και απόδοση από την προθεσμιακή κατάθεση K_3. Έτσι θα έχει στη διάθεσή της ποσό $1.0675A + 0.05125B + 1.04K_3$ για να το τοποθετήσει στην προθεσμιακή κατάθεση K_4 και να καταβάλει τη δόση των €285000. Ο επόμενος περιορισμός είναι

$$1.0675A + 0.05125B + 1.04K_3 = K_4 + 285$$

δηλαδή $1.0675A + 0.05125B + 1.04K_3 - K_4 = 285$.

Δεν υπάρχει εκ νέου τοποθέτηση σε ομόλογο τύπου A καθώς δεν προβλέπεται κάτι τέτοιο από το σενάριο του προβλήματος ούτε άλλωστε και υπάρχει χρόνος για να μπορέσει να ωριμάσει η εν λόγω επένδυση.

Στην αρχή του πέμπτου έτους η επιχείρηση θα εισπράξει κεφάλαιο και απόδοση από το ομόλογο τύπου B καθώς επίσης κεφάλαιο και απόδοση από την προθεσμιακή κατάθεση K_4. Έτσι, θα έχει στη διάθεσή της ποσό $1.05125B + 1.04K_4$ για να το τοποθετήσει στην προθεσμιακή κατάθεση K_5 και να καταβάλει τη δόση των €315000. Ο επόμενος περιορισμός είναι

$$1.05125B + 1.04K_4 = K_5 + 315$$

δηλαδή είναι $1.05125B + 1.04K_4 - K_5 = 315$.

Τέλος, στην αρχή του έκτου έτους η επιχείρηση θα εισπράξει κεφάλαιο και απόδοση από την προθεσμιακή κατάθεση K_5 και θα πληρώσει την τελευταία δόση. Ο περιορισμός είναι

$$1.04K_5 = 460.$$

Δεν έχει νόημα η τοποθέτηση χρημάτων σε προθεσμιακή κατάθεση (K_6) στην αρχή του 6ου έτους, αφού οι δόσεις καταβάλλονται στην αρχή κάθε έτους και όχι στο τέλος. Επομένως η μεταβλητή K_6 δεν χρησιμοποιείται γιατί δεν θα έχει καμία χρησιμότητα. Ακόμη κι αν είχε χρησιμοποιηθεί, δηλαδή αν ο τελευταίος περιορισμός ήταν $1.04K_5 = K_6 + 460$, τότε στην άριστη λύση μετά την επίλυση του μοντέλου με τη μέθοδο simplex, δεν υπάρχει περίπτωση να πάρει άλλη τιμή εκτός από το μηδέν.

Συνοπτικά έχουμε το ακόλουθο μοντέλο:

να ελαχιστοποιηθεί η $z = F$

με τους περιορισμούς

$$\begin{aligned}
&F - 1.055A - 1.000B - K_1 = 190\\
&0.0675A + 0.05125B + 1.04K_1 - K_2 = 215\\
&0.0675A + 0.05125B + 1.04K_2 - K_3 = 240\\
&1.0675A + 0.05125B + 1.04K_3 - K_4 = 285\\
&1.05125B + 1.04K_4 - K_5 = 315\\
&1.04K5 = 460\\
&\text{όπου } F, A, B \text{ και } K_i \geq 0
\end{aligned}$$

<u>**Η άριστη λύση**</u> του προβλήματος (όπως προκύπτει από το λογισμικό LINDO) είναι η εξής:

```
        OBJECTIVE FUNCTION VALUE = 1484.967

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
         F       1484.966553          0.000000
         A        232.393555          0.000000
         B        720.387817          0.000000
        K1        329.403534          0.000000
        K2        180.186111          0.000000
        K3          0.000000          0.020766
        K4          0.000000          0.019420
        K5        442.307678          0.000000
```

Μπορείτε (προαιρετικά) να κατεβάσετε μία εκπαιδευτική έκδοση του λογισμικού LINDO από το δικτυακό τόπο www.lindo.com, να δοκιμάσετε να περάσετε τα μοντέλα των παραδειγμάτων και των ασκήσεων στο πρόγραμμα αυτό και να πειραματιστείτε με την επίλυσή τους.

Άρα, το ελάχιστο κεφάλαιο που είναι απαραίτητο ανέρχεται σε €1484967 ώστε να μπορέσει, με τις επενδύσεις που θα κάνει, να αντεπεξέλθει στην τμηματική καταβολή των δόσεων. Στην παραπάνω άριστη λύση βλέπετε ότι τα ποσά που θα τοποθετήσει σε κρατικά ομόλογα, είναι: στα τύπου Α, 232.3935×1055= €245175.1425 και στα τύπου Β, 720.3878×1000=€720387.8. Στις προθεσμιακές καταθέσεις τοποθετεί στην αρχή του 1^{ου} έτους €329403.53, στην αρχή του 2^{ου} έτους €180186,11 και στην αρχή του 5^{ου} έτους €442307.67. Αθροίζοντας τις επενδύσεις του 1^{ου} έτους παίρνουμε 245175.1425 + 720387.8+329403.53=1294966.473. Προσθέτοντας και την πρώτη δόση του δανείου, που καταβάλλεται στην αρχή του πρώτου έτους, έχουμε 1294966.473 + 190000 = 1484966.473 που επαληθεύει την τιμή του F, δηλαδή την ελάχιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης (το F είναι εκφρασμένο σε χιλιάδες, η μικρή διαφορά οφείλεται σε σφάλματα στρογγυλοποίησης στους υπολογισμούς)

Ένα ενδιαφέρον ερώτημα είναι αν συμφέρει την επιχείρηση να διαπραγματευτεί καταβολή των δόσεων στο τέλος κάθε έτους αντί στην αρχή. Πώς διαφοροποιείται το μοντέλο και ποια είναι η βέλτιστη λύση στην περίπτωση αυτή; Αυτό που κερδίζει η επιχείρηση αν πετύχει την καταβολή των δόσεων στο τέλος κάθε έτους, είναι ένα χρόνο αναβολή πληρωμής στην έναρξη της εξαετίας. Ο πρώτος περιορισμός γίνεται: $F = 1.055A + 1.000B + K_1$ και η πληρωμή της πρώτης δόσης μεταφέρεται στο 2^{o} έτος, δηλαδή ο δεύτερος περιορισμός γίνεται $0.0675A + 0.05125B + 1.04K_1 = K_2 + 190$, οπότε έτσι έχει στη διάθεσή της περισσότερο χρόνο για να εισπράξει κάποιες αποδόσεις πριν την καταβολή της πρώτης δόσης και όλες οι επόμενες δόσεις μεταφέρονται ένα χρόνο αργότερα. Στην περίπτωση αυτή, έχει νόημα η χρήση της μεταβλητής K_6 αφού μπορεί η επιχείρηση να καταθέσει ένα ποσό στην αρχή του 6^{ου} έτους και να χρησιμοποιήσει την απόδοση του στο τέλος του έτους, για να πληρώσει τη δόση του προστίμου. Επίσης, έχουμε έναν επιπλέον περιορισμό που παριστάνει την πληρωμή της τελευταίας δόσης στο τέλος του έκτου έτους. Το μοντέλο είναι το ακόλουθο:

Min z = F

με περιορισμούς

$F - 1.055A - 1.000B - K_1 = 0,$

$0.0675A + 0.05125B + 1.04K_1 - K_2 = 190,$

$0.0675A + 0.05125B + 1.04K_2 - K_3 = 215,$

$1.0675A + 0.05125B + 1.04K_3 - K_4 = 240,$

$1.05125B + 1.04K_4 - K_5 = 285,$

$1.04K_5 - K_6 = 315,$

$1.04K_6 = 460,$

όπου F, A, B και $K_i \geq 0$.

Η **άριστη λύση** του προβλήματος (όπως προκύπτει από το λογισμικό LINDO) είναι η εξής:

```
        OBJECTIVE FUNCTION VALUE = 1417.739

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
         F      1417.738525          0.000000
         A       178.553574          0.000000
         B       963.786438          0.000000
        K1       265.578125          0.000000
        K2       147.647675          0.000000
        K3         0.000000          0.020766
        K4         0.000000          0.019420
        K5       728.180481          0.000000
        K6       442.307678          0.000000
```

που δείχνει, ότι αν γίνει δεκτή η πληρωμή των δόσεων στο τέλος κάθε έτους, η επιχείρηση μπορεί να εξοικονομήσει (1484.967- 1417.739)×1000, δηλαδή 67228 ευρώ.

Τα προηγούμενα παραδείγματα δείχνουν ότι ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού μπορεί να εμφανισθεί κάτω από μια ποικιλία διαφορετικών μορφών. Έτσι, ως προς την αντικειμενική συνάρτηση μπορεί να αναζητείται το ***μέγιστο*** ή το ***ελάχιστο***. Οι περιορισμοί του προβλήματος μπορεί να είναι ***εξισώσεις*** ή ***ανισώσεις*** του τύπου ≥ ή ≤. Στα παραδείγματα που εξετάσαμε, οι μεταβλητές ήταν ***μη αρνητικές (περιορισμός της μη αρνητικότητας)***. Στην πιο γενική περίπτωση οι μεταβλητές απόφασης μπορεί να είναι ***άνω*** ή/και ***κάτω φραγμένες*** ή να παίρνουν τιμές σε όλο τον πραγματικό άξονα. Έτσι, το ***γενικό μοντέλο του γραμμικού προγραμματισμού*** είναι της μορφής:

να μεγιστοποιηθεί η (ελαχιστοποιηθεί)

$$z = c_1 x_1 + \cdots + c_j x_j + \cdots + c_n x_n$$

με τους περιορισμούς

$$\begin{array}{lllll}
\alpha_{11}x_1 + \cdots + & \alpha_{1j}x_j + \cdots + & \alpha_{1n}x_n & \leq \text{ή} \geq \text{ή} = & b_1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\alpha_{i1}x_1 + \cdots + & \alpha_{ij}x_j + \cdots + & \alpha_{in}x_n & \leq \text{ή} \geq \text{ή} = & b_i \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\alpha_{m1}x_1 + \cdots + & \alpha_{mj}x_j + \cdots + & \alpha_{mn}x_n & \leq \text{ή} \geq \text{ή} = & b_m
\end{array}$$

$$l_j \leq x_j \leq u_j, \; j \in \{1, \ldots, n\}$$

Έχοντας υπόψη τα προηγούμενα παραδείγματα μπορούμε, τώρα, να δούμε ότι οι συντελεστές c_j ($j = 1,\ldots,n$) των μεταβλητών απόφασης στην έκφραση για την αντικειμενική συνάρτηση αντιπροσωπεύουν μοναδιαίο ***κόστος*** ή ***κέρδος***. Οι παράμετροι b_i ($i = 1,\ldots,m$) στους περιορισμούς του τύπου ≤ παριστάνουν, γενικά, ***διαθέσιμους πόρους*** και στους περιορισμούς του τύπου ≥, γενικά, ***ελάχιστες απαιτήσεις***. Ο όρος $\alpha_{ij}x_j$ ($i = 1,\ldots,m$) ($j = 1,\ldots,n$) αντιπροσωπεύει την ποσότητα, η οποία χρησιμοποιείται από τον *i*-οστό πόρο ως αποτέλεσμα της *j*-οστής απόφασης ή την ποσότητα με την οποία η *j*-οστή απόφαση συμβάλλει στην κάλυψη της *i*-οστής απαίτησης. Για το λόγο αυτό οι παράμετροι α_{ij}, με τις οποίες οι μεταβλητές απόφασης υπεισέρχονται στις περιοριστικές ανισώσεις, αποδίδονται πολλές φορές με τον όρο ***τεχνολογικοί συντελεστές***.

Αν κάποιες μεταβλητές απόφασης περιορίζονται στο σύνολο των ακέραιων αριθμών, έχουμε ένα ***πρόβλημα ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού (integer linear programming)***. Μια ειδική μορφή του ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού είναι ο ***δυαδικός*** ή ***0-1 προγραμματισμός (bin*ary** ή ***0-1 programming)***. Τέτοιας μορφής προβλήματα έχουμε όταν οι μόνες επιτρεπτές τιμές των μεταβλητών απόφασης είναι το μηδέν και η μονάδα, όπως στο παράδειγμα 4 της εκχώρησης του προσωπικού σε θέσεις εργασίας.

Κάθε λύση (σημείο της γραφικής αναπαράστασης) που ικανοποιεί την οικογένεια των γραμμικών ανισώσεων που εκφράζουν τους περιορισμούς του προβλήματος, ονομάζεται ***εφικτή (feasible)***. Αν δεν ικανοποιεί έστω και έναν από τους περιορισμούς, τότε η λύση ονομάζεται ***μη εφικτή (infeasible)***. Το σύνολο των εφικτών λύσεων ονομάζεται ***εφικτός χώρος*** ή ***εφικτή περιοχή*** ή ***εφικτό σύνολο (feasible set)*** του προβλήματος, εντός του οποίου θα αναζητηθεί η ***βέλτιστη (άριστη) λύση (optimal solution)***, δηλαδή η εφικτή λύση που μεγιστοποιεί ή ελαχιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση. Η μέγιστη ή ελάχιστη αναλόγως τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης ονομάζεται ***βέλτιστη (άριστη) τιμή (optimal value)***. Αν δεν υπάρχουν τιμές των μεταβλητών που να ικανοποιούν όλους ταυτόχρονα τους περιορισμούς του προβλήματος, αν δηλαδή οι ανισώσεις του μοντέλου είναι ***μη συμβατές***, τότε το πρόβλημα δεν έχει εφικτή λύση αφού το εφικτό του σύνολο είναι το ***κενό σύνολο (empty)***.

Ασκήσεις αυτοαξιολόγησης

1η. Μια βιομηχανία διαθέτει δύο εργοστάσια Ε1 και Ε2 για την παραγωγή δύο προϊόντων Π1 και Π2, τα οποία χρησιμοποιούν την ίδια πρώτη ύλη. Το εργοστάσιο Ε1 μπορεί να παράγει ωριαία 5 μονάδες από το προϊόν Π1 και 2 μονάδες από το προϊόν Π2. Η ωριαία δυναμικότητα του εργοστασίου Ε2 είναι 3 μονάδες για το προϊόν Π1 και 6 μονάδες για το προϊόν Π2. Το ωριαίο κόστος λειτουργίας των εργοστασίων Ε1 και Ε2 είναι 20 και 40 νομισματικές μονάδες, αντίστοιχα, όταν η λειτουργία δεν υπερβαίνει τις 8 ώρες ημερησίως. Η υπερωριακή λειτουργία των εργοστασίων Ε1 και Ε2 επιβαρύνεται με 30 και 60 νομισματικές μονάδες, αντίστοιχα, για κάθε πρόσθετη ώρα απασχόλησης. Η ημερήσια απαίτηση ανέρχεται σε 30 μονάδες από το προϊόν Π1 και σε 60 μονάδες από το προϊόν Π2. Αν ως κανονική λειτουργία νοείται το 8ωρο και η υπερωριακή απασχόληση δεν επιτρέπεται να υπερβεί τις 3 ώρες την ημέρα, διαμορφώστε ένα μαθηματικό μοντέλο που να προσδιορίζει τον ημερήσιο αριθμό των ωρών κανονικής ή/και υπερωριακής λειτουργίας κάθε εργοστασίου έτσι ώστε το συνολικό κόστος να ελαχιστοποιείται.

2η. Ένας επενδυτής διαθέτει το ποσό των 1000 νομισματικών μονάδων για επένδυση μεταξύ τριών εναλλακτικών επενδυτικών προγραμμάτων P_1, P_2 και P_3. Η ετήσια αναμενόμενη απόδοση από την επένδυση 100 νομισματικών μονάδων σε καθένα από τα επενδυτικά προγράμματα P_1, P_2 και P_3 είναι 140, 120 και 160 νομισματικές μονάδες, αντίστοιχα. Η αντίστοιχη ελάχιστη εγγυημένη απόδοση είναι 90, 80 και 50 νομισματικές μονάδες. Η συνολική επένδυση στα προγράμματα P_2 και P_3 πρέπει να είναι τουλάχιστον 600 νομισματικές μονάδες. Διαμορφώστε ένα μαθηματικό μοντέλο που να προσδιορίζει τη σύνθεση του χαρτοφυλακίου των επενδύσεων, η οποία μεγιστοποιεί τη συνολική αναμενόμενη ετήσια απόδοση και ταυτόχρονα εγγυάται ελάχιστη απόδοση 1050 νομισματικών μονάδων.

3η. Η ζήτηση ενός προϊόντος κατά τους μήνες Ιανουάριο, Φεβρουάριο, Μάρτιο και Απρίλιο ανέρχεται σε 100, 110, 120 και 110 μονάδες, αντίστοιχα. Η δυναμικότητα της παραγωγής κατά τους μήνες αυτούς είναι 120, 150, 150 και 100 μονάδες, αντίστοιχα. Την 1η Ιανουαρίου υπάρχουν 50 μονάδες αποθέματος από το προϊόν, στο τέλος δε του Απριλίου πρέπει να έχουν απομείνει τουλάχιστον 80 μονάδες στην αποθήκη. Το κόστος παραγωγής ανά μονάδα προϊόντος ανέρχεται, κατά τους τέσσερις αυτούς μήνες, σε 9, 10, 8 και 7 νομισματικές μονάδες αντίστοιχα, το δε κόστος αποθήκευσης ανά μονάδα προϊόντος ανά μήνα, είναι ίσο με 1 νομισματική μονάδα. Διαμορφώστε ένα μαθηματικό μοντέλο που να προσδιορίζει το ύψος της παραγωγής για κάθε μήνα έτσι ώστε το συνολικό κόστος να ελαχιστοποιείται. Το συνολικό κόστος αποθήκευσης για κάθε μήνα υπολογίζεται βάσει του αποθέματος που υπάρχει στο τέλος του μήνα.

4η. Σε μια ταβέρνα, η οποία λειτουργεί και τις επτά ημέρες της εβδομάδος, πέρα από τις συνήθεις παρέες που σύχναζαν εκεί, άρχισαν πρόσφατα να πραγματοποιούνται σε τακτική βάση και συνεστιάσεις διαφόρων συλλόγων. Το γεγονός αυτό δημιούργησε την ανάγκη αναδιάρθρωσης του προγράμματος εργασίας του προσωπικού σερβιρίσματος, με τέτοιο τρόπο ώστε η εξυπηρέτηση να παραμένει άψογη. Εκτιμήθηκαν οι ανθρωποώρες σερβιρίσματος που απαιτούνται, αρχικά για τη συνήθη πελατεία (ανάλογα με την ημέρα της εβδομάδας):

Ημέρα	Δευτέρα	Τρίτη	Τετάρτη	Πέμπτη	Παρασκευή	Σάββατο	Κυριακή
Ανθρωποώρες Σερβιρίσματος	125	200	350	300	650	725	250

και στη συνέχεια, για τις συνεστιάσεις που θα πραγματοποιηθούν (ανάλογα με το πλήθος τους):

Πλήθος Συνεστιάσεων	Ανθρωποώρες Σερβιρίσματος
0	0
1	24
2	36
3	52
4	64
5	80

Γνωστός είναι επίσης και ο αριθμός των προγραμματισμένων (τακτικών) συνεστιάσεων για την κάθε ημέρα της εβδομάδος:

Ημέρα	Δευτέρα	Τρίτη	Τετάρτη	Πέμπτη	Παρασκευή	Σάββατο	Κυριακή
Αριθμός Προγραμματισμένων Συνεστιάσεων	1	0	1	0	3	4	2

Σύμφωνα με τη σύμβαση εργασίας, κάθε υπάλληλος πρέπει να εργάζεται 6 ώρες ημερησίως, για πέντε συνεχόμενες ημέρες της εβδομάδος και στη συνέχεια να παίρνει δύο ημέρες άδεια. Θεωρώντας ότι στη συγκεκριμένη ταβέρνα όλοι οι σερβιτόροι έχουν τον ίδιο μισθό κι ότι η παραπάνω διαδικασία επαναλαμβάνεται κάθε εβδομάδα, υποδείξτε ένα μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού για την εύρεση του ελάχιστου αριθμού σερβιτόρων που πρέπει να απασχολούνται στην ταβέρνα.

5η. Μία βιοτεχνία κατασκευής παιγνιδιών κατασκευάζει μεταξύ άλλων ένα παιδικό τρίτροχο ποδήλατο, απαρτιζόμενο από τρία κύρια εξαρτήματα - τμήματα: πρόσθιο μέρος τροχού και τιμονιού (1 τεμάχιο), σκελετός και σέλλα (1 τεμάχιο), τμήμα πίσω τροχών (2 τεμάχια). Για την επόμενη παραγωγική περίοδο η εταιρεία έχει παραγγελίες για 12000 ποδήλατα. Οι βασικοί παραγωγικοί συντελεστές που χρησιμοποιούνται στην κατασκευή του ποδηλάτου είναι πλαστικό (μονάδες πλαστικού), χρόνος εργασίας (λεπτά) και χρόνος μηχανών (λεπτά). Η βιοτεχνία, έχει τη δυνατότητα να αγοράσει εξαρτήματα - τμήματα του προϊόντος από έναν υπεργολάβο με τον οποίο συνεργάζεται, αντί να το κατασκευάσει εσωτερικά, ώστε με σιγουριά να ικανοποιήσει τη ζήτηση των πελατών της. Στον επόμενο πίνακα βλέπετε τα στοιχεία που αφορούν τη διαθεσιμότητα των πόρων, την κατανάλωσή τους στην παραγωγική διαδικασία (τεχνολογικοί συντελεστές) και τέλος το κόστος εσωτερικής παραγωγής ενός τμήματος ή της αγοράς του από τον υπεργολάβο. Το κόστος συναρμολόγησης των τμημάτων είναι ίδιο σε κάθε περίπτωση και δεν συνυπολογίζεται στην παρούσα ανάλυση.

Τμήμα ποδηλάτου	**Κατανάλωση πόρων** Πλαστικό (μονάδες)	εργασία (λεπτά)	μηχανές (λεπτά)	**Κόστος** παραγωγής	αγοράς
Πρόσθιο	3	10	2	8	12
Σκελετός	4	6	2	6	9
Πίσω ρόδες (1 τεμάχιο)	0.5	2	0.1	1	3
Διαθέσιμη ποσότητα	**50000**	**160000**	**30000**		

Να αναπτύξετε ένα μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού το οποίο, όταν επιλυθεί, να μπορεί να δώσει στην επιχείρηση τις κατάλληλες πληροφορίες σε ό,τι αφορά το άριστο σχέδιο παραγωγής ή/και αγοράς τμημάτων ώστε να ικανοποιηθεί η ζήτηση των 12000 ποδηλάτων με ελάχιστο συνολικό κόστος.

6η. Η εταιρεία πετρελαιοειδών "Flower Oil" παρασκευάζει, μεταξύ των άλλων παραγώγων πετρελαίου, δύο ποιότητες βενζίνης την απλή (regular) και την ενισχυμένη (super). Για το σκοπό αυτό αναμειγνύει δύο τύπους αργού πετρελαίου, τους C100 και C200. Δύο διαφορετικά συστατικά, έστω Α και Β είναι ιδιαιτέρως σημαντικά για τη σύνθεση των δύο παραγόμενων προϊόντων και αυτά βρίσκονται και στους δύο τύπους αργού πετρελαίου αλλά σε διαφορετική περιεκτικότητα. Διαφορετικό είναι και το (ανά λίτρο) κόστος αργού πετρελαίου, όπως αναλυτικά φαίνεται κατωτέρω:

ΤΥΠΟΣ ΑΡΓΟΥ ΠΕΤΡΕΛΑΙΟΥ	**ΣΥΣΤΑΤΙΚΟ Α** (%)	**ΣΥΣΤΑΤΙΚΟ Β** (%)	**ΚΟΣΤΟΣ/ΛΙΤΡΟ** (ευρώ)
C100	20	60	0.10
C200	50	30	0.15

Σύμφωνα με τις προδιαγραφές, κάθε λίτρο απλής βενζίνης πρέπει να περιέχει τουλάχιστο 40% από το συστατικό Α, ενώ κάθε λίτρο ενισχυμένης βενζίνης το πολύ 50% από το συστατικό Β. Λαμβάνοντας υπόψη ότι υπάρχουν εξασφαλισμένες ημερήσιες πωλήσεις τουλάχιστον 800000 λίτρων regular και τουλάχιστον 500000 λίτρων super, η Flower Oil ενδιαφέρεται να προσδιορίσει τις ποσότητες που πρέπει να χρησιμοποιεί από τον κάθε τύπο αργού πετρελαίου στην παραγωγή των δύο προϊόντων, ώστε να ελαχιστοποιείται το συνολικό ημερήσιο κόστος πρώτων υλών.

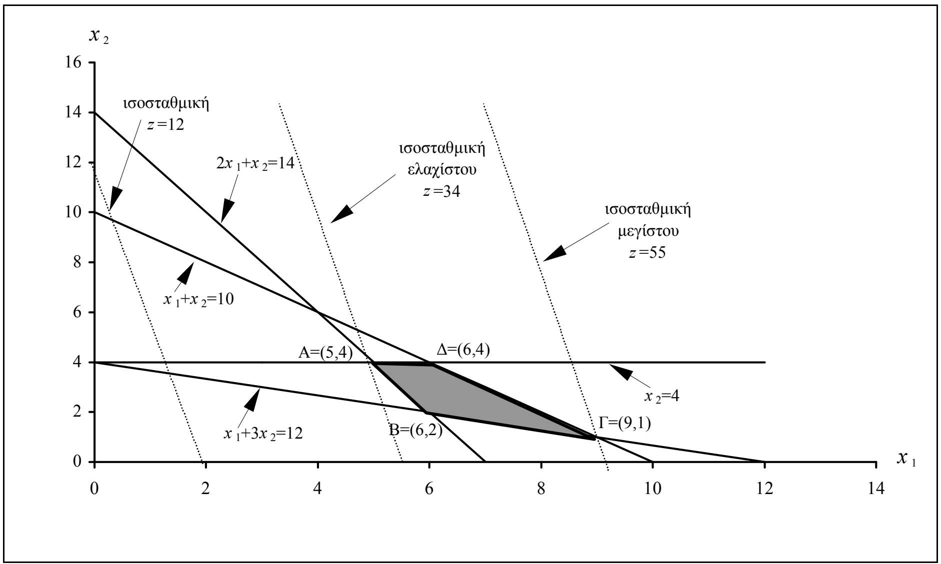
ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

Ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού με δύο μόνο μεταβλητές επιδέχεται γραφική επίλυση, η οποία παρουσιάζεται στη συνέχεια με τη βοήθεια ενός παραδείγματος. Ας θεωρήσουμε το πρόβλημα του προσδιορισμού του μεγίστου και του ελαχίστου της συνάρτησης $z = 6x1+ x2$ με τους περιορισμούς: $x1 + x2 \leq 10$, $x2 \leq 4$, $2x1 + x2 \geq 14$, $x1 + 3x2 \geq 12$, $x1 \geq 0$, $x2 \geq 0$.

<u>Το αρχικό στάδιο</u> της γραφικής επίλυσης του προβλήματος περιλαμβάνει τον προσδιορισμό του ***εφικτού συνόλου***, δηλαδή τον προσδιορισμό των σημείων (x_1, x_2) του επιπέδου που ικανοποιούν και τους έξι περιορισμούς ταυτόχρονα.

Μια πρώτη διαπίστωση είναι ότι η απαίτηση μη αρνητικότητας των μεταβλητών απόφασης περιορίζει τον εφικτό χώρο του προβλήματος στο θετικό τεταρτημόριο, αφού η $x_1 \geq 0$ αποδέχεται όλα τα σημεία τα δεξιά της ευθείας $x_1 = 0$, ενώ η $x_2 \geq 0$ είναι ο ημιχώρος επάνω από την ευθεία $x_2 = 0$. Η δεύτερη διαπίστωση, που μπορούμε να κάνουμε, είναι ότι κάθε γραμμική ανίσωση με δύο μεταβλητές, όπως για παράδειγμα η ανίσωση $2x_1 + x_2 \geq 14$, ισχύει στο ένα μόνο από δύο ημιεπίπεδα, στα οποία η ανισότητα αυτή διαιρεί το δισδιάστατο χώρο (x_1, x_2). Το σύνορο μεταξύ των δύο ημιεπιπέδων είναι η ευθεία $2x_1 + x_2 = 14$, όπου η ανισότητα ικανοποιείται οριακά. Κάτω από την ευθεία αυτή είναι το ημιεπίπεδο, όπου η ανισότητα παραβιάζεται.

Γενικά, κάθε ευθεία της μορφής $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ χωρίζει το επίπεδο Οx_1 x_2 σε δύο ημιεπίπεδα, τα οποία καθορίζονται από τις ανισότητες $a_1x_1 + a_2x_2 \le b$ και $a_1x_1 + a_2x_2 \ge b$. Ο πιο απλός τρόπος για να διαπιστώσουμε σε ποιο ημιεπίπεδο ισχύει η κάθε ανισότητα, είναι να θεωρήσουμε ένα τυχόν σημείο του επιπέδου και να ελέγξουμε ποια από τις δύο ανισότητες ικανοποιούν οι συντεταγμένες του. Έτσι, λοιπόν, βρίσκουμε το ημιεπίπεδο, το οποίο περιγράφει καθεμιά από τις έξι ανισώσεις του εξεταζόμενου προβλήματος. Αυτό γίνεται χαράσσοντας τις ευθείες που αντιστοιχούν σε κάθε περιορισμό – ανίσωση που ονομάζονται ***περιοριστικές ευθείες***. Η τομή των έξι αυτών ημιεπιπέδων ορίζει το εφικτό σύνολο του προβλήματος. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 1, οι ανισώσεις οι οποίες αποτελούν τους περιορισμούς του προβλήματος, συναληθεύουν στο σύνορο και το εσωτερικό του σκιασμένου χωρίου (η εφικτή περιοχή). Κάθε σημείο εκτός της σκιασμένης αυτής περιοχής αντιπροσωπεύει λύση που δεν είναι εφικτή και παραβιάζει τουλάχιστον μία από τις ανισότητες.



Σχήμα 1. Γραφική επίλυση μοντέλων γραμμικού προγραμματισμού.

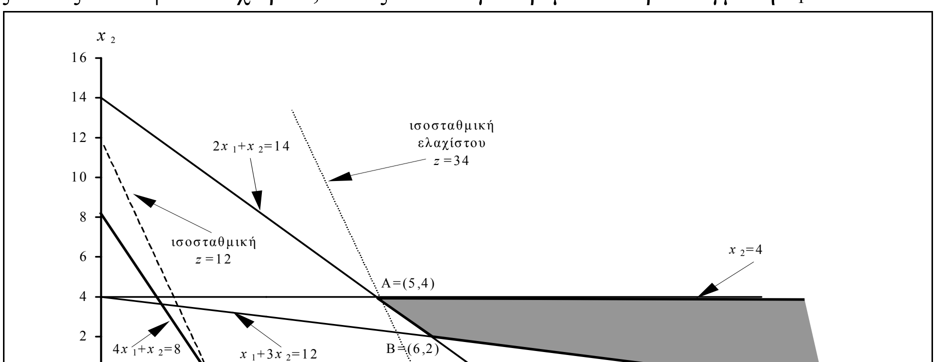
Έχοντας προσδιορίσει το εφικτό σύνολο του προβλήματος απομένει να βρούμε το σημείο του συνόλου αυτού που βελτιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση. Προς την κατεύθυνση αυτή, ας παρατηρήσουμε ότι μια συνάρτηση της μορφής $z = c_1x_1 + c_2x_2$, όπως είναι η αντικειμενική συνάρτηση ενός μοντέλου γραμμικού προγραμματισμού στο χώρο των δύο διαστάσεων, εισάγει στο πρόβλημα μια οικογένεια ευθειών, οι οποίες χαρακτηρίζονται από διαφορετικές τιμές του *z*, έχουν όμως την ίδια κλίση που είναι $-c_1/c_2$, είναι δηλαδή παράλληλες (αφού $x_2 = z/c_2 + (-c_1/c_2)x_1$). Ας θεωρήσουμε τώρα μια από αυτές τις παράλληλες ευθείες και συγκεκριμένα εκείνη που ορίζεται από την εξίσωση $c_1x_1 + c_2x_2 = \bar{z}$ για κάποια συγκεκριμένη τιμή $\bar{z}$. Τότε η ***τιμή (στάθμη)*** της αντικειμενικής συνάρτησης σε όλα τα σημεία που ανήκουν στη ευθεία $c_1x_1 + c_2x_2 = \bar{z}$, είναι ***σταθερή*** και ***ίση*** με *z* $= \bar{z}$. Για το λόγο αυτό οι παράλληλες ευθείες που προκύπτουν για τις διάφορες τιμές του *z*, ονομάζονται ***ισοσταθμικές (contours)*** ή ***ευθείες ίσου κέρδους/κόστους (isoprofit/isocost)***. Καθώς μεταβάλλεται το κέρδος (κόστος) *z*, οι ευθείες αυτές σαρώνουν ολόκληρο το δισδιάστατο χώρο.

Στο Σχήμα 1 έχουμε τοποθετήσει την ισοσταθμική $6x_1 + x_2 = 12$, η οποία αντιστοιχεί σε κέρδος (κόστος) *z* =12. Μια άλλη ισοσταθμική είναι εκείνη, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων (0, 0) και η οποία αντιστοιχεί στην τιμή *z* = 0. Η σχετική θέση των ισοσταθμικών *z* = 12 και *z* = 0, υποδεικνύει ότι αυξανόμενης της τιμής του *z*, οι ισοσταθμικές μετατοπίζονται προς τα πάνω και δεξιά. Από τα σημεία, βέβαια, των ισοσταθμικών μας ενδιαφέρουν μόνο εκείνα, τα οποία ανήκουν στο σκιασμένο χωρίο, δηλαδή τα σημεία που ανήκουν στην τομή των ισοσταθμικών με το εφικτό σύνολο. Έτσι, προκειμένου να προσδιορίσουμε το μέγιστο, πρέπει να μετατοπίσουμε την ισοσταθμική z =12 προς τα πάνω και δεξιά, παράλληλα προς τον εαυτό της, μέχρι το σημείο εκείνο, μετά το οποίο κάθε άλλη ισοσταθμική που θα αντιστοιχούσε σε μεγαλύτερη τιμή του z, θα βρισκόταν έξω από τον εφικτό χώρο. Η τελευταία επαφή των ισοσταθμικών ευθειών με τον εφικτό χώρο γίνεται στο σημείο Γ= (9,1). Η τιμή της ισοσταθμικής που διέρχεται από το σημείο αυτό, βρίσκεται αντικαθιστώντας τις τιμές x_1 = 9 και x_2 = 1 στην σχέση για την αντικειμενική συνάρτηση $z = 6x_1 + x_2$. Έτσι, το σημείο που μεγιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση είναι το Γ=(9, 1) και η μέγιστη τιμή του z είναι $z^{max} = 6\times9+1 = 55$.

Αν θέλουμε να προσδιορίσουμε το ελάχιστο της αντικειμενικής συνάρτησης, πρέπει να βρούμε την πρώτη ισοσταθμική ευθεία που τέμνει τον εφικτό χώρο προς την αντίθετη κατεύθυνση (τη κατεύθυνση μείωσης της τιμής του z). Η τομή αυτή συμβαίνει στο σημείο Α με συντεταγμένες Α(5,4), από όπου διέρχεται η ισοσταθμική z = 34. Επομένως, η αντικειμενική συνάρτηση ελαχιστοποιείται στο σημείο Α = (5,4) και η ελάχιστη τιμή της είναι ίση με $z^{min} = 6\times5+4 = 34$.

Όπως παρατηρούμε, η πρώτη και η τελευταία τομή των ισοσταθμικών ευθειών με το εφικτό σύνολο γίνεται σε μια ***κορυφή*** του σκιασμένου χωρίου. Αν, όμως, είχαμε να ελαχιστοποιήσουμε τη συνάρτηση $z = 2x_1 + x_2$, της οποίας οι ισοσταθμικές είναι παράλληλες προς την ευθεία που εισάγει ο περιορισμός $2x_1 + x_2 \leq 14$, (το γιατί είναι παράλληλες αφήνεται στον αναγνώστη να το διαπιστώσει), τότε η πρώτη (τελευταία) επαφή των ισοσταθμικών ευθειών με το εφικτό σύνολο επιτυγχάνεται σε ένα ολόκληρο ευθύγραμμο τμήμα , εκείνο που ορίζεται από τα σημεία Α= (5, 4) και Β = (6, 2). Στην περίπτωση αυτή το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης της z λέμε ότι έχει ***απειρία βέλτιστων λύσεων***, αφού κάθε σημείο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ είναι βέλτιστο και δίνει την άριστη τιμή στο z = 14. Μεταξύ βέβαια των βέλτιστων λύσεων θα ανήκαν και οι κορυφές Α και Β, ενώ σε όλα τα σημεία του ευθύγραμμου τμήματος, δηλαδή της ***ακμής*** που ορίζουν οι δύο αυτές κορυφές, η αντικειμενική συνάρτηση θα είχε την ίδια ελάχιστη τιμή (τιμή του z στο σημείο Α: $z^A = 2\times5 + 4 = 14$, τιμή του z στο σημείο Β: $z^B = 2\times6 + 2 = 14$). Συνεπώς, το πρόβλημα ελαχιστοποίησης θα είχε και πάλι μονοσήμαντη απάντηση ως προς την ελάχιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης σε άπειρες όμως βέλτιστες λύσεις.

Το εφικτό σύνολο, το οποίο ορίζεται από τους περιορισμούς $x_1 + x_2 \leq 10$, $x_2 \leq 4$, $2x_1 + x_2 \geq 14$, $x_1 + 3x_2 \geq 12$, $x_1 \geq 0$ και $x_2 \geq 0$ είναι ένα ***φραγμένο*** χωρίο και, μάλιστα, ένα ***κυρτό πολύγωνο***. Ένα σύνολο ονομάζεται κυρτό, αν το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει οποιαδήποτε δύο σημεία του συνόλου, ανήκει εξ' ολοκλήρου εντός του συνόλου. Αν όμως αφαιρέσουμε τον περιορισμό $x_1 + x_2 \leq 10$, τότε όπως φαίνεται στο Σχήμα 2, το εφικτό σύνολο του προβλήματος είναι ένα ***μη φραγμένο πολύπλευρο***, το οποίο ωστόσο εξακολουθεί να είναι κυρτό. Το εφικτό σύνολο ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού είναι μη φραγμένο, όταν μία ή περισσότερες από τις μεταβλητές του προβλήματος μπορούν να πάρουν απείρως μεγάλες τιμές εντός του εφικτού χώρου, όπως στο συγκεκριμένο παράδειγμα η x_1.



Σχήμα 2. Μοντέλα γραμμικού προγραμματισμού με κενό και μη φραγμένο εφικτό σύνολο.

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε στο Σχήμα 2, η αντικειμενική συνάρτηση $z = 6x_1 + x_2$ έχει και πάλι ελάχιστο στο σημείο Α = (5, 4). Από την άλλη πλευρά, η τιμή του z μπορεί να γίνει οσοδήποτε μεγάλη και αν θέλαμε να βρούμε το μέγιστο της αντικειμενικής συνάρτησης, αυτό αποκλίνει στο άπειρο, αφού τίποτα δεν περιορίζει την προς τα πάνω και δεξιά μετατόπιση των ισοσταθμικών ευθειών. Αν, όμως, αντί για τη συνάρτηση $z = 6x_1 + x_2$, είχαμε να μεγιστοποιήσουμε τη συνάρτηση $z = x_2$, τότε θα είχαμε πεπερασμένη μέγιστη τιμή, ίση με z=4, κάθε δε σημείο της ημιευθείας, η οποία με αρχή το σημείο Α διατρέχει το άνω σύνορο του σκιασμένου χωρίου στο Σχήμα 2, θα ήταν βέλτιστο. Επίσης, αν ζητούσαμε το μέγιστο της συνάρτησης $z = -6x_1 + x_2$, τότε θα είχαμε πάλι ένα μοναδικό βέλτιστο σημείο, το Α(5, 4), με μέγιστο z* = -26.

Αν, τώρα, στους περιορισμούς $x_2 \leq 4$, $2x_1 + x_2 \geq 14$, $x_1 + 3x_2 \geq 12$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, προσθέσουμε και τον περιορισμό $4x_1 + x_2 \leq 8$, το εφικτό σύνολο είναι ***κενό***, αφού η περιοχή στην οποία ισχύει ο περιορισμός αυτός, δεν έχει κανένα κοινό σημείο με τη σκιασμένη περιοχή στο Σχήμα 2, όπου συναληθεύουν όλοι οι άλλοι περιορισμοί. Ομοίως, αν αντί για την ανίσωση $4x_1 + x_2 \leq 8$ είχαμε προσθέσει ως περιορισμό την εξίσωση $4x_1 + x_2 = 8$, πάλι το εφικτό σύνολο θα ήταν το κενό, αφού η περιοχή στην οποία αληθεύουν οι άλλοι περιορισμοί δεν έχει κανένα κοινό σημείο με την ευθεία $4x_1 + x_2 = 8$.

Σας προτρέπουμε να κατασκευάσετε εξ' αρχής τα Σχήματα 1 και 2 καθώς επίσης να πειραματιστείτε με όλες τις παραλλαγές που αναφέραμε παραπάνω.

Η γραφική μέθοδος επίλυσης μοντέλων γραμμικού προγραμματισμού με δύο μεταβλητές, δίνει τη δυνατότητα μιας εποπτικής προσέγγισης της θεωρίας πάνω στην οποία στηρίζεται η ***υπολογιστική μέθοδος simplex***. Τα κύρια σημεία της θεωρίας αυτής φωτίζονται από τη γεωμετρία των Σχημάτων 1 και 2. Όπως φανερώνουν τα σχήματα αυτά, ο εφικτός χώρος ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού με δύο μεταβλητές, όταν δεν είναι κενός, φαίνεται ότι είναι ένα κυρτό φραγμένο πολύγωνο ή ένα κυρτό μη φραγμένο πολύπλευρο. Από την άλλη πλευρά, η πρώτη και η τελευταία επαφή των ισοσταθμικών της αντικειμενικής συνάρτησης με τον εφικτό χώρο είναι λογικό να συμβεί κατά μήκος του συνόρου του (που στη μικροοικονομική ανάλυση το έχετε ακούσει ως καμπύλη παραγωγικών δυνατοτήτων), και επιπλέον δε, σε μια κορυφή του και πάντως όχι στο εσωτερικό του. Έτσι, η αναζήτηση της βέλτιστης λύσης μπορεί να περιορισθεί μεταξύ των κορυφών του εφικτού συνόλου του προβλήματος (προσπαθήστε να εντοπίσετε την αναλογία με τα στοιχεία της μικροοικονομικής ανάλυσης στην έννοια της κορυφής). Ευτυχώς, η μεθοδολογία αυτή, όπως και η γεωμετρική ερμηνεία, ισχύει σε οποιοδήποτε χώρο οποιασδήποτε διάστασης (δηλαδή για οποιοδήποτε πλήθος μεταβλητών απόφασης), απλώς δεν μπορούμε να έχουμε εποπτική άποψη για διάσταση μεγαλύτερη του 2 (2 μεταβλητές απόφασης) ή το πολύ για τρεις μεταβλητές απόφασης όπου με τη χρήση κατάλληλου λογισμικού μπορούμε να χαράξουμε τα περιοριστικά επίπεδα (αντί για περιοριστικές ευθείες) που αντιστοιχούν στους περιορισμούς του προβλήματος.

Η μέθοδος simplex οφείλεται σε μια πραγματικά μεγαλοφυή έμπνευση του Dantzig από το 1947, η οποία δημοσιεύθηκε τέσσερα χρόνια αργότερα σε βιβλίο που επιμελήθηκε ο Koopmans (1951). Την ίδια χρονιά που ο Dantzig ανακάλυπτε τη μέθοδο simplex, ο Koopmans έδειχνε ότι ο γραμμικός προγραμματισμός παρέχει το κατάλληλο μοντέλο για την ανάλυση των κλασικών οικονομικών θεωριών. Η μέθοδος simplex αποτελεί μια από τις πλέον διαδεδομένες μεθοδολογίες των υπολογιστικών μαθηματικών, αποτελεί δε, μία από τις μεγαλύτερες μαθηματικές επινοήσεις του 20ου αιώνα και έχει αποδειχθεί εκπληκτικά αποτελεσματική στην πράξη. Εδώ πρέπει πάντως να αναφέρουμε ότι ο πρώτος αλγόριθμος για την επίλυση μιας κατηγορίας προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού είχε αναπτυχθεί σχεδόν δέκα χρόνια νωρίτερα και συγκεκριμένα το 1939 από τον Kantorovich (1960). Η ερευνητική εργασία του Kantorovich παρέμεινε όμως για πολλά χρόνια άγνωστη στη Δύση και πέρασε απαρατήρητη στην Ανατολή.

Ωστόσο, αν και ο γραμμικός προγραμματισμός ταυτίσθηκε με τη μέθοδο simplex και τον Dantzig, το 1975 η Βασιλική Ακαδημία Επιστημών της Σουηδίας απένειμε το Βραβείο Nobel Οικονομίας στους Kantorovich και Koopmans "για τη συμβολή τους στη θεωρία της βέλτιστης κατανομής πόρων". Φαίνεται ότι η Βασιλική Ακαδημία Επιστημών της Σουηδίας θεώρησε την εργασία του Dantzig μάλλον πολύ μαθηματική για βραβείο οικονομίας και, όπως είναι γνωστό, δεν υπάρχει Βραβείο Nobel Μαθηματικών.

Αυτό που πραγματικά φωτίζει τη μέθοδο simplex είναι η γεωμετρική απεικόνιση του εφικτού συνόλου του προβλήματος. Όπως είδαμε γραφικά, η βέλτιστη λύση ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού φαίνεται να αντιστοιχεί σε μια κορυφή του εφικτού του συνόλου. Για την εκκίνηση της μεθόδου simplex απαιτείται μια αρχική κορυφή. Από την κορυφή αυτή μπορούμε, κατά μήκος ακμών, να πάμε σε άλλες γειτονικές κορυφές. Κάποιες από αυτές μας απομακρύνουν από τη βέλτιστη, πλην όμως άγνωστη κορυφή. Κάποιες άλλες όμως, βαθμιαία την προσεγγίζουν. Η μέθοδος simplex πραγματοποιεί άλματα από κορυφή σε κορυφή. Σε κάθε νέο άλμα κατορθώνει να βρει την ακμή, η οποία οδηγεί μετά βεβαιότητας σε μια νέα κορυφή, όπου η αντικειμενική συνάρτηση έχει βελτιωμένη τιμή, μεγαλύτερη ή μικρότερη ανάλογα με το αν έχουμε να λύσουμε ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης ή ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης. Συνεχίζοντας με τον τρόπο αυτό τη μετακίνηση κατά μήκος των ακμών του εφικτού συνόλου και βελτιώνοντας από κορυφή σε κορυφή την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, φθάνουμε τελικά σε μια κορυφή, όπου η αντικειμενική συνάρτηση βελτιστοποιείται. Κάθε άλλη κορυφή δίνει χειρότερη τιμή για την αντικειμενική συνάρτηση. Η βέλτιστη λύση έχει βρεθεί και η διαδικασία τερματίζεται.

Όλα τα βιβλία γραμμικού προγραμματισμού (Chvátal, 1983˙ Nash. & Sofer, 1996˙ Saigal, 1995˙ Strum, 1972) τα οποία παρατίθενται ως αναφορές στο τέλος των σημειώσεων, αφιερώνουν μεγάλο μέρος τους στη θεωρητική θεμελίωση και την ανάπτυξη της μεθόδου simplex. Η κλασσική πάντως αναφορά είναι η μονογραφία του Dantzig (1963).

Παράδειγμα 8 (*Η βιοτεχνία έτοιμου φαγητού "Pizza Experts"*)

Η βιοτεχνία έτοιμου φαγητού «Pizza Experts» διοχετεύει στην αγορά (σε πιτσαρίες) δύο διαφορετικά είδη κατεψυγμένης πίτσας, απλή και special. Το περιθώριο κέρδους για κάθε προϊόν ανέρχεται σε 3 και 4.5 χρηματικές μονάδες αντίστοιχα. Για την παραγωγή κάθε προϊόντος χρησιμοποιεί ζύμη κι ένα μείγμα υλικών ως ακολούθως:

- μια απλή πίτσα χρειάζεται 500γρ ζύμης και 125γρ μείγματος υλικών,
- μια special 500γρ ζύμης και 250γρ μείγματος υλικών.

Για την επόμενη περίοδο προγραμματισμού, που είναι για παράδειγμα μία τυπική ημέρα, η βιοτεχνία έχει στη διάθεσή της 75 κιλά ζύμης και 25 κιλά μείγματος υλικών. Η «Pizza Experts» έχει εξασφαλίσει παραγγελίες για τουλάχιστον 50 απλές και τουλάχιστον 25 πίτσες special. Γνωρίζει όμως ότι δεν υπάρχει περιορισμός ως προς την απορροφητικότητα της αγοράς και ότι θα πωληθούν όλα τα τεμάχια που θα παρασκευαστούν. Έτσι, αναζητεί ένα σχέδιο παραγωγής που θα τις εξασφαλίσει τα περισσότερα κέρδη.

Μεταβλητές και αντικειμενική συνάρτηση

Συμβολίζουμε με x_1 το πλήθος από απλές πίτσες και με x_2 το πλήθος από special που θα παρασκευαστούν ημερησίως από τη βιοτεχνία. Τότε, τα συνολικά κέρδη τα οποία θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε ανέρχονται σε $3x_1 + 4.5x_2$ χρηματικές μονάδες που είναι η αντικειμενική συνάρτηση.

Περιορισμοί

Σύμφωνα με τα δεδομένα που έχουμε, η διαθέσιμη ποσότητα ζύμης ανέρχεται στα 75 κιλά. Κατά συνέπεια θα πρέπει η συνολική κατανάλωση ζύμης να μην ξεπερνάει την ποσότητα αυτή άρα έχουμε: $500x_1 + 500x_2 \leq 75000$.

Η διαθέσιμη ποσότητα υλικών ανέρχεται στα 25 κιλά οπότε θα είναι:

$125x_1 + 250x_2 \leq 25000$.

Επιπλέον, θα διατεθούν τουλάχιστον 50 απλές πίτσες που δίνει τη σχέση $x_1 \geq 50$ και τουλάχιστον 25 πίτσες special δηλαδή $x_2 \geq 25$.

Φυσικά ισχύουν οι περιορισμοί της μη αρνητικότητας που πρέπει να αναγράφονται σε κάθε μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού, επομένως έχουμε $x_1 \geq 0$ και $x_2 \geq 0$ κάτι που στην προκειμένη περίπτωση, λόγω των δύο προηγούμενων περιορισμών, μοιάζει περιττό αφού οι μεταβλητές είναι κάτω φραγμένες.

Ανακεφαλαιώνοντας έχουμε το ακόλουθο μοντέλο:

Max $z= 3x_1 + 4.5x_2$

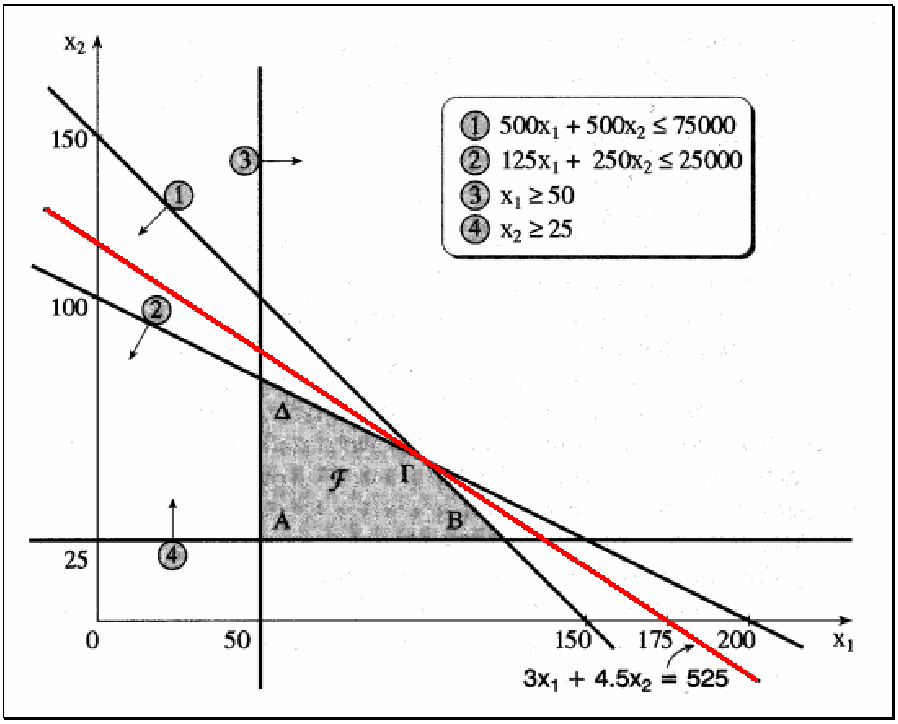
με περιορισμούς

1) $500x_1 + 500x_2 \leq 75000$
2) $125x_1 + 250x_2 \leq 25000$
3) $x_1 \geq 50$
4) $x_2 \geq 25$

(όπου x_1, $x_2 \geq 0$ όπως είναι προφανές).

Για να λύσουμε γραφικά το ανωτέρω μοντέλο ακολουθώντας τη διαδικασία που περιγράψαμε νωρίτερα, χαράσσουμε τις περιοριστικές ευθείες που αντιστοιχούν στους τέσσερις περιορισμούς και παρατηρούμε ότι η εφικτή περιοχή του προβλήματος ορίζεται από το κυρτό πολύγωνο ΑΒΓΔ, (σχήμα 3, περιοχή *F*), του οποίου οι κορυφές έχουν συντεταγμένες Α(50, 25), Β(125, 25), Γ(100, 50) και Δ(50, 75) και είναι οι υποψήφιες λύσεις (οι κορυφές της εφικτής περιοχής) για τον εντοπισμό της βέλτιστης λύσης. Στη συνέχεια, χαράσσουμε την αντικειμενική συνάρτηση για κάποια τυχαία τιμή του z και ακολούθως, μετακινώντας την προς την κατεύθυνση αύξησης της τιμής του z (προς τα πάνω και δεξιά στην προκειμένη περίπτωση) παρατηρούμε ότι παίρνει τη μέγιστη τιμή στο σημείο Γ, που είναι η τελευταία κορυφή στην οποία τέμνει (εφάπτεται) την εφικτή περιοχή πριν να αποχωρήσει στην περιοχή των μη εφικτών λύσεων. Για το σημείο Γ, η τιμή z της αντικειμενικής συνάρτησης είναι ίση με 525 χρηματικές μονάδες. Συνεπώς, η βέλτιστη λύση του προβλήματος είναι η $x_1 = 100$ πίτσες απλές και $x_2 = 50$ special πίτσες με το μέγιστο συνολικό κέρδος να ανέρχεται στις 525 χρηματικές μονάδες. Σημειώνεται, ότι αντί της παράλληλης μετακίνησης των καμπυλών (ευθειών) σταθερού κόστους της αντικειμενικής συνάρτησης, θα μπορούσαμε απλώς να υπολογίσουμε για τις συντεταγμένες των τεσσάρων κορυφών, τις αντίστοιχες τιμές του z, και να εντοπίσουμε την άριστη κορυφή ως εκείνη που δίνει το ελάχιστο, δηλαδή την κορυφή Γ. Στον ακόλουθο πίνακα έχουμε κάνει ακριβώς αυτό, επαληθεύοντας το αρχικό συμπέρασμα.

Κορυφή εφικτής περιοχής	Συντεταγμένες	Τιμή του z
Α	(50, 25)	262.5
Β	(125, 25)	487.5
Γ	(100, 50)	**525**
Δ	(50, 75)	487.5



Σχήμα 3. Η εφικτή περιοχή του μοντέλου γραμμικού προγραμματισμού για το παράδειγμα 8.

Παρατηρήστε, ότι για την άριστη λύση ($x_1 = 100$, $x_2 = 50$) οι περιορισμοί του προβλήματος δίνουν:

❶	$500\times100 + 500\times50$	=	75000	(≤ 75000)
❷	$125\times100 + 250\times50$	=	25000	(≤ 25000)
❸	100	=	100	(≥ 50)
❹	50	=	50	(≥ 25)

Συνεπώς, δεν θα υπάρξουν ανεκμετάλλευτοι πόροι στην εταιρεία αφού στο άριστο σχέδιο όλη η ζύμη και όλο το μείγμα θα καταναλωθούν πλήρως.

Περιορισμοί, οι οποίοι στην άριστη λύση ισχύουν ως ισότητες, ονομάζονται ***ενεργοί*** ή ***δεσμευτικοί*** περιορισμοί. Από την άλλη πλευρά, περιορισμοί του οποίους η άριστη λύση δεν τους έχει καταστήσει ισότητες, ονομάζονται ***αδρανείς*** ή ***μη δεσμευτικοί*** περιορισμοί.

Οι περιορισμοί ❶ και ❷ στο παραπάνω παράδειγμα, οι οποίοι στην άριστη λύση ισχύουν ως ισότητες, είναι ***ενεργοί***, ενώ οι περιορισμοί ❸, ❹ των οποίων στην άριστη λύση το αριστερό μέλος ξεπερνάει, στην προκειμένη περίπτωση, το δεξιό μέλος, είναι ***αδρανείς*** περιορισμοί και υποδεικνύουν την πλεονάζουσα παραγωγή, που ανέρχεται σε 50 και 25 τεμάχια αντίστοιχα.

Γενικά, στην άριστη λύση ενός γραμμικού μοντέλου, οι ενεργοί περιορισμοί είναι εκείνοι των οποίων η τομή των αντιστοίχων περιοριστικών ευθειών τους καθορίζει το σημείο - κορυφή που αποτελεί τη βέλτιστη λύση. Αν ένας ενεργός περιορισμός είναι της μορφής «$\leq$», εκφράζει συνήθως ένα πόρο που έχει, στην άριστη πάντα λύση, καταναλωθεί πλήρως και όπως είπαμε, γεωμετρικά συμμετέχει (η περιοριστική του ευθεία) στον καθορισμό της κορυφής που αποτελεί τη βέλτιστη αυτή λύση. Στο παραπάνω πρόβλημα, τέτοιοι είναι οι περιορισμοί ❶ και ❷ κάτι που μπορείτε να το επιβεβαιώσετε και στο Σχήμα 3. Βέβαια, ένας ενεργός περιορισμός μπορεί να ήταν και της μορφής «$\geq$», εκφράζοντας έτσι μία απαίτηση που έχει στην άριστη λύση, ικανοποιηθεί στο κατώτερο όριό της. Ισχύει βέβαια πάντα ότι γεωμετρικά, ο περιορισμός αυτός θα συμμετέχει στον καθορισμό της κορυφής που αποτελεί την άριστη λύση. Δεν υπάρχουν τέτοιοι περιορισμοί στο παραπάνω πρόβλημα.

Ένας αδρανής τώρα περιορισμός της μορφής «$\leq$», εκφράζει συνήθως ένα πόρο ο οποίος δεν έχει καταναλωθεί πλήρως, δηλαδή υπάρχει περίσσευμα του πόρου αυτού. Το περίσσευμα αυτό ονομάζεται ***περιθώρια τιμή***, ή ακόμη ***τιμή χαλαρής μεταβλητής του περιορισμού*** ή ***χαλαρή*** τιμή. Η περιοριστική του ευθεία δεν συμμετέχει στον καθορισμό της άριστης κορυφής. Δεν υπάρχουν τέτοιοι περιορισμοί στο παράδειγμα 8. Ενώ, αν στην άριστη λύση ένας περιορισμός είναι αδρανής και της μορφής «≥», εκφράζει συνήθως μία απαίτηση της οποίας όχι μόνο έχει ικανοποιηθεί η ελάχιστη απαιτούμενη ποσότητα, αλλά επιπλέον, αυτή έχει ξεπεραστεί κατά μία επιπλέον ποσότητα. Την επιπλέον αυτή ποσότητα πέρα από αυτό της ελάχιστης απαίτησης, την ονομάζουμε πάλι ***περιθώρια τιμή*** που στην συγκεκριμένη περίπτωση ονομάζεται τιμή ***μεταβλητής πλεονασμού***. Η περιοριστική ευθεία ενός τέτοιου περιορισμού δεν συμμετέχει στον καθορισμό της άριστης κορυφής. Τέτοιοι περιορισμοί στο παράδειγμα 8 είναι οι περιορισμοί ❸ και ❹ οι οποίοι έχουν τιμή μεταβλητής πλεονασμού ίση με 50 και 25 αντιστοίχως.

Ως άσκηση, προσπαθήστε να εντοπίσετε ενεργούς και αδρανείς περιορισμούς στο παράδειγμα των σελίδων 20-22.

Προσοχή! Ο χαρακτηρισμός ενός περιορισμού ως αδρανούς (μη δεσμευτικού) δε σημαίνει ότι είναι άχρηστος και ότι μπορεί να διαγραφεί από το μοντέλο! Από μαθηματικής πλευράς, υποδεικνύει το γεγονός ότι δεν ισχύει ως ισότητα στην άριστη λύση, γεωμετρικά υποδεικνύει τη μη συμμετοχή του στον καθορισμό της άριστης κορυφής και από οικονομικής πλευράς υποδεικνύει τη ύπαρξη ***μηδενικής οριακής αξίας (ή σκιώδους τιμής)*** στην οποία θα αναφερθούμε στην ενότητα «Θεωρία Δυϊσμού» των σημειώσεων. Αντίστοιχα, ο χαρακτηρισμός ενός περιορισμού ως ενεργού (δεσμευτικού) δε σημαίνει ότι είναι κατ' ανάγκη πιο σημαντικός από κάποιο άλλο που πιθανώς είναι αδρανής στην άριστη λύση. Από μαθηματικής πλευράς, υποδεικνύει το γεγονός ότι ισχύει ως ισότητα στην άριστη λύση, γεωμετρικά υποδεικνύει τη συμμετοχή του στον καθορισμό της άριστης κορυφής και από οικονομικής πλευράς, που είναι και το σημαντικότερο, υποδεικνύει την ύπαρξη ***μη μηδενικής οριακής αξίας (σκιώδους τιμής)*** με την οποία όπως προαναφέρθηκε θα ασχοληθούμε στην ενότητα περί Δυϊσμού.

Παράδειγμα 9 (*η συντήρηση μιας Harley Davidson*)

Ο Έκτορας έχει στην κατοχή του μια μοτοσικλέτα Harley Davidson κι ένα φορτηγάκι. Με την μοτοσικλέτα διανύει κατά μέσο όρο 45 μίλια χρησιμοποιώντας ένα γαλόνι βενζίνης 93 οκτανίων που κοστίζει \$1.35 το γαλόνι, ενώ με το φορτηγάκι διανύει 26 μίλια μ' ένα γαλόνι βενζίνης 89 οκτανίων που κοστίζει \$1.17 το γαλόνι. Επιπλέον, για κάθε 5000 μίλια που διανύονται, η μοτοσικλέτα χρειάζεται συντήρηση που απαιτεί χρόνο 15 ωρών. Ο αντίστοιχος χρόνος για το φορτηγάκι είναι 10 ώρες. Ο Έκτορας κάνει μόνος του τη συντήρηση, αλλά δεν θέλει να αφιερώνει περισσότερες από 100 ώρες το χρόνο γι' αυτήν. Ο Έκτορας προβλέπει ότι τον επόμενο χρόνο θα διανύσει τουλάχιστον 45000 μίλια, από τα οποία τα 5000 τουλάχιστον θα ήθελε να τα κάνει με την Harley (για να την κρατά σε καλή κατάσταση και επειδή του αρέσει κιόλας). Πόσα μίλια πρέπει να διανύσει ο Έκτορας με τη μοτοσικλέτα και πόσα με το φορτηγάκι έτσι ώστε το ετήσιο κόστος σε καύσιμα να είναι το ελάχιστο δυνατόν;

Μεταβλητές και αντικειμενική συνάρτηση

Συμβολίζουμε με x_1 τον αριθμό των μιλίων που θα διανύσει ο Έκτορας με την Harley Davidson και με x_2 τον αριθμό των μιλίων που θα διανύσει με το φορτηγάκι. Αφού για τα 45 μίλια που διανύονται με τη μοτοσικλέτα απαιτείται ένα γαλόνι βενζίνης που κοστίζει \$1.35, για τα x_1 μίλια απαιτούνται $\frac{x_1}{45}$ γαλόνια βενζίνης αξίας $\$\frac{x_1}{45}\times 1.35 = 0.03x_1$. Με όμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι για τα x_2 μίλια που θα διανυθούν με το φορτηγάκι απαιτούνται \$$0.045x_2$. Τότε, το συνολικό κόστος σε καύσιμα το οποίο θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε ανέρχεται σε $0.03x_1 + 0.045x_2$ (αντικειμενική συνάρτηση).

Περιορισμοί

Σύμφωνα με τα δεδομένα που έχουμε, ο συνολικός χρόνος που προτίθεται να αφιερώσει για συντήρηση ο Έκτορας, ανέρχεται το πολύ στις 100 ώρες. Κατά συνέπεια, θα πρέπει η συνολικός χρόνος συντήρησης των δύο οχημάτων να μην ξεπερνάει την ποσότητα αυτή. Για κάθε 5000 μίλια κίνησης, η μοτοσικλέτα δημιουργεί ανάγκη συντήρησης 15 ωρών και το φορτηγάκι 10 ωρών. Άρα, τα x_1 μίλια κίνησης της μοτοσικλέτας απαιτούν $\frac{15}{5000}x_1 = 0.003x_1$ ώρες συντήρησης και τα x_2 μίλια κίνησης με το φορτηγάκι απαιτούν $\frac{10}{5000}x_2 = 0.002x_2$ ώρες συντήρησης. Συνοψίζοντας, θα πρέπει: $0.003x_1 + 0.002x_2 \leq 100$. Η προβλεπόμενη διανυόμενη απόσταση και με τα δύο οχήματα αναμένεται να ξεπεράσει τα 45000 μίλια, οπότε θα πρέπει: $x_1 + x_2 \geq 45000$. Επιπλέον, θα πρέπει να εξασφαλιστεί η επιθυμία του Έκτορα να διανύσει τουλάχιστον 5000 μίλια με τη μοτοσικλέτα, δηλαδή $x_1 \geq 5000$. Τέλος, ισχύουν οι περιορισμοί της μη αρνητικότητας δηλαδή είναι $x_1, x_2 \geq 0$ (που για τη x_1 ήδη καλύπτεται από τον προηγούμενο περιορισμό).

Ανακεφαλαιώνοντας, έχουμε το ακόλουθο μοντέλο:

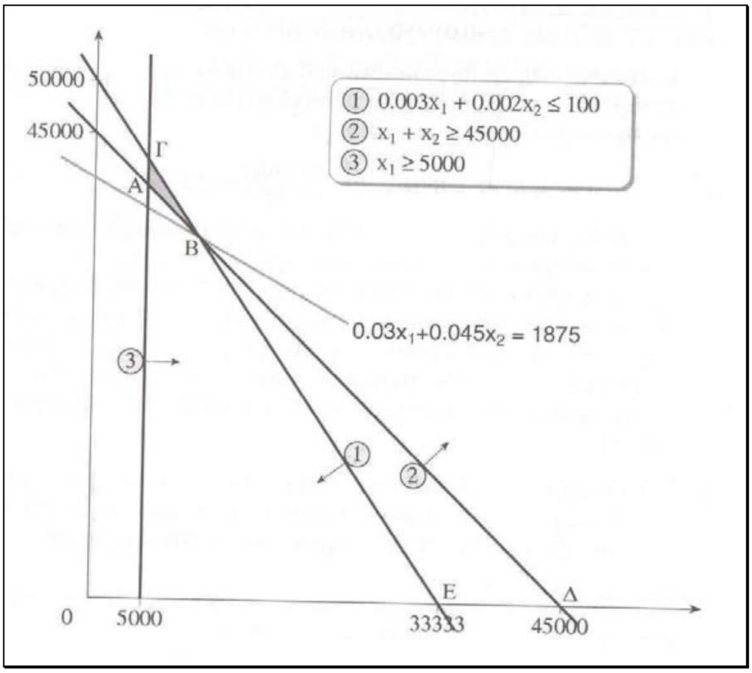
Min $z = 0.03x_1 + 0.045x_2$

με περιορισμούς

1) $0.003x_1 + 0.002x_2 \leq 100$
2) $x_1 + x_2 \geq 45000$
3) $x_1 \geq 5000$

όπου $x_1, x_2 \geq 0$.

Η εφικτή περιοχή του ανωτέρω προβλήματος ορίζεται από το τρίγωνο ΑΒΓ (σχήμα 4) του οποίου οι κορυφές έχουν συντεταγμένες Α(5000, 40000), Β(10000, 35000) και Γ(5000, 42500). Άριστη λύση είναι το σημείο Β (να κατασκευάσετε μόνοι σας το σχήμα 4 και να το επιβεβαιώσετε). Όταν διανύονται 10000 μίλια με τη μοτοσικλέτα και 35000 με το φορτηγάκι, ο Έκτορας έχει το μικρότερο δυνατό ετήσιο κόστος καυσίμων, ύψους \$1875. Ποιοι είναι δεσμευτικοί και ποιοι αδρανείς περιορισμοί στο παράδειγμα 9 και τι εκφράζει αυτό σε κάθε περίπτωση; Ποιες είναι οι τιμές των περιθωρίων μεταβλητών;



Σχήμα 4. Η εφικτή περιοχή του μοντέλου γραμμικού προγραμματισμού για το παράδειγμα 9.

Ασκήσεις αυτοαξιολόγησης

7η. Λύστε γραφικά τα παρακάτω προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού. Για κάθε πρόβλημα εξετάστε κατά πόσο το εφικτό του σύνολο είναι κενό ή μη φραγμένο και κατά πόσο υπάρχουν εναλλακτικές βέλτιστες λύσεις.

(i) max $z = 2x_1 + x_2$

με τους περιορισμούς

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 &\le 1 \\ 2x_1 - 3x_2 &\le 1 \\ 2x_1 + x_2 &\le 2 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

(ii) min (max) $z = x_1 + 2x_2$

με τους περιορισμούς

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 2 \\ 2x_1 + 3x_2 &\ge 12 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

(iii) max (min) $z = 3x_1 + 2x_2$

με τους περιορισμούς

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\ge 4 \\ x_1 - x_2 &\ge 0 \\ x_2 &\ge 1 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

(iv) min (max) $z = 3x_1 + 2x_2$

με τους περιορισμούς

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 4 \\ x_1 - x_2 &\ge 0 \\ x_1 &\le 3 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

8η. Ένα εργαστήριο δερμάτινων ειδών στην περιοχή της Καστοριάς κατασκευάζει μεταξύ των άλλων ενδυμάτων, δύο διαφορετικά είδη γυναικείας ζακέτας: από καστόρι και σαμουά. Λαμβάνοντας υπόψη την ποσότητα της πρώτης ύλης που υπάρχει διαθέσιμη, καθώς επίσης και τα στοιχεία του πίνακα δεδομένων που ακολουθεί

	Χρόνος Παραγωγής (λεπτά)		
Προϊόν	Κατασκευή	Φοδράρισμα	Συσκευασία
Καστόρινη ζακέτα	60	30	7.5
Ζακέτα από σαμουά	90	20	15

το εργαστήριο φρόντισε να εξασφαλίσει 900 ώρες για την κατασκευή των ζακέτων, 300 για το φοδράρισμά τους και 100 ώρες για τη συσκευασία-αποστολή τους στα διάφορα σημεία πώλησης με τα οποία συνεργάζεται.

i. Αν κάθε καστόρινη ζακέτα έχει περιθώριο κέρδους 5 χρηματικών μονάδων και κάθε ζακέτα από σαμουά 8, προσδιορίστε τις ποσότητες που πρέπει να κατασκευαστούν από το κάθε είδος σε τρόπο ώστε το συνολικό περιθώριο κέρδους του εργαστηρίου να μεγιστοποιείται.

ii. Υπάρχει ανεκμετάλλευτος χρόνος σε κάποιο/κάποια από τα τμήματα της ανωτέρω παραγωγικής διαδικασίας;

iii. Υποθέστε επιπλέον ότι, για να είναι βιώσιμη η επιχείρηση, η συνολική παραγωγή πρέπει να ξεπερνά τις 750 ζακέτες. Βρείτε το νέο βέλτιστο σχέδιο παραγωγής.

9η. Ένας επιχειρηματίας σκέφτεται να ανοίξει μια μικρή εξειδικευμένη επιχείρηση οδικών μεταφορών. Για να είναι όχι μόνο βιώσιμη αλλά και επικερδής, υπολογίζει ότι θα πρέπει να έχει μια ημερήσια μεταφορική ικανότητα τουλάχιστον 84000 m^3. Για την επιχείρηση αυτή ενδείκνυται η χρήση δύο διαφορετικών τύπων φορτηγών, τα χαρακτηριστικά των οποίων δίνονται στη συνέχεια :

Τύπος	Κόστος (χ.μ.)	Χωρητικότητα (m^3)	Απαιτούμενοι. Οδηγοί
A	18000000	2400	1
B	45000000	6000	3

Υπάρχουν διαθέσιμοι 41 οδηγοί, εγκαταστάσεις για το πολύ 40 φορτηγά και φυσικά στόχος του επιχειρηματία είναι να ελαχιστοποιήσει το συνολικό αρχικό κόστος επένδυσης.

i. Να λυθεί γραφικά το πρόβλημα.

ii. Ποια βέλτιστη λύση (a) χρησιμοποιεί μόνον έναν τύπο φορτηγού; (b) έχει σε χρήση τον ελάχιστο συνολικό αριθμό φορτηγών; (c) χρησιμοποιεί τον ίδιο αριθμό φορτηγών τύπου A και B;

ΘΕΩΡΙΑ ΔΥΪΣΜΟΥ

Κάθε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού έχει το ***δυϊκό (dual)*** του, το οποίο σχετίζεται ως προς τη δομή του με το αρχικό πρόβλημα που ονομάζεται ***πρωτεύον (primal)***. Το δυϊκό πρόβλημα παρέχει σημαντικές πληροφορίες οικονομικού χαρακτήρα σχετικά με τη βέλτιστη λύση του πρωτεύοντος προβλήματος, διευρύνοντας τον κύκλο των αποτελεσμάτων στην περιοχή της οριακής οικονομικής ανάλυσης. Δεν θα ήταν μάλιστα καθόλου υπερβολή ο ισχυρισμός ότι η θεώρηση ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού και με τις δύο ταυτόχρονα μορφές του, την πρωτεύουσα και τη δυϊκή, βρίσκεται στον πυρήνα της θεωρίας και των αλγορίθμων του γραμμικού προγραμματισμού.

Η ***θεωρία δυϊσμού (duality theory)*** στο γραμμικό προγραμματισμό έχει τις ρίζες της στο κλασσικό ***θεώρημα minimax*** του von Neumann (1928). Η πρώτη συστηματική ανάπτυξη της θεωρίας αυτής οφείλεται στους Gale, Kuhn και Tucker (1951). Λίγο αργότερα η έννοια του δυϊσμού εισάγεται και σε μη γραμμικά προβλήματα, όταν ο Dennis (1959) δημοσιεύει τα πρώτα αποτελέσματα δυϊκότητας στον τετραγωνικό προγραμματισμό.

Στο σημείο αυτό θα ήταν ίσως σκόπιμο να τονίσουμε ότι ο δυϊσμός είναι μια ευρύτερη έννοια, η οποία βρίσκει εφαρμογή και σε πολλούς άλλους τομείς πέραν του μαθηματικού προγραμματισμού. Για παράδειγμα, ένα σύστημα αποτελούμενο από εξαρτήματα τα οποία υπόκεινται σε βλάβη, έχει και αυτό το δυϊκό του. Ως δυϊκό ενός τέτοιου συστήματος ορίζεται το σύστημα, το οποίο είναι σε κατάσταση λειτουργίας (βλάβης), όταν το πρωτεύον σύστημα είναι σε κατάσταση βλάβης (λειτουργίας), ενώ ένα εξάρτημα το οποίο στο πρωτεύον σύστημα είναι σε κατάσταση λειτουργίας (βλάβης), στο δυϊκό είναι σε κατάσταση βλάβης (λειτουργίας). Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε ένα σειριακό σύστημα, δηλαδή ένα σύστημα το οποίο βρίσκεται σε κατάσταση βλάβης, όταν έστω και ένα από τα εξαρτήματά του έχει υποστεί βλάβη, ενώ λειτουργεί αν και μόνο αν όλα τα εξαρτήματά του είναι σε κατάσταση λειτουργίας. Το δυϊκό αυτού του συστήματος είναι ένα σύστημα το οποίο λειτουργεί, όταν έστω και ένα από τα εξαρτήματά του είναι σε κατάσταση λειτουργίας, ενώ βρίσκεται σε κατάσταση βλάβης, αν και μόνο αν όλα τα εξαρτήματά του έχουν υποστεί βλάβη. Αυτό είναι ένα παράλληλο σύστημα.

Η διαμόρφωση, τα χαρακτηριστικά και η οικονομική διάσταση του δυϊκού ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού γίνονται καλύτερα κατανοητά με τη βοήθεια ενός παραδείγματος.

Παράδειγμα 10 (*διαμόρφωση δυϊκού και κανόνες αντιστοίχισης*)

Ας θεωρήσουμε μια βιομηχανία **Π**, η οποία χρησιμοποιεί τρεις πρώτες ύλες R_1, R_2 και R_3 για την παραγωγή τεσσάρων προϊόντων P_1, P_2, P_3 και P_4. Στον Πίνακα 4 παρουσιάζονται το κέρδος ανά μονάδα προϊόντος, οι διαθέσιμες ποσότητες πρώτων υλών και η ποσότητα, η οποία απαιτείται από κάθε πρώτη ύλη για την παραγωγή μιας μονάδας από το κάθε προϊόν.

Πίνακας 4. Παράμετροι της παραγωγικής διαδικασίας

Πρώτες ύλες	Απαιτούμενη ποσότητα πρώτων υλών για την παραγωγή μιας μονάδας από το κάθε προϊόν				Διαθέσιμα αποθέματα πρώτων υλών
	P_1	P_2	P_3	P_4	
R_1	3	1	2	4	3
R_2	2	2	3	1	2
R_3	3	2	4	1	4
Κέρδος ανά μονάδα προϊόντος	3	4	2	5	

Είναι λογικό η βιομηχανία **Π** να θέλει να αξιοποιήσει τα διαθέσιμα αποθέματα πρώτων υλών έτσι ώστε το κέρδος της να μεγιστοποιείται. Αν, λοιπόν, x_1, x_2, x_3 και x_4 είναι οι παραγόμενες ποσότητες από τα προϊόντα P_1, P_2, P_3 και P_4, αντίστοιχα, τότε το μαθηματικό μοντέλο που περιγράφει το πρόβλημα της βιομηχανίας **Π**, είναι:

Πρωτεύον

$$\begin{array}{ll} \textbf{max} & z=3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 \\ & 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 3 \\ \textbf{με τους} & 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 2 \\ \textbf{περιορισμούς} & 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 4 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0 \end{array}$$

Το πιο πάνω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού είναι το ***πρωτεύον***.

Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι υπάρχει μια άλλη βιομηχανία **Δ**, η οποία χρησιμοποιεί τις ίδιες πρώτες ύλες R_1, R_2 και R_3 με τη βιομηχανία **Π** και η οποία για λόγους που σχετίζονται με τις ανάγκες της παραγωγής της, επιθυμεί να αυξήσει τα αποθέματά της στις τρεις αυτές πρώτες ύλες. Η βιομηχανία **Δ** κάνει τη σκέψη ότι θα μπορούσε να αγοράσει τα αποθέματα πρώτων υλών της βιομηχανίας **Π**, έναντι συμφέροντος και για τις δύο βιομηχανίες τιμήματος. Προς την κατεύθυνση αυτή η βιομηχανία **Δ** πρέπει να προσφέρει στη βιομηχανία **Π** τέτοιες τιμές ώστε η βιομηχανία **Π** να προτιμήσει να πωλήσει τα αποθέματά της σε πρώτες ύλες, αντί να τα χρησιμοποιήσει για την παραγωγή προϊόντων. Το γεγονός ότι η παραγωγή μιας μονάδας από το προϊόν P_1 απαιτεί 3 μονάδες πρώτης ύλης R_1, 2 μονάδες πρώτης ύλης R_2 και 3 μονάδες πρώτης ύλης R_3, σε συνδυασμό με το γεγονός ότι το κέρδος ανά μονάδα προϊόντος P_1 είναι ίσο με 3 νομισματικές μονάδες, σημαίνει ότι για να προτιμήσει η βιομηχανία **Π** την προσφορά της βιομηχανίας **Δ** πρέπει το ποσό που θα εισπράξει η βιομηχανία **Π** από την πώληση στη βιομηχανία **Δ** 3 μονάδων πρώτης ύλης R_1, 2 μονάδων πρώτης ύλης R_2 και 3 μονάδων πρώτης ύλης R_3, να είναι τουλάχιστον ίσο με το κέρδος των 3 νομισματικών μονάδων που θα είχε η βιομηχανία **Π**, αν χρησιμοποιούσε τις ποσότητες αυτές για την παραγωγή μιας μονάδας από το προϊόν P_1. Επομένως, αν w_1, w_2 και w_3 είναι οι τιμές που προσφέρει η βιομηχανία **Δ** για να αγοράσει μια μονάδα πρώτης ύλης R_1, R_2 και R_3 αντιστοίχως, τότε θα πρέπει: $3w_1+2w_2+3w_3 \geq 3$. Ακολουθώντας ένα παρόμοιο σκεπτικό και για τα άλλα τρία προϊόντα, γίνεται φανερό ότι για να είναι οι τιμές w_1, w_2 και w_3 ανταγωνιστικές με το κέρδος που θα απέφερε στη βιομηχανία **Π** η παραγωγή των προϊόντων P_1, P_2, P_3 και P_4, θα πρέπει να ισχύει: $3w_1+2w_2+3w_3 \geq 3$, $w_1+2w_2+2w_3 \geq 4$, $2w_1+3w_2+4w_3 \geq 2$, $4w_1+w_2+w_3 \geq 5$.

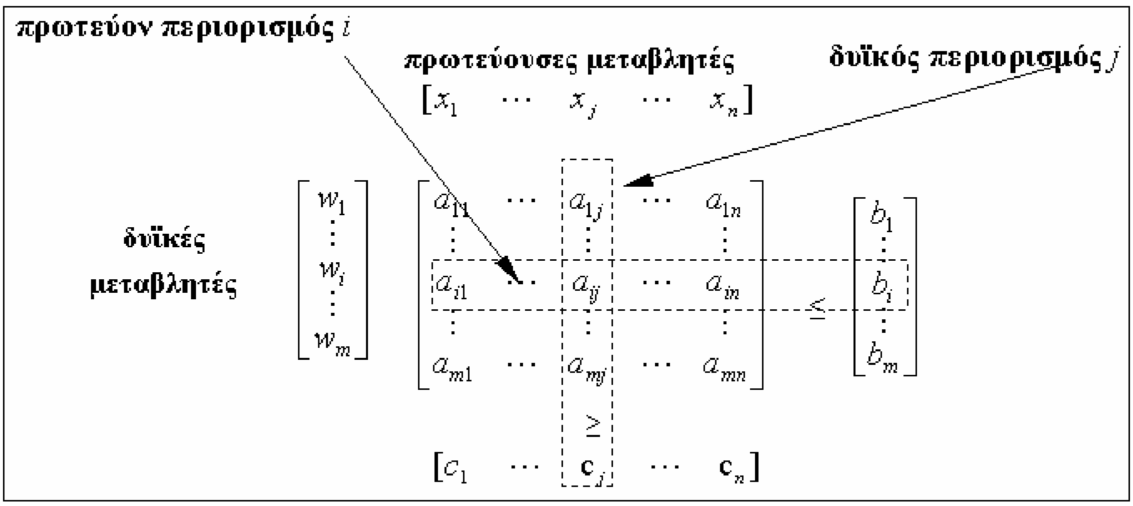
Επιπλέον, οι τιμές αυτές πρέπει να είναι μη αρνητικές, δηλαδή $w_1 \geq 0$, $w_2 \geq 0$ και $w_3 \geq 0$. Από την άλλη μεριά, η βιομηχανία **Δ** είναι λογικό να θέλει να ελαχιστοποιήσει το συνολικό τίμημα $y = 3w_1+2w_2+4w_3$ για την αγορά των διαθέσιμων 3, 2 και 4 μονάδων από τις πρώτες ύλες R_1, R_2 και R_3. Έτσι, το πρόβλημα της βιομηχανίας **Δ** είναι:

Δυϊκό	
min	$y=3w_1 + 2w_2 + 4w_3$
	$3w_1 + 2w_2 + 3w_3 \geq 3$
με τους	$w_1 + 2w_2 + 2w_3 \geq 4$
περιορισμούς	$2w_1 + 3w_2 + 4w_3 \geq 2$
	$4w_1 + w_2 + w_3 \geq 5$
	$w_1 \geq 0,\ w_2 \geq 0,\ w_3 \geq 0$

Το παραπάνω πρόβλημα, είναι το ***δυϊκό*** του πρωτεύοντος. Ο επόμενος πίνακας επιτρέπει να δούμε καλύτερα τη σχέση μεταξύ των δομών του πρωτεύοντος και του δυϊκού προβλήματος.

πρωτεύον		**δυϊκό**	
max	$z=3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4$	**min**	$y=3w_1 + 2w_2 + 4w_3$
	$w_1 \rightarrow 3x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 3$		$3w_1 + 2w_2 + 3w_3 \geq 3$
με τους	$w_2 \rightarrow 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 1x_4 \leq 2$	**με τους**	$1w_1 + 2w_2 + 2w_3 \geq 4$
περιορισμούς	$w_3 \rightarrow 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 1x_4 \leq 4$	**περιορισμούς**	$2w_1 + 3w_2 + 4w_3 \geq 2$
	$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0$		$4w_1 + 1w_2 + 1w_3 \geq 5$
			$w_1 \geq 0,\ w_2 \geq 0,\ w_3 \geq 0$

Όπως είναι φανερό, σε κάθε μεταβλητή του πρωτεύοντος προβλήματος αντιστοιχεί ένας δυϊκός περιορισμός και σε κάθε πρωτεύοντα περιορισμό αντιστοιχεί μια δυϊκή μεταβλητή. Επίσης, η φορά των περιορισμών του πρωτεύοντος είναι του τύπου $\leq$, ενώ η φορά των δυϊκών περιορισμών είναι του τύπου $\geq$. Ακόμα, το πρωτεύον είναι ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης, ενώ το δυϊκό είναι ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης. Τέλος, οι σταθεροί όροι των περιορισμών του πρωτεύοντος γίνονται οι συντελεστές των δυϊκών μεταβλητών στη δυϊκή αντικειμενική συνάρτηση. Ο τρόπος αντιστοίχισης των μεταβλητών του ενός προβλήματος με τους περιορισμούς του άλλου, καθώς και η σχέση μεταξύ των δομών του πρωτεύοντος προβλήματος και του δυϊκού του, αποδίδονται παραστατικά στο Σχήμα 5.



Σχήμα 5. Σχηματική απεικόνιση της δυϊκότητας.

Παράδειγμα 11

πρωτεύον πρόβλημα

$$\begin{array}{llrcrcr}
\textbf{max} & & z = 3x_1 & + & 2x_2 & & \\
\textbf{με τους} & w_1 \to & -2x_1 & + & 7x_2 & \leq & -24 \\
\textbf{περιορισμούς} & w_2 \to & 3x_1 & + & 4x_2 & \leq & 31 \\
& w_3 \to & x_1 & - & 5x_2 & \leq & 20 \\
& & \multicolumn{5}{l}{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0}
\end{array}$$

δυϊκό πρόβλημα

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
\textbf{min} & y = -24w_1 & + & 31w_2 & + & 20w_3 & & \\
\textbf{με τους} & -2w_1 & + & 3w_2 & + & w_3 & \geq & 3 \\
\textbf{περιορισμούς} & 7w_1 & + & 4w_2 & - & 5w_3 & \geq & 2 \\
& \multicolumn{7}{l}{w_1 \geq 0, w_2 \geq 0, w_3 \geq 0}
\end{array}$$

■

Παράδειγμα 12

πρωτεύον πρόβλημα

$$\begin{array}{llrcrcr}
\textbf{max} & & z = 2x_1 & + & x_2 & & \\
& w_1 \to & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 3 \\
\textbf{με τους} & w_2 \to & 3x_1 & + & x_2 & = & 3 \\
\textbf{περιορισμούς} & w_3 \to & 4x_1 & + & 3x_2 & \geq & 6 \\
& & \multicolumn{5}{l}{x_1 \geq 0 \text{ , } x_2 \in (-\infty, +\infty)}
\end{array}$$

Το πρώτο βήμα είναι να εξασφαλίσουμε ότι όλοι οι περιορισμοί του πρωτεύοντος είναι του τύπου $\leq$. Προς την κατεύθυνση αυτή, ο 3ος περιορισμός πολλαπλασιάζεται με -1 για να αντιστραφεί η φορά του και να γίνει του τύπου $\leq$. Ο περιορισμός ισότητας είναι ισοδύναμος με το σύστημα των ανισοτικών περιορισμών $3x_1+x_2 \leq 3$ και $3x_1+x_2 \geq 3$, ο δεύτερος των οποίων πολλαπλασιάζεται με -1 για να γίνει και αυτός του τύπου $\leq$. Η μεταβλητή x_2, που είναι μεταβλητή χωρίς περιορισμό ως προς το πρόσημό της, αντικαθίσταται με τη διαφορά δύο μη αρνητικών μεταβλητών, θέτοντας $x_2 = \bar{x}_2 - \hat{x}_2$. Έτσι, προκύπτει η μορφή:

$$\begin{array}{llrcrcrcr}
\textbf{max} & & z = 2x_1 & + & \bar{x}_2 & - & \hat{x}_2 & & \\
& v_1 \to & x_1 & + & 2\bar{x}_2 & - & 2\hat{x}_2 & \leq & 3 \\
\textbf{με τους} & \bar{v}_2 \to & 3x_1 & + & \bar{x}_2 & - & \hat{x}_2 & \leq & 3 \\
\textbf{περιορισμούς} & \hat{v}_2 \to & -3x_1 & - & \bar{x}_2 & + & \hat{x}_2 & \leq & -3 \\
& v_3 \to & -4x_1 & - & 3\bar{x}_2 & + & 3\bar{x}_2 & \leq & -6 \\
& & \multicolumn{7}{l}{x_1 \geq 0, \ \bar{x}_2 \geq 0, \ \hat{x}_2 \geq 0}
\end{array}$$

Στη μορφή αυτή, το πρόβλημα έχει τρεις μεταβλητές και τέσσερις περιορισμούς. Επομένως, το δυϊκό του θα έχει τέσσερις μεταβλητές $v_1, \bar{v}_2, \hat{v}_2, v_3$ και τρεις περιορισμούς:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\textbf{min} & y = 3v_1 & + & 3\bar{v}_2 & - & 3\hat{v}_2 & - & 6v_3 & & \\
& v_1 & + & 3\bar{v}_2 & - & 3\hat{v}_2 & - & 4v_3 & \geq & 2 \\
\textbf{με τους} & 2v_1 & + & \bar{v}_2 & - & \hat{v}_2 & - & 3v_3 & \geq & 1 \\
\textbf{περιορισμούς} & -2v_1 & - & \bar{v}_2 & + & \hat{v}_2 & + & 3v_3 & \geq & -1 \\
& \multicolumn{9}{l}{v_1 \geq 0, \ \bar{v}_2 \geq 0, \ \hat{v}_2 \geq 0, \ v_3 \geq 0}
\end{array}$$

Αναγνωρίζοντας ότι οι δύο τελευταίοι περιορισμοί είναι ισοδύναμοι με τον περιορισμό ισότητας $2v_1 + \bar{v}_2 - \hat{v}_2 - 3v_3 = 1$ και θέτοντας $w_1 = v_1$, $w_2 = \bar{v}_2 - \hat{v}_2$ και $w_3 = -v_3$, τελικά έχουμε:

δυϊκό πρόβλημα

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \textbf{min} & y = 3w_1 & + & 3w_2 & + & 6w_3 & & \\ \textbf{με τους} & w_1 & + & 3w_2 & + & 4w_3 & \geq & 2 \\ \textbf{περιορισμούς} & 2w_1 & + & w_2 & + & 3w_3 & = & 1 \\ & \multicolumn{7}{l}{w_1 \geq 0,\ w_2 \in (-\infty, +\infty),\ w_3 \leq 0} \end{array}$$

Σημειώστε ότι η δυϊκή μεταβλητή w_2, ως διαφορά δύο μη αρνητικών μεταβλητών, είναι χωρίς περιορισμό ως προς το πρόσημο, ενώ η δυϊκή μεταβλητή w_3 είναι μη θετική. Επιπλέον, ο δεύτερος περιορισμός του δυϊκού έχει μορφή ισότητας.

Στο σημείο αυτό ας επανέλθουμε στο πρόβλημα που εξετάσθηκε στο Παράδειγμα 5 και ας παρατηρήσουμε ότι η προσφορά της βιομηχανίας **Δ** είναι συνολικά ανταγωνιστική στο βαθμό που το εισόδημα y της βιομηχανίας **Π** από την πώληση των πρώτων υλών της στη βιομηχανία **Δ** είναι τουλάχιστον ίσο με το κέρδος z που θα είχε η βιομηχανία **Π**, αν χρησιμοποιούσε τις πρώτες ύλες της για την παραγωγή προϊόντων. Ο συλλογισμός αυτός οδηγεί στη μονόπλευρη ανισότητα $z \leq y$, η οποία είναι γνωστή ως ***ασθενής δυϊσμός (weak duality)***. Άμεση συνέπεια του ασθενούς δυϊσμού είναι ότι, στις βέλτιστες λύσεις, οι τιμές των δύο αντικειμενικών συναρτήσεων πρέπει να είναι ίσες. Δηλαδή, αν z^* είναι η μέγιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του πρωτεύοντος και y^* είναι η ελάχιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του δυϊκού, ισχύει $z^* = y^*$. Η ισότητα αυτή αναφέρεται ως ***ισχυρός δυϊσμός (strong duality)*** και ρυθμίζει τον ανταγωνισμό μεταξύ του πρωτεύοντος προβλήματος, που είναι ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης και του δυϊκού του, που είναι ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης. Η βελτιστοποίηση των αντικειμενικών συναρτήσεων των δύο προβλημάτων οδηγεί σε μια ***ισοπαλία***, όπως αυτή στη Θεωρία Παιγνίων. ***Η μέγιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του πρωτεύοντος προβλήματος μεγιστοποίησης είναι ίση με την ελάχιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του δυϊκού του, το οποίο είναι ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης***. Έτσι, μεταξύ των βέλτιστων λύσεων των δύο προβλημάτων, δηλαδή μεταξύ παραγωγής και πώλησης των πρώτων υλών, η βιομηχανία **Π** δεν έχει κανένα δίλημμα επιλογής. Στο πρωτεύον πρόβλημα, οι βέλτιστες τιμές x_1^*, x_2^*, x_3^* και x_4^* των x_1, x_2, x_3 και x_4 υποδεικνύουν στη βιομηχανία **Π** τι να παράγει από το κάθε προϊόν. Στο δυϊκό πρόβλημα, οι βέλτιστες τιμές w_1^*, w_2^* και w_3^* των w_1, w_2 και w_3 καθορίζουν τις φυσιολογικές τιμές των πρώτων υλών.

Αν, τώρα, το εισόδημα της βιομηχανίας **Π** από την πώληση των ποσοτήτων των πρώτων υλών που απαιτούνται για την παραγωγή μιας μονάδας από κάποιο προϊόν, είναι μεγαλύτερο από το κέρδος ανά μονάδα αυτού του προϊόντος, τότε είναι πιο συμφέρον για τη βιομηχανία **Π** να μη παράγει το συγκεκριμένο προϊόν, αφού αυτό είναι υποτιμημένο σε σχέση με την αξία που αντιπροσωπεύουν οι πρώτες ύλες για την παραγωγή του. Έτσι εξηγείται γιατί, όταν μετά την επίλυση, ένας περιορισμός του δυϊκού προβλήματος είναι αδρανής, δηλαδή παραμένει γνήσια ανισότητα (και δεν ικανοποιείται ως ισότητα), η βέλτιστη τιμή της αντίστοιχης μεταβλητής του πρωτεύοντος είναι ίση με το μηδέν. Ομοίως, αν στη βέλτιστη παραγωγή (λύση του πρωτεύοντος) η διαθέσιμη ποσότητα από την πρώτη ύλη R_i δεν χρησιμοποιείται εξ ολοκλήρου (δηλαδή ο αντίστοιχος περιορισμός του πρωτεύοντος είναι αδρανής), τότε η βέλτιστη τιμή της δυϊκής μεταβλητής w_i είναι ίση με το μηδέν, δηλαδή $w_i^* = 0$. Αυτό σημαίνει ότι η βιομηχανία **Π** διατίθεται να παραχωρήσει δωρεάν την πρώτη ύλη R_i. Πώς όμως εξηγείται αυτό; Εκείνο που διαισθητικά μπορούμε να πούμε είναι ότι, αφού υπάρχει υπερεπάρκεια πρώτης ύλης R_i, η τιμή της πρέπει να καθορισθεί στο μηδέν. Η πρώτη αυτή ύλη θεωρείται στην οικονομική θεωρία ως ελεύθερο αγαθό και τότε λέμε ότι έχει ***οριακή αξία*** μηδενική. Σε μια ανταγωνιστική αγορά, θετική οριακή αξία έχουν μόνο όσα αγαθά είναι σε ανεπάρκεια σε σχέση με τη ζήτησή τους (οπότε και ο αντίστοιχος περιορισμός στο πρόβλημά μας θα είναι ενεργός αφού θα καταναλώνεται πλήρως η εν λόγω πρώτη ύλη). Ας σημειωθεί εξάλλου ότι, αν η βιομηχανία **Π** ήθελε να αυξήσει το μέγιστο κέρδος της z^* από την παραγωγή των προϊόντων δια μέσου της αύξησης των διαθέσιμων πρώτων υλών, αυτό δεν θα έπρεπε να το επιδιώξει αυξάνοντας την ποσότητα της πρώτης ύλης R_i, αφού η διαθέσιμη ποσότητα από αυτή την πρώτη ύλη παραμένει μερικώς αχρησιμοποίητη. Έτσι, η βιομηχανία **Π** πρέπει να είναι διατεθειμένη να πωλήσει την αχρησιμοποίητη ποσότητα σε οποιαδήποτε τιμή, αφού δεν προτίθεται να αγοράσει πρόσθετη ποσότητα πρώτης ύλης R_i, μια και κάτι τέτοιο μόνο κόστος θα απέφερε. Όπως αναφέρθηκε, από οικονομικής πλευράς, η οριακή αξία της πρώτης αυτής ύλης είναι μηδενική, αφού περαιτέρω αύξηση της διαθεσιμότητάς της δεν πρόκειται να βελτιώσει το κέρδος.

Εκτός, λοιπόν, από τη σχέση η οποία καταγράφεται ανάμεσα στις βέλτιστες τιμές των αντικειμενικών συναρτήσεων των δύο προβλημάτων, μια ακόμα σχέση με εξίσου ενδιαφέρουσα οικονομική ερμηνεία καταγράφεται και ανάμεσα στις βέλτιστες τιμές των πρωτευουσών και των δυϊκών μεταβλητών. Η σχέση αυτή, η οποία εκφράζει την ***ισορροπία*** ή ***οικονομική ευστάθεια*** μεταξύ των βέλτιστων λύσεων των δύο προβλημάτων αποτελεί το πολύ γνωστό ***θεώρημα ισορροπίας*** ή ***θεώρημα του συμπληρωματικού περιθωρίου*** ή της ***συμπληρωματικής χαλαρότητας***.

Σε απλή γλώσσα, εκείνο που λέει το θεώρημα αυτό είναι ότι ***στη βέλτιστη λύση, αν μια μεταβλητή του ενός προβλήματος είναι θετική, τότε ο αντίστοιχος περιορισμός του άλλου είναι ενεργός, δηλαδή ικανοποιείται ως εξίσωση, και αν ένας περιορισμός του ενός προβλήματος είναι αδρανής, τότε η αντίστοιχη μεταβλητή του άλλου έχει τιμή ίση με το μηδέν***.

Στο σημείο αυτό ας παρατηρήσουμε ακόμα ότι η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του πρωτεύοντος είναι ίση με τη βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του δυϊκού, δηλαδή

$$z^* = y^* = b_1 w_1^* + \cdots + b_i w_i^* + \cdots + b_m w_m^*$$

Η τελευταία αυτή σχέση δείχνει ότι, αν η διαθέσιμη ποσότητα b_i από την πρώτη ύλη R_i αυξηθεί κατά Δb_i, τότε το εισόδημα της βιομηχανίας **Π** είτε από την παραγωγή των προϊόντων, είτε από την πώληση των πρώτων υλών, αυξάνεται κατά $\Delta b_i \times w_i^*$.

Με πιο απλά λόγια, το w_i^* εκφράζει το κέρδος που θα είχε η βιομηχανία **Π**, αν είχε στη διάθεσή της μια ακόμα μονάδα πρώτης ύλης R_i. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο οι δυϊκές μεταβλητές συχνά αναφέρονται και ως ***κόστος ευκαιρίας (opportunity cost) και αντιστοιχούν στην οριακή αξία του πόρου που εκφράζουν***. Αφού λοιπόν η βιομηχανία **Π** θα είχε κέρδος w_i^* για κάθε πρόσθετη μονάδα από την πρώτη ύλη R_i, το w_i^* θα πρέπει να εκφράζει και το μέγιστο τίμημα (πέρα και πάνω από την τρέχουσα τιμή της πρώτης αυτής ύλης στην αγορά), το οποίο η βιομηχανία **Π** θα ήταν διατεθειμένη να καταβάλλει για την αγορά μιας μονάδας από αυτή την πρώτη ύλη. Για το λόγο αυτό, οι τιμές των δυϊκών μεταβλητών ονομάζονται επίσης ***σκιώδεις τιμές (shadow prices)*** σε αντίθεση με τις τιμές της αγοράς που είναι σε όλους ορατές. Όπως αναφέραμε προηγουμένως, ο***ι σκιώδεις τιμές αντιστοιχούν στην οριακή αξία του πόρου.***

Αν, τώρα, στη βέλτιστη λύση γίνεται μερική χρησιμοποίηση της πρώτης ύλης R_i, τότε μια μικρή μεταβολή Δb_i στη διαθέσιμη ποσότητα b_i από αυτή την πρώτη ύλη δεν θα πρέπει να έχει επιπτώσεις στο εισόδημα της βιομηχανίας **Π**. Έτσι εξηγείται γιατί σε μια τέτοια περίπτωση η βέλτιστη τιμή w_i^* της δυϊκής μεταβλητής w_i είναι ίση με το μηδέν και ισοδυναμεί με μηδενική οριακή αξία.

Παράδειγμα 13

Αν χρησιμοποιούσαμε τη μέθοδο simplex για να λύσουμε το πρόβλημα μεγιστοποίησης για τη βιομηχανία **Π**, θα βρίσκαμε: $x_1^* = 0$, $x_2^* = 5/7 >$ 0, $x_3^* = 0$, $x_4^* = 4/7 >$ 0. Έτσι, το κέρδος της βιομηχανίας **Π** από τη χρησιμοποίηση των πρώτων υλών R_1, R_2 και R_3 για την παραγωγή των προϊόντων $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3$ και P_4 μεγιστοποιείται, όταν τα προϊόντα P_2 και P_4 παράγονται σε ποσότητες $x_2^* = 5/7$ και $x_4^* = 4/7$, ενώ η παραγωγή των προϊόντων P_1 και P_3 διατηρείται σε μηδενικό επίπεδο, δηλαδή $x_1^* = 0$ και $x_3^* = 0$. Τότε, το μέγιστο κέρδος είναι

$$z^* = 3x_1^* + 4x_2^* + 2x_3^* + 5x_4^* = 3\times 0 + 4\times\frac{5}{7} + 2\times 0 + 5\times\frac{4}{7} = \frac{40}{7}$$

Επιπλέον, οι χρησιμοποιούμενες ποσότητες πρώτων υλών είναι:

$$\mathrm{R}_1:\ 3x_1^* + x_2^* + 2x_3^* + 4x_4^* = 3\times 0 + 1\times\frac{5}{7} + 2\times 0 + 4\times\frac{4}{7} = 3$$

$$\mathrm{R}_2:\ 2x_1^* + 2x_2^* + 3x_3^* + x_4^* = 2\times 0 + 2\times\frac{5}{7} + 3\times 0 + 1\times\frac{4}{7} = 2$$

$$\mathrm{R}_3:\ 3x_1^* + 2x_2^* + 4x_3^* + x_4^* = 3\times 0 + 2\times\frac{5}{7} + 4\times 0 + 1\times\frac{4}{7} = 2$$

Δηλαδή, οι διαθέσιμες ποσότητες από τις πρώτες ύλες R_1 και R_2 εξαντλούνται, ενώ από την πρώτη ύλη R_3 παραμένει αχρησιμοποίητη ποσότητα 2 μονάδων. Λύνοντας και το δυϊκό πρόβλημα θα βρίσκαμε: w_1^* = 6/7, w_2^* = 11/7 και w_3^* = 0. Αυτό σημαίνει ότι, στην προσφορά της βιομηχανίας **Δ**, η τιμή μονάδας των πρώτων υλών R_1 και R_2 πρέπει να καθορισθεί, αντίστοιχα, στις 6/7 και 11/7 νομισματικές μονάδες, ενώ η τιμή μονάδας για την πρώτη ύλη R_3 πρέπει να καθορισθεί στο μηδέν. Παρατηρούμε ότι πράγματι

$$z^* = \frac{40}{7} = b_1 w_1^* + b_2 w_2^* + b_3 w_3^* = 3\times\frac{6}{7} + 2\times\frac{11}{7} + 4\times 0 = \frac{40}{7}$$

Για τις τιμές αυτές, το εισόδημα της βιομηχανίας **Π** από την πώληση στη βιομηχανία **Δ** των ποσοτήτων πρώτων υλών που απαιτούνται για την παραγωγή μιας μονάδας από τα προϊόντα P_1 και P_3, είναι αντίστοιχα ίσο με

$$3\times 6/7 + 2\times 11/7 + 3\times 0 = 40/7 > 3,\quad 2\times 6/7 + 3\times 11/7 + 4\times 0 = 45/7 > 2$$

δηλαδή μεγαλύτερο από το κέρδος που θα είχε η βιομηχανία **Π**, αν χρησιμοποιούσε τις ποσότητες αυτές για την παραγωγή μιας μονάδας από το κάθε προϊόν. Αντίθετα, το εισόδημα της βιομηχανίας **Π** από την πώληση στη βιομηχανία **Δ** των ποσοτήτων πρώτων υλών που απαιτούνται για την παραγωγή μιας μονάδας από τα προϊόντα P_2 και P_4, είναι ίσο με το μοναδιαίο κέρδος των προϊόντων αυτών, αφού $1\times 6/7 + 2\times 11/7 + 2\times 0 = 4$ και $4\times 6/7 + 1\times 11/7 + 1\times 0 = 5$. Με άλλα λόγια, το επιπλέον κέρδος για τα προϊόντα αυτά είναι ίσο με το μηδέν. Επομένως, τα προϊόντα P_1 και P_3 είναι υποτιμημένα σε σχέση με την αξία που αντιπροσωπεύουν οι πρώτες ύλες για την παραγωγή τους και για το λόγο αυτό δεν θα πρέπει να παράγονται. Αντίθετα, τα προϊόντα P_2 και P_4 έχουν σωστή τιμή σε σχέση με τις πρώτες ύλες. Εξάλλου, το γεγονός ότι γίνεται μερική μόνο χρησιμοποίηση της πρώτης ύλης R_3 σημαίνει ότι μια μικρή μεταβολή της διαθέσιμης ποσότητας από αυτή την πρώτη ύλη δεν θα πρέπει να έχει επίπτωση στο κέρδος της βιομηχανίας **Π**, αφού η πρώτη ύλη R_3 ήταν ήδη σε υπερεπάρκεια. Έτσι, η βιομηχανία **Π** πρέπει να είναι διατεθειμένη να παραχωρήσει δωρεάν την πρώτη ύλη R_3, με άλλα λόγια η βιομηχανία **Δ** πρέπει να καθορίσει την τιμή της R_3 στο μηδέν, δηλαδή w_3^* = 0.

Ασκήσεις αυτοαξιολόγησης

10η. Δίνεται το πρόβλημα ελαχιστοποίησης της συνάρτησης $z = 2x_1 + 3x_2$ με τους περιορισμούς $2x_1 + 3x_2 \leq 30$, $x_1 + 2x_2 \geq 10$, $x_1 - x_2 \geq 0$, $x_1 \geq 5$, $x_2 \geq 0$. **(i)** Λύστε το πρόβλημα αυτό γραφικά. **(ii)** Διαμορφώστε και λύστε το δυϊκό πρόβλημα.

11η. Μια βιομηχανία χρησιμοποιεί δύο μηχανές M_1 και M_2 για την παραγωγή τεσσάρων προϊόντων P_1, P_2, P_3 και P_4. Οι παράμετροι της παραγωγικής διαδικασίας παρουσιάζονται στον επόμενο πίνακα:

Μηχανές	Χρόνος επεξεργασίας (ώρες/μονάδα προϊόντος)				Διαθέσιμος ημερήσιος χρόνος (ώρες)
	P_1	P_2	P_3	P_4	
M_1	2	0	1	1	8
M_2	2	2	1	2	12
Κέρδος ανά μονάδα προϊόντος	2	1	5	6	

(i) Διαμορφώστε ένα μαθηματικό μοντέλο που να προσδιορίζει την ημερήσια παραγωγή για την οποία το κέρδος της βιομηχανίας μεγιστοποιείται. **(ii)** Διαμορφώστε το δυϊκό του προβλήματος μεγιστοποίησης.

12η. Ένα άτομο πρέπει να λαμβάνει καθημερινά τουλάχιστον 32 μονάδες βιταμίνης B_1, 28 μονάδες βιταμίνης B_2 και 35 μονάδες βιταμίνης B_3. Οι βιταμίνες B_1, B_2 και B_3 περιέχονται σε τέσσερις τροφές T_1, T_2, T_3 και T_4, των οποίων το κόστος και η περιεκτικότητα ανά γραμμάριο στις βιταμίνες αυτές παρουσιάζονται στον επόμενο πίνακα:

Βιταμίνες	Περιεκτικότητα σε βιταμίνες ανά γραμμάριο τροφής				Ελάχιστες ημερήσιες απαιτήσεις
	T_1	T_2	T_3	T_4	
B_1	1	3	3	2	32
B_2	2	2	8	3	28
B_3	7	4	6	5	35
Κόστος ανά γραμμάριο τροφής	8	8	16	7	

(i) Διαμορφώστε ένα μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού που να προσδιορίζει τα συστατικά μιας δίαιτας, η οποία θα εξασφαλίζει στο άτομο τις απαιτούμενες ελάχιστες μονάδες βιταμινών με το ελάχιστο δυνατό κόστος. **(ii)** Μια φαρμακοβιομηχανία προτίθεται να θέσει σε κυκλοφορία χάπια βιταμινών B_1, B_2 και B_3. Ποια πρέπει να είναι η τιμή πώλησης για κάθε μονάδα βιταμίνης ώστε η φαρμακοβιομηχανία να είναι ανταγωνιστική στην αγορά;

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΑΥΤΟΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Σχόλια επί των ασκήσεων 1 έως 6

Οι ασκήσεις 1 έως 6 αναφέρονται στη διαμόρφωση του μαθηματικού μοντέλου για την περιγραφή ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού. Η διαμόρφωση του μοντέλου, η οποία αποτελεί το πρώτο στάδιο της διαδικασίας βελτιστοποίησης ενός συστήματος, δεν είναι συνήθως μια τόσο εύκολη και απλή υπόθεση, δεδομένης της πολυπλοκότητας των συστημάτων του πραγματικού κόσμου. Ακόμα και πεπειραμένοι επιχειρησιακοί ερευνητές συχνά συναντούν σοβαρές δυσκολίες στην προσπάθειά τους να περιγράψουν ένα σύστημα με μαθηματικές σχέσεις. Πάντως, η πρώτη και ίσως η πιο κρίσιμη φάση της διαδικασίας διαμόρφωσης ενός μαθηματικού μοντέλου, είναι ο καθορισμός των μεταβλητών απόφασης. Η ενδεδειγμένη επιλογή των μεταβλητών αυτών διευκολύνει την ποσοτικοποίηση τόσο του κριτηρίου απόδοσης, όσο και των περιορισμών στους οποίους υπόκειται το υπό βελτιστοποίηση σύστημα.

1. Έστω x_1 και x_2, αντίστοιχα, οι ώρες λειτουργίας των εργοστασίων E_1 και E_2 εντός του κανονικού ωραρίου (8ώρου) και y_1 και y_2 οι αντίστοιχες ώρες υπερωριακής απασχόλησης.

να ελαχιστοποιηθεί η $z = 20x_1 + 40x_2 + 30y_1 + 60y_2$

με τους περιορισμούς

$$5x_1 + 3x_2 + 5y_1 + 3y_2 \geq 30$$
$$2x_1 + 6x_2 + 2y_1 + 6y_2 \geq 60$$
$$0 \leq x_1 \leq 8,\ 0 \leq x_2 \leq 8,\ 0 \leq y_1 \leq 3,\ 0 \leq y_2 \leq 3$$

2. Έστω x_1, x_2 και x_3, αντίστοιχα, τα ποσά που θα επενδυθούν στα προγράμματα P_1, P_2 και P_3.

να μεγιστοποιηθεί η $z = 1.4x_1 + 1.2x_2 + 1.6x_3$

με τους περιορισμούς

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 1000$$
$$x_2 + x_3 \geq 600$$
$$0.9x_1 + 0.8x_2 + 0.5x_3 \geq 1050$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$$

3. Έστω x_1, x_2, x_3 και x_4, αντίστοιχα, το ύψος της παραγωγής κατά τους μήνες Ιανουάριο, Φεβρουάριο, Μάρτιο και Απρίλιο. Στο τέλος κάθε μήνα το απόθεμα είναι ίσο με το απόθεμα στην αρχή του μήνα συν το ύψος παραγωγής μείον τη ζήτηση. Έτσι, στο τέλος Ιανουαρίου το απόθεμα είναι ίσο με $50 + x_1 – 100 = x_1 – 50$ μονάδες, στο τέλος Φεβρουαρίου ίσο με $x_1 – 50 + x_2 – 110 = x_1 + x_2 – 160$ μονάδες, στο τέλος Μαρτίου ίσο με $x_1 + x_2 – 160 + x_3 – 120 = x_1 + x_2 + x_3 – 280$ μονάδες και στο τέλος Απριλίου ίσο με $x_1 + x_2 + x_3 – 280 + x_4 – 110 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 – 390$ μονάδες. Το απόθεμα στο τέλος κάθε μήνα πρέπει να είναι μεγαλύτερο ή ίσο του μηδενός. Ειδικότερα, στο τέλος Απριλίου το απόθεμα πρέπει να είναι τουλάχιστον ίσο με 80 μονάδες. Επομένως, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 – 390 \geq 80$ ή $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 470$. Το συνολικό κόστος είναι ίσο με το κόστος παραγωγής, $9x_1 + 10x_2 + 8x_3 + 7x_4$, συν το κόστος αποθήκευσης, $(x_1 – 50) + (x_1 + x_2 –160) + (x_1 + x_2 + x_3 – 280) + (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 – 390)$, δηλαδή ίσο με $13x_1 +13x_2 + 10x_3 + 8x_4 – 880$.

να ελαχιστοποιηθεί η $z = 13x_1 + 13x_2 + 10x_3 + 8x_4$

με τους περιορισμούς

$$x_1 \geq 50$$
$$x_1 + x_2 \geq 160$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 280$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 470$$
$$0 \leq x_1 \leq 120,\ 0 \leq x_2 \leq 150,\ 0 \leq x_3 \leq 150,\ 0 \leq x_4 \leq 100$$

Ο σταθερός όρος –880 μπορεί να παραλειφθεί από τη συνάρτηση κόστους z.

Εναλλακτικός τρόπος επίλυσης της άσκησης 3:

Έστω και πάλι x_1, x_2, x_3 και x_4, αντίστοιχα, το ύψος της παραγωγής κατά τους μήνες Ιανουάριο, Φεβρουάριο, Μάρτιο και Απρίλιο. Ισχύει φυσικά ότι στο τέλος κάθε μήνα το απόθεμα είναι ίσο με το απόθεμα στην αρχή του μήνα, συν το ύψος παραγωγής, μείον τη ζήτηση. Αυτή τη σχέση όμως την εκφράζουμε τώρα με τη βοήθεια επιπλέον μεταβλητών που παριστάνουν το απόθεμα και αφήνουμε το γραμμικό προγραμματισμό, με την επίλυση του μοντέλου, να εντοπίσει τα αποθέματα αυτά. Ονομάζουμε λοιπόν ως I_0, I_1, I_2, I_3 και I_4 το αρχικό απόθεμα (I_0) και αντίστοιχα τα αποθέματα στο τέλος κάθε περιόδου. Η αντικειμενική συνάρτηση θα είναι το κόστος παραγωγής συν το κόστος διατήρησης αποθεμάτων, δηλαδή είναι $z= 9x_1+10x_2 + 8x_3 + 7x_4 + 1I_1 + 1I_2 + 1I_3 + 1I_4$. Προφανώς το I_0, που είναι γνωστή η τιμή του και ίση με 50 μονάδες δεν προκαλεί κόστος στην παρούσα περίοδο αφού προέρχεται από την προηγούμενη περίοδο προγραμματισμού και το κόστος του έχει ήδη συνυπολογιστεί. Για το λόγο αυτό δεν υπάρχει στην αντικειμενική συνάρτηση. Οι περιορισμοί $x_1 \leq 120$, $x_2 \leq 150$, $x_3 \leq 150$ και $x_4 \leq 100$ ισχύουν πάλι αφού καθορίζουν την παραγωγική δυναμικότητα. Επιπλέον, για κάθε περίοδο έχουμε μία βασική σχέση η οποία καθορίζει τη ροή της παραγωγής και η οποία υποδηλώνει ότι στο τέλος κάθε μήνα το απόθεμα είναι ίσο με το απόθεμα στην αρχή του μήνα συν το ύψος παραγωγής, μείον τη ζήτηση. Η σχέση αυτή για τον πρώτο μήνα έχει τη μορφή: $I_0 + x_1 = 100 + I_1$, η οποία, αν φέρουμε όλες τις μεταβλητές αριστερά , γίνεται $I_0 + x_1 - I_1 = 100$. Υπενθυμίζουμε, ότι το I_0 είναι γνωστό, κάτι που θα προτιμήσουμε να το δηλώσουμε με ένα επιπλέον περιορισμό αργότερα, αντί να αντικαταστήσουμε την τιμή του στον περιορισμό. Για το δεύτερο μήνα θα έχουμε: $I_1 + x_2 = 110 + I_2$, που γίνεται $I_1 + x_2 - I_2 = 110$. Για τον τρίτο μήνα έχουμε: $I_2 + x_3 = 120 + I_3$, δηλαδή $I_2 + x_3 - I_3 = 120$. Τέλος για τον τέταρτο μήνα έχουμε $I_3 + x_4 = 110 + I_4$ που γίνεται $I_3 + x_4 - I_4 = 110$. Τέλος, γνωρίζουμε ότι $I_0 = 50$ και $I_4 = 80$ (υποχρεωτικό απόθεμα στο τέλος του τέταρτου μήνα). Αντί να αντικαταστήσουμε τις τιμές αυτές στους προηγούμενους περιορισμούς προτιμούμε να διατηρήσουμε τις μεταβλητές ώστε να υπάρχει συνάφεια. Ένας άλλος λόγος είναι ότι έτσι εύκολα μπορούμε να πειραματιστούμε αλλάζοντας τις τιμές αρχικού ή τελικού αποθέματος. Συνοπτικά έχουμε το ακόλουθο μοντέλο:

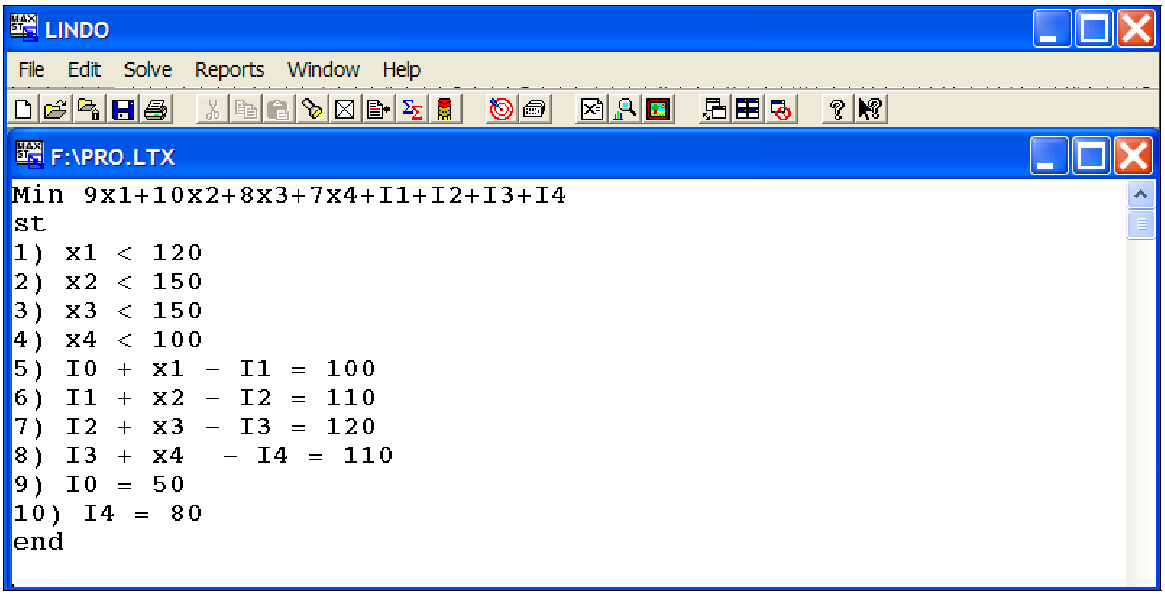
Minimize $z= 9x_1 + 10x_2 + 8x_3 + 7x_4 + I_1 + I_2 + I_3 + I_4$

με περιορισμούς

1) $x_1 \leq 120$,
2) $x_2 \leq 150$,
3) $x_3 \leq 150$,
4) $x_4 \leq 100$,
5) $I_0 + x_1 - I_1 = 100$,
6) $I_1 + x_2 - I_2 = 110$,
7) $I_2 + x_3 - I_3 = 120$,
8) $I_3 + x_4 - I_4 = 110$,
9) $I_0 = 50$,
10) $I_4 = 80$

όπου $x_i \geq 0$, και $I_i \geq 0$ για i=1, 2, 3, 4.

Στην ακόλουθη εικόνα, βλέπετε –πληροφοριακά– το μοντέλο στο λογισμικό LINDO (σχετικές πληροφορίες στο δικτυακό τόπο www.lindo.com).



ενώ, στη συνέχεια βλέπετε τα αποτελέσματα που δίνει το συγκεκριμένο λογισμικό μετά την επίλυση με τη μέθοδο simplex. Εδώ δίνουμε όλες τις πληροφορίες που αποκομίζουμε μετά την επίλυση του μοντέλου.

```
 LP OPTIMUM FOUND AT STEP      3
        OBJECTIVE FUNCTION VALUE
        1)      4280.000
  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
        X1       120.000000          0.000000
        X2       100.000000          0.000000
        X3       150.000000          0.000000
        X4       100.000000          0.000000
        I1        70.000000          0.000000
        I2        60.000000          0.000000
        I3        90.000000          0.000000
        I4        80.000000          0.000000
        I0        50.000000          0.000000
       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
        1)         0.000000          0.000000
        2)        50.000000          0.000000
        3)         0.000000          3.000000
        4)         0.000000          5.000000
        5)         0.000000         -9.000000
        6)         0.000000        -10.000000
        7)         0.000000        -11.000000
        8)         0.000000        -12.000000
        9)         0.000000          9.000000
       10)         0.000000        -13.000000
```

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

OBJ COEFFICIENT RANGES

VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	9.000000	0.000000	INFINITY
X2	10.000000	INFINITY	0.000000
X3	8.000000	3.000000	INFINITY
X4	7.000000	5.000000	INFINITY
I1	1.000000	0.000000	INFINITY
I2	1.000000	INFINITY	3.000000
I3	1.000000	INFINITY	5.000000
I4	1.000000	INFINITY	INFINITY
I0	0.000000	INFINITY	INFINITY

RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
1	120.000000	100.000000	50.000000
2	150.000000	INFINITY	50.000000
3	150.000000	60.000000	50.000000
4	100.000000	60.000000	50.000000
5	100.000000	50.000000	100.000000
6	110.000000	50.000000	100.000000
7	120.000000	50.000000	60.000000
8	110.000000	50.000000	60.000000
9	50.000000	100.000000	50.000000
10	80.000000	50.000000	60.000000

Δηλαδή, $x_1 = 120$. Μαζί με το αρχικό απόθεμα, που είναι $I_0 = 50$, έχουμε συνολικά 170 μονάδες. Η ζήτηση είναι ίση με 100 μονάδες επομένως απομένουν σε απόθεμα 70 μονάδες. Πράγματι, $I_1 = 70$. Με όμοιο τρόπο ερμηνεύεται όλο το σχέδιο που βλέπετε παραπάνω, το οποίο δίνει το ελάχιστο κόστος παραγωγής και διατήρησης αποθεμάτων που ανέρχεται σε 4280 νομισματικές μονάδες. Ο αναγνώστης προτρέπεται να αναλύσει τη διαδικασία παραγωγής, ικανοποίησης της ζήτησης και διατήρησης ενδιάμεσων αποθεμάτων μέχρι τέλους.

4. Όπως στο παράδειγμα 5, ορίζουμε να είναι x_i ο αριθμός των σερβιτόρων που ξεκινούν την πενθήμερη εβδομαδιαία βάρδια εργασίας τους την i-ημέρα (i = 1 = Δευτέρα, i = 2 = Τρίτη, …, i = 7 = Κυριακή). Τότε, ο συνολικός αριθμός των σερβιτόρων που εργάζονται στην ταβέρνα, τον οποίο θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε (δηλαδή η αντικειμενική συνάρτηση), είναι το άθροισμα του πλήθους των σερβιτόρων που ξεκινούν να εργάζονται τη Δευτέρα με εκείνου της Τρίτης κλπ. Επομένως η αντικειμενική συνάρτηση είναι:

$$\text{minimize } z = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7)$$

Λόγω της εβδομαδιαίας κυκλικότητας και της συνεχούς λειτουργίας της ταβέρνας, την Τετάρτη για παράδειγμα, εργάζονται οι x_6 σερβιτόροι που έπιασαν δουλειά το Σάββατο, οι x_7 της Κυριακής, οι x_1 της Δευτέρας, οι x_2 της Τρίτης και τέλος οι x_3 που ξεκίνησαν να εργάζονται εκείνη την ημέρα. Συνεπώς, οι $6\times(x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7)$ ανθρωποώρες που προσφέρουν, πρέπει να καλύπτουν τη τακτική ζήτηση των 350 ωρών καθώς και την έκτακτη ζήτηση των 24 ωρών εργασίας. Συνεπώς έχουμε:

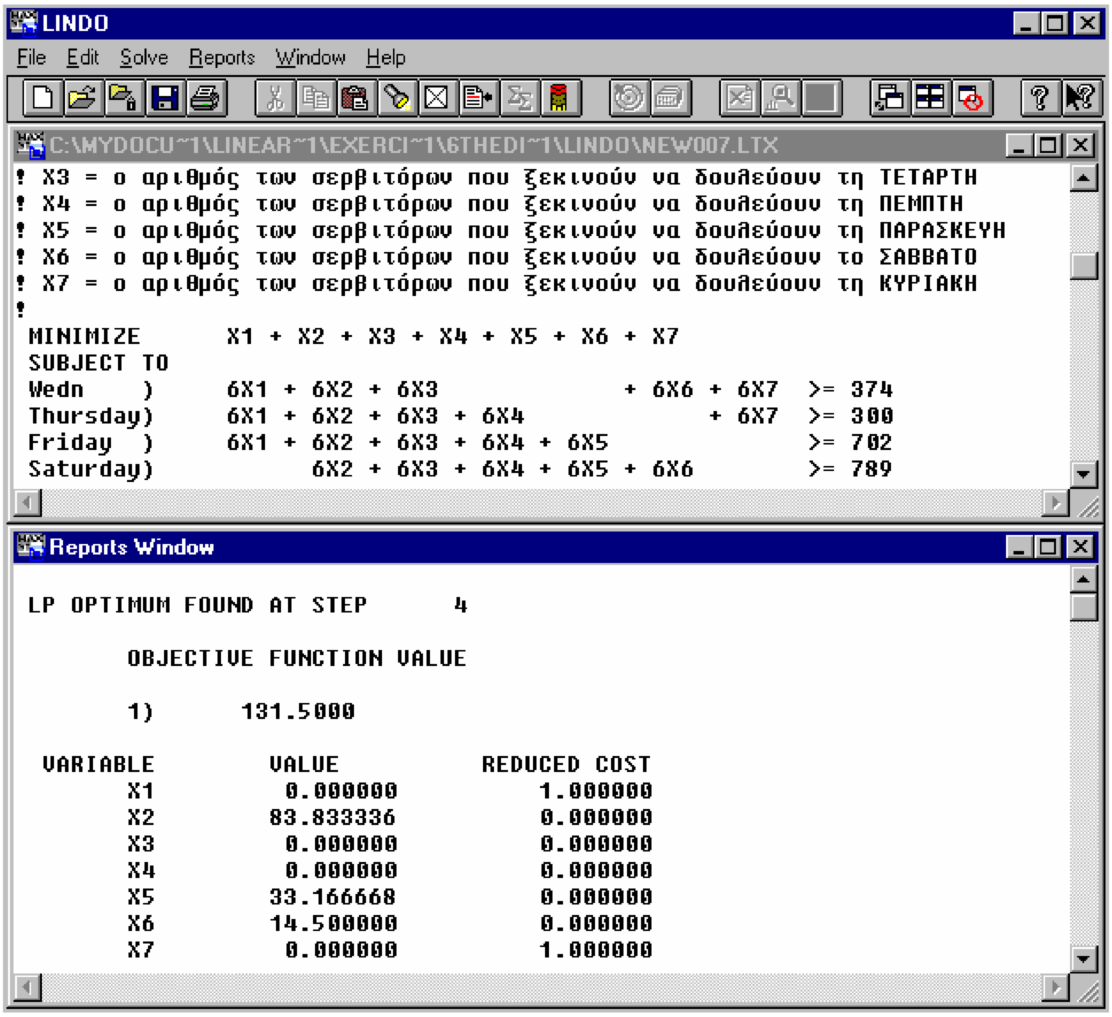
$6\times(x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7) \geq 374.$

Ανάλογα προκύπτουν και οι περιορισμοί για τις υπόλοιπες ημέρες της εβδομάδος :

$$
\begin{array}{llll}
6(x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7) & \geq & 350+24 & (\text{Τετάρτη}) \\
6(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7) & \geq & 300 & (\text{Πέμπτη}) \\
6(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) & \geq & 650+52 & (\text{Παρασκευή}) \\
6(x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6) & \geq & 725+64 & (\text{Σάββατο}) \\
6(x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7) & \geq & 250+36 & (\text{Κυριακή}) \\
6(x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7) & \geq & 125+24 & (\text{Δευτέρα}) \\
6(x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7) & \geq & 200 & (\text{Τρίτη})
\end{array}
$$

όπου $x_i \geq 0$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$

Και στο παράδειγμα αυτό δίνουμε μία εικόνα από το μοντέλο στο λογισμικό LINDO, καθώς επίσης και ένα τμήμα της άριστη λύσης. Όπως φαίνεται από την «αναφορά επίλυσης του προβλήματος» που δημιούργησε το LINDO, αν ξεκινήσουν να εργάζονται 83.836 σερβιτόροι την Τρίτη, 33.168 την Παρασκευή και 14.5 το Σάββατο, έχουμε το ζητούμενο βέλτιστο εβδομαδιαίο κυκλικό προγραμματισμό της ταβέρνας. Συνολικά απασχολούνται 131.5 σερβιτόροι. Ζητώντας από το λογισμικό να μας δώσει ακέραιες τιμές για τις μεταβλητές, παίρνουμε ως άριστη τη λύση $x_1 = 0$, $x_2 = 84$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 33$, $x_6 = 15$ και $x_7 = 0$ με ελάχιστο απαιτούμενο πλήθος εργαζομένων 132 άτομα.



5. Ορίζουμε τις μεταβλητές απόφασης με τέτοιο τρόπο ώστε να καταδεικνύουν τη δυνατότητα της επιχείρησης είτε να κατασκευάζει εσωτερικά είτε να αγοράζει εξαρτήματα από τον υπεργολάβο και να πληρώνει την ανάλογη αυξημένη τιμή. Έτσι έχουμε E1, S1 και W1 είναι το πλήθος των εξαρτημάτων (πρόσθιο τμήμα, σκελετός, πίσω ρόδες) που κατασκευάζει η επιχείρηση και E2, S2 και W2 είναι τα αντίστοιχα τμήματα που αγοράζει από τον υπεργολάβο.

Η αντικειμενική συνάρτηση παριστάνει το συνολικό κόστος και πρέπει να ελαχιστοποιηθεί:

$z = 8E1 + 6S1 + 1W1 + 12E2 + 9S2 + 3W2$.

Οι περιορισμοί του μοντέλου προκύπτουν από την κατανάλωση των πόρων και από την απαίτηση ικανοποίησης των παραγγελιών. Έτσι, έχουμε ότι η συνολική κατανάλωση πλαστικής ύλης από την παραγωγική διαδικασία είναι 3E1 + 4S1 + 0.5WM και δεν πρέπει να ξεπερνάει τη διαθέσιμη ποσότητα που είναι 50000 μονάδες, οπότε έχουμε:

$3E1 + 4S1 + 0.5WM \leq 50000$

Ομοίως για την κατανάλωση χρόνου εργασίας και μηχανών (σε λεπτά) παίρνουμε τους ακόλουθους δύο περιορισμούς:

$10E1 + 6S1 + 2W1 \leq 160000$ και

$2E1 + 2S1 + 0.1W1 \leq 30000$

Σε σχέση με την κάλυψη των παραγγελιών έχουμε ότι το άθροισμα των εξαρτημάτων πρόσθιου τμήματος, είτε από αυτά που παρήχθησαν εσωτερικά από την επιχείρηση είτε αγοράστηκαν από τον υπεργολάβο, θα πρέπει να είναι 12000 τεμάχια. Το ίδιο πρέπει να ισχύει και για τα υπόλοιπα εξαρτήματα. Έτσι έχουμε τους ακόλουθους τρεις περιορισμούς:

$E1 + E2 = 12000$,

$S1 + S2 = 12000$,

$W1 + W2 = 24000$

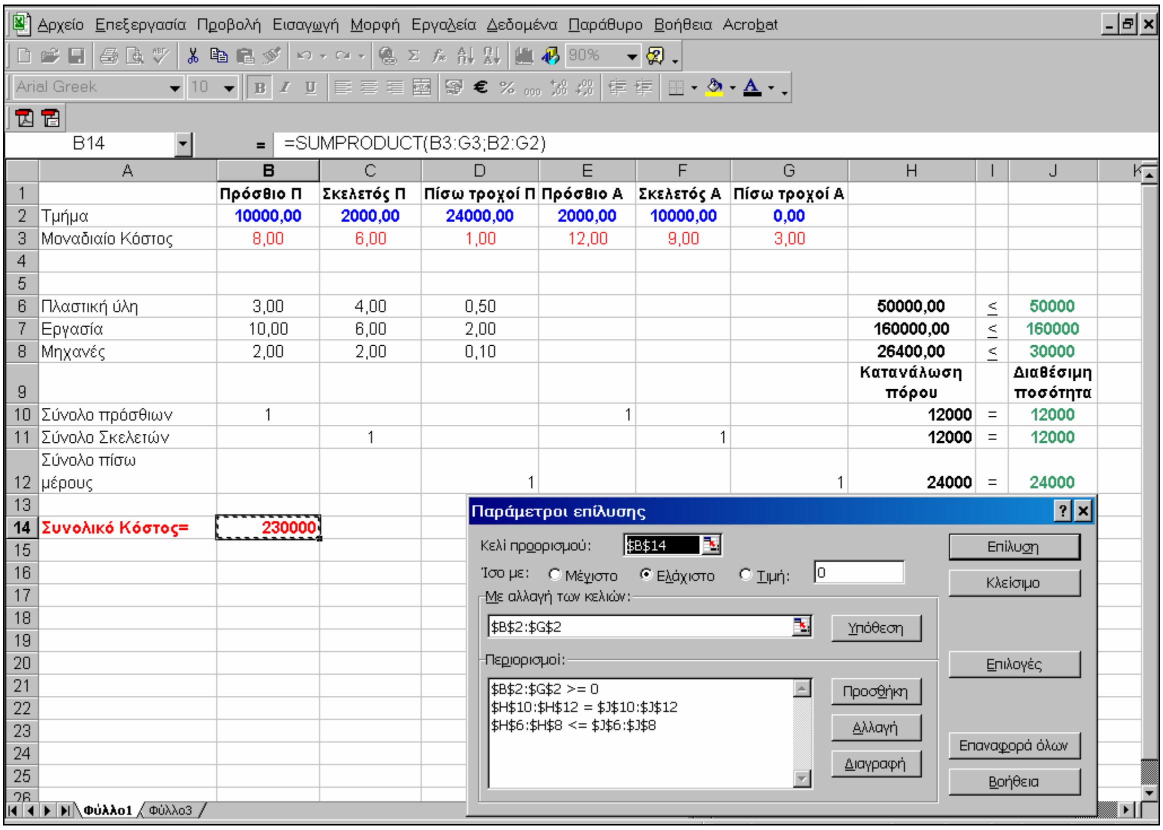
Ως συνήθως, $E1, E2, S1, S2, W1, W2 \geq 0$.

Προσέξτε, ότι στο τμήμα των πίσω τροχών χρειαζόμαστε διπλάσια ποσότητα από τα υπόλοιπα αφού η αναλογία στη συναρμολόγηση είναι 1:1:2.

Το πρόβλημα αυτό το λύσαμε με τη βοήθεια του Excel. Στην επόμενη εικόνα βλέπετε (πληροφοριακά) ανοιχτό ένα φύλλο εργασίας του Excel που περιέχει την αναπαράσταση του προβλήματος, καθώς επίσης και το παράθυρο των παραμέτρων της επίλυσης που χρησιμοποιείται για τη λύση τέτοιου τύπου προβλημάτων στο Excel. Το παράθυρο «Επίλυση» (Solver) γίνεται διαθέσιμο στο μενού «Εργαλεία» (Tools) αρκεί να το εγκαταστήσουμε από την εντολή «Πρόσθετα» (Add-Ins).

Παρατηρώντας την εικόνα, βλέπουμε ότι το ελάχιστο συνολικό κόστος ανέρχεται στις 230000 χρηματικές μονάδες και ότι η επιχείρηση παράγει 10000 πρόσθια και προμηθεύεται 2000 τεμάχια από τον υπεργολάβο (σύνολο 12000 τεμάχια), παράγει 2000 σκελετούς και αγοράζει 10000 τεμάχια από τον υπεργολάβο (σύνολο 12000 τεμάχια) και τέλος παράγει 24000 τεμάχια πίσω τροχών και δεν αγοράζει ούτε ένα τεμάχιο από τον υπεργολάβο. Έτσι, συναρμολογεί 12000 ποδήλατα για να καλύψει τη ζήτηση με ελάχιστο κόστος.

Μπορείτε προαιρετικά να ενεργοποιήσετε τη δυνατότητα αυτή του Excel και να πειραματιστείτε με την επίλυση των παραδειγμάτων και των ασκήσεων.



6. Ζητούμενο για το σύστημα της Flower Oil, είναι η εύρεση του αριθμού λίτρων από κάθε τύπο αργού πετρελαίου που πρέπει να χρησιμοποιείται στην ημερήσια γραμμή παραγωγής των δύο διαφορετικών καυσίμων (*μεταβλητές*), έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το συνολικό κόστος παραγωγής (*στόχος*), σύμφωνα με τις «προδιαγραφές» μείξης και τη ζήτηση (*περιορισμοί*). Για το λόγο αυτό, ορίζουμε να είναι

x_{ij} το πλήθος λίτρων του *i*-τύπου αργού πετρελαίου

που χρησιμοποιείται για την παραγωγή του *j*-καυσίμου

όπου i =1,2 (1 = C100, 2 = C200 } και j =1,2 (1 = regular, 2 = super}. Σημειώστε ότι στο μοντέλο γίνεται η παραδοχή ότι δεν υπάρχουν απώλειες κατά τη διάρκεια της μείξης: το τελικό προϊόν προκύπτει ως άθροισμα των επιμέρους συστατικών του (εδώ, των δύο τύπων αργού πετρελαίου).

Επειδή κάθε λίτρο C100 κοστίζει 0.10 ευρώ, το ημερήσιο κόστος από την αγορά των x_{11}, x_{12} γαλονιών που χρησιμοποιούνται στο μείγμα της απλής και της ενισχυμένης βενζίνης αντίστοιχα, ανέρχεται σε $0.10(x_{11} + x_{12})$ ευρώ. Ομοίως, δαπανώνται ημερησίως, $0.15(x_{21} + x_{22})$ ευρώ για την αγορά αργού πετρελαίου τύπου C200. Οπότε, αν συμβολίσουμε με z το συνολικό ημερήσιο κόστος αγοράς των λίτρων αργού πετρελαίου, στόχος του μοντέλου είναι η εύρεση εκείνων των τιμών x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} οι οποίες επιτυγχάνουν την ελαχιστοποίηση της z δηλαδή:

minimize $z = (0.10x_{11} + 0.10x_{12} + 0.15x_{21} + 0.15x_{22})$

σύμφωνα με τους περιορισμούς που επιβάλλονται από τις προδιαγραφές και τη ζήτηση της βενζίνης. Πράγματι, όρια στις τιμές που μπορούν να πάρουν οι μεταβλητές απόφασης θέτουν, αφενός μεν οι ημερήσιες εξασφαλισμένες πωλήσεις που πρέπει να ικανοποιηθούν:

(*παραγωγή του j καυσίμου*) ≥ (*ζήτηση του j καυσίμου*),

αφετέρου δε οι προδιαγραφές των δύο παραγομένων καυσίμων :

(*ποσοστό του συστατικού Α ανά λίτρο απλής βενζίνης*) ≥ 0.40,

(*ποσοστό του συστατικού Β ανά γαλόνι ενισχυμένης βενζίνης*) ≤ 0.50.

Η συνολική ποσότητα αργού πετρελαίου η οποία χρησιμοποιείται για να δημιουργηθεί το μείγμα που ονομάζεται «regular βενζίνη» ανέρχεται σε ($x_{11} + x_{21}$) λίτρα. Θα πρέπει επομένως να ισχύει

$$x_{11} + x_{21} \geq 800000.$$

Από τα στοιχεία του πίνακα δεδομένων προκύπτει ότι στο ανωτέρω μείγμα, η ποσότητα ίση με ($0.20x_{11} + 0.50x_{21}$) είναι το συστατικό Α. Σύμφωνα με τις προδιαγραφές, η ποσότητα αυτή θα πρέπει να είναι τουλάχιστον το 40% της συνολικής, οπότε

$$(0.20x_{11} + 0.50x_{21}) \geq 0.40(x_{11} + x_{21})$$

$$\Rightarrow -0.20x_{11} + 0.10x_{21} \geq 0.$$

Ομοίως, για το μείγμα που ονομάζεται «βενζίνη super», υπάρχουν αντίστοιχοι περιορισμοί για τη ζήτηση: $x_{12} + x_{22} \geq 500000$ και τις προδιαγραφές του συστατικού Β δηλαδή:

$$(0.60x_{12} + 0.30x_{22}) \leq 0.50(x_{12} + x_{22})$$

$$\Rightarrow 0.10x_{12} - 0.20x_{22} \leq 0.$$

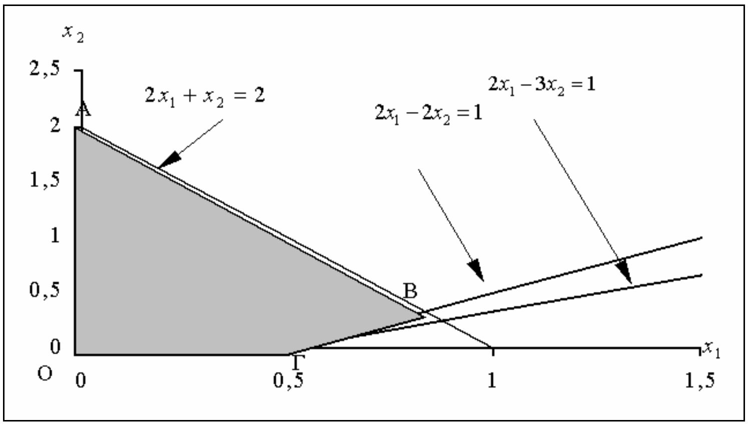
Τέλος, ο αριθμός των λίτρων του όποιου τύπου αργού πετρελαίου χρησιμοποιείται, δε μπορεί να είναι αρνητικός οπότε έχουμε: $x_{ij} \geq 0$.

Σχόλια επί των ασκήσεων 7 έως 9

Οι ασκήσεις αυτές εστιάζονται στη γραφική επίλυση ενός μοντέλου γραμμικού προγραμματισμού με δύο μεταβλητές. Για να λύσουμε γραφικά ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού με δύο μεταβλητές ακολουθούμε τα εξής βήματα:

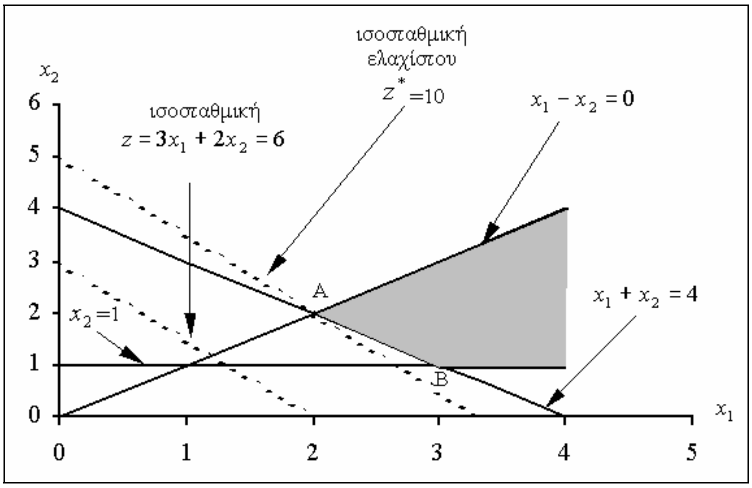
- Θεωρούμε τους ανισοτικούς περιορισμούς του προβλήματος με το σημείο της ισότητας και χαράσσουμε τις περιοριστικές ευθείες που παριστάνουν οι αντίστοιχες εξισώσεις. Θυμίζουμε ότι για να σχεδιάσουμε μια ευθεία χρειαζόμαστε δύο σημεία της. Δύο τέτοια σημεία είναι εκείνα στα οποία η ευθεία τέμνει τους άξονες και τα οποία προσδιορίζονται, αν θέσουμε τη μία μεταβλητή ίση με το μηδέν και λύσουμε την εξίσωση της ευθείας ως προς την άλλη μεταβλητή. Αν η ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, ένα δεύτερο σημείο της βρίσκεται δίνοντας μια αυθαίρετη τιμή στη μία από τις δύο μεταβλητές και βρίσκοντας την τιμή της άλλης μεταβλητής από την εξίσωση της ευθείας.
- Εντοπίζουμε το ημιεπίπεδο στο οποίο ικανοποιείται η κάθε ανίσωση, θεωρώντας τυχόν σημείο του επιπέδου, όπως για παράδειγμα την αρχή των αξόνων, και ελέγχοντας κατά πόσο το σημείο αυτό ικανοποιεί την ανίσωση. Αν ναι, η ανίσωση ισχύει στο ημιεπίπεδο, στο οποίο ανήκει το συγκεκριμένο σημείο. Αν όχι, η ανίσωση ισχύει στο άλλο ημιεπίπεδο.
- Βρίσκουμε την τομή των ημιεπιπέδων, όπου ικανοποιούνται οι ανισοτικοί περιορισμοί. Η τομή των ημιεπιπέδων αυτών αποτελεί το εφικτό σύνολο του προβλήματος. Το εφικτό σύνολο υπάρχει περίπτωση να είναι μία ολόκληρη κυρτή περιοχή, είτε να είναι κενό, είτε ένα σημείο, είτε ένα ευθύγραμμο τμήμα. Αν στο μοντέλο υπάρχουν δύο ή περισσότεροι περιορισμοί ισότητας, τότε το εφικτό σύνολο θα αποτελείται από ένα το πολύ σημείο.
- Μετά τον προσδιορισμό του εφικτού συνόλου τοποθετούμε στο σχήμα ένα μέλος της οικογένειας των ισοσταθμικών ευθειών που εισάγει η αντικειμενική συνάρτηση, δίνοντας αυθαίρετη τιμή στο *z* και χαράσσοντας την αντίστοιχη ευθεία. Η τελευταία τομή της ισοσταθμικής αυτής με το εφικτό σύνολο, καθώς η ισοσταθμική μετακινείται παράλληλα προς τον εαυτό της και προς την κατάλληλη κατεύθυνση ώστε να αυξάνεται ή να ελαττώνεται η τιμή του *z*, ανάλογα με το αν έχουμε ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης ή ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης, παρέχει το σημείο, όπου η αντικειμενική συνάρτηση βελτιστοποιείται.

7(i) Το εφικτό σύνολο του προβλήματος είναι το φραγμένο πολύγωνο ΟΑΒΓ. Οι ισοσταθμικές της αντικειμενικής συνάρτησης είναι παράλληλες προς την ακμή ΑΒ. Κάθε σημείο της ακμής αυτής είναι βέλτιστο και δίνει την ίδια μέγιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, $z^* = 2$. Οι βέλτιστες κορυφές είναι το σημείο Α(0,2) και το σημείο τομής Β(5/6,1/3) των ευθειών $2x_1-2x_2=1$ και $2x_1+x_2=2$.

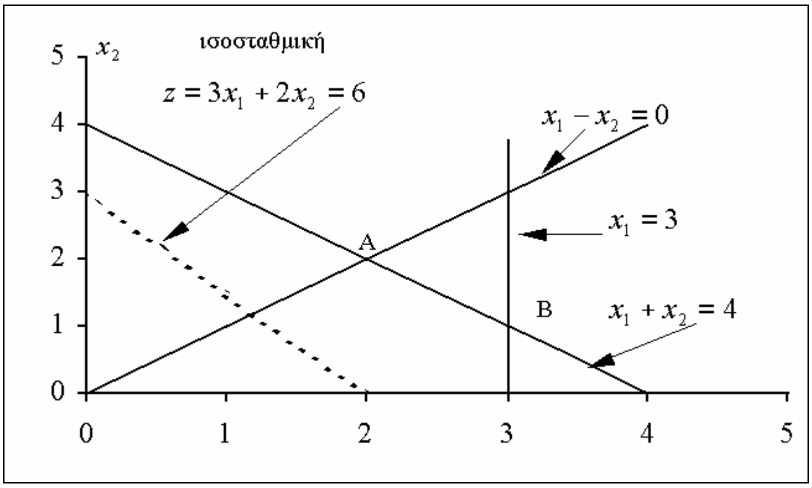


7(ii) Το εφικτό σύνολο του προβλήματος είναι κενό. Οι περιορισμοί του προβλήματος είναι ασυμβίβαστοι, αφού το ημιεπίπεδο στο οποίο ικανοποιείται ο πρώτος από αυτούς (ημιεπίπεδο κάτω από την ευθεία $x_1 + x_2 = 2$), δεν έχει κανένα κοινό σημείο με το ημιεπίπεδο στο οποίο ικανοποιείται ο δεύτερος (ημιεπίπεδο πάνω από την ευθεία $2x_1 + 3x_2 = 12$).

7(iii) Το εφικτό σύνολο του προβλήματος δεν είναι φραγμένο. Οι ισοσταθμικές της αντικειμενικής συνάρτησης είναι παράλληλες προς την ευθεία $3x_1 + 2x_2 = 6$, η οποία προκύπτει θέτοντας $z = 6$ (εστιγμένη ευθεία). Το πρόβλημα έχει μη πεπερασμένο μέγιστο, αφού καθώς η αντικειμενική συνάρτηση κινείται προς τα πάνω και δεξιά, το $z \to \infty$. Το ελάχιστο της αντικειμενικής συνάρτησης αντιστοιχεί στην κορυφή Α(2,2) και είναι ίσο με z^* =10.



7(iv) Το εφικτό σύνολο του προβλήματος είναι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Οι ισοσταθμικές της αντικειμενικής συνάρτησης είναι παράλληλες προς την ευθεία $3x_1 + 2x_2 = 6$, η οποία προκύπτει θέτοντας $z = 6$ (εστιγμένη ευθεία). Το ελάχιστο της αντικειμενικής συνάρτησης αντιστοιχεί στο σημείο Α(2,2) και είναι ίσο με z^* =10. Η αντικειμενική συνάρτηση έχει μέγιστο ίσο με z^* =11 στο σημείο Β(3,1).



8(i). Συμβολίζουμε με x_1 το πλήθος των καστόρινων και με x_2 το πλήθος των ζακέτων από σαμουά που κατασκευάζει το εργαστήριο. Τότε, τα συνολικά κέρδη, τα οποία θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε, ανέρχονται σε $5x_1 + 8x_2$ χρηματικές μονάδες. Οι περιορισμοί του προβλήματος αφορούν το διαθέσιμο χρόνο για κατασκευή, φοδράρισμα και συσκευασία-αποστολή:

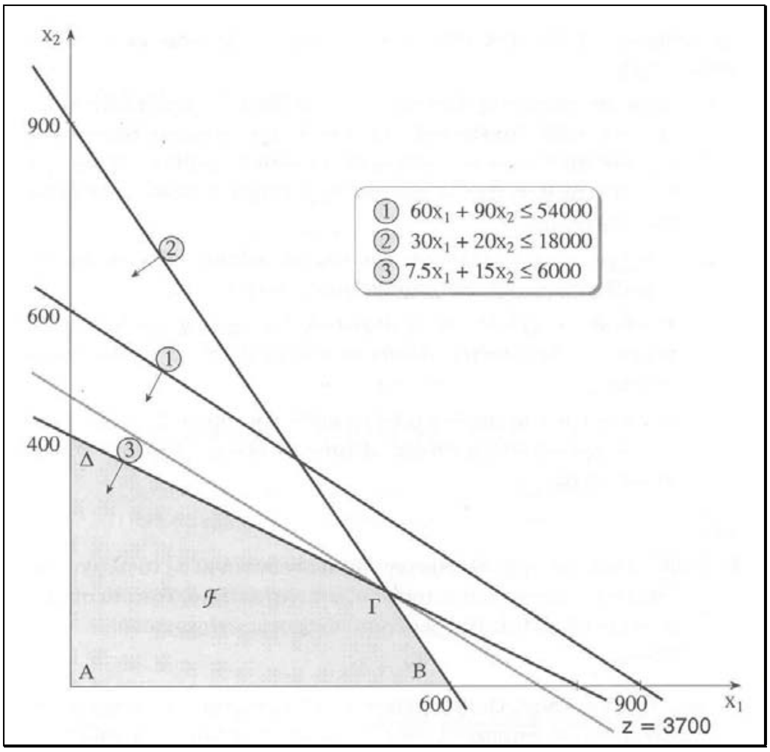
❶ $60x_1 + 90x_2 \leq 54000$ (χρόνος για κατασκευή, λεπτά)

❷ $30x_1 + 20x_2 \leq 18000$ (χρόνος για φοδράρισμα, λεπτά)

❸ $7.5x_1 + 15x_2 \leq 6000$ (χρόνος για συσκευασία-αποστολή, λεπτά)

Είναι ακόμη $x_1, x_2 \geq 0$.

Η εφικτή περιοχή του ανωτέρω μοντέλου γραμμικού προγραμματισμού ορίζεται από το κυρτό πολύγωνο ΑΒΓΔ (σχήμα 6), με κορυφές τις Α(0, 0), Β(600, 0), Γ(500, 150) και Δ(0, 400). Άριστη λύση είναι το σημείο Γ. Η πώληση 500 καστόρινων και 150 ζακέτων από σαμουά εξασφαλίζει στο εργαστήριο τα υψηλότερα κέρδη ύψους 3700 χρηματικών μονάδων.



Σχήμα 6. Η εφικτή περιοχή του μοντέλου γραμμικού προγραμματισμού για την άσκηση αξιολόγησης 8.

8(ii). Για την άριστη λύση ($x_1 = 500$, $x_2 = 150$) οι τρεις περιορισμοί του προβλήματος δίνουν

❶ $60\times500 + 90\times150 = 43500 \quad (\leq 54000)$
❷ $30\times500 + 20\times150 = 18000 \quad (\leq 18000)$
❸ $7.5\times500 + 15\times150 = 6000 \quad (\leq 6000)$

Συνεπώς, ο πρώτος περιορισμός είναι αδρανής και 10500 λεπτά (=175 ώρες) παραμένουν ανεκμετάλλευτα στο τμήμα κατασκευής του εργαστηρίου (τιμή της χαλαρής μεταβλητής). Οι περιορισμοί ❷ και ❸ είναι ενεργοί (δεσμευτικοί) που σημαίνει ότι καταναλώνονται πλήρως οι πόροι "χρόνος κατασκευής" και "χρόνος φοδραρίσματος".

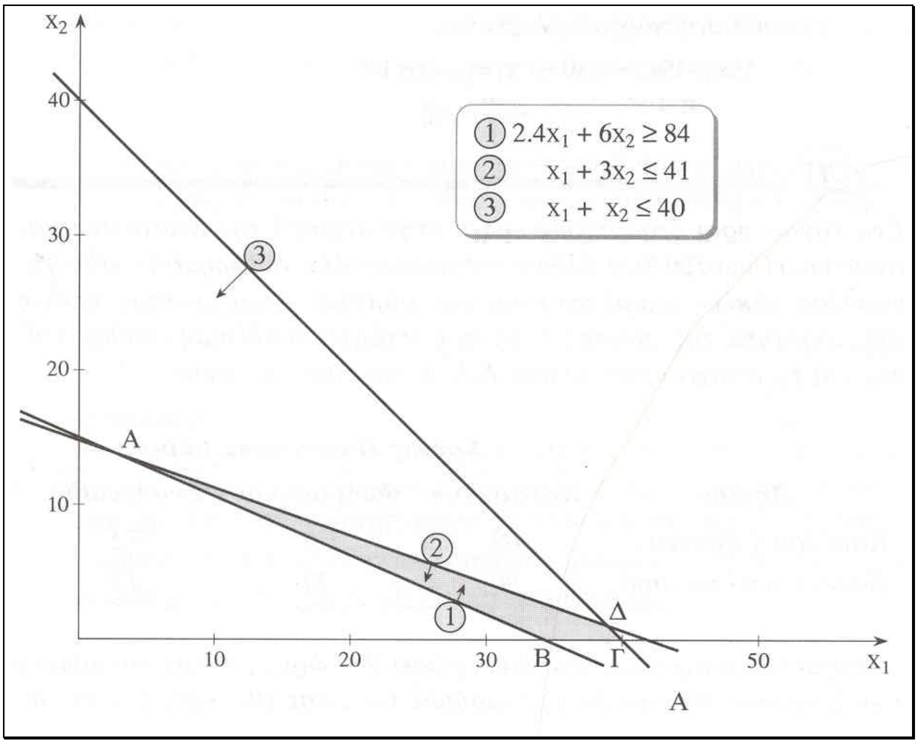
8(iii). Η προσθήκη του περιορισμού «$x_1 + x_2 \geq 750$» στο πρόβλημα, καθιστά την εφικτή περιοχή το κενό σύνολο. Το νέο μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού δεν έχει εφικτές λύσεις (αδύνατο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού). Να το διαπιστώσετε κατασκευάζοντας το σχήμα.

9(i). Ας είναι x_1, x_2 ο αριθμός των φορτηγών τύπου Α και Β που θα αγοραστούν (αντίστοιχα). Τότε, το συνολικό κόστος το οποίο θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε ανέρχεται σε $18x_1 + 45x_2$ (εκατομμύρια) χρηματικές μονάδες. Οι περιορισμοί του προβλήματος αφορούν την απαιτούμενη μεταφορική ικανότητα σε συνδυασμό με το διαθέσιμο αριθμό οδηγών και τις διαθέσιμες εγκαταστάσεις:

❶ $2.4x_1 + 6x_2 \geq 84$ (απαιτούμενη μεταφορική ικανότητα)
❷ $x_1 + 3x_2 \leq 41$ (διαθέσιμος αριθμός οδηγών)
❸ $x_1 + x_2 \leq 40$ (διαθέσιμες εγκαταστάσεις)

Επίσης, $x_1, x_2 \geq 0$.

Η εφικτή περιοχή του ανωτέρω μοντέλου γραμμικού προγραμματισμού ορίζεται από το πολύγωνο ΑΒΓΔ (σχήμα 7), του οποίου οι κορυφές έχουν συντεταγμένες Α(5, 12), Β(35, 0), Γ(40, 0) και Δ(39.5, 0.5).



Σχήμα 7. Η εφικτή περιοχή του μοντέλου γραμμικού προγραμματισμού για την άσκηση αξιολόγησης 9.

Παρατηρούμε, ότι η ευθεία $z = 18x_1 + 45x_2$ είναι παράλληλη της περιοριστικής ευθείας $2.4x_1 + 6x_2 = 84$ του πρώτου περιορισμού κι επομένως έχουμε τις άπειρες λύσεις που ορίζονται από το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Οποιοδήποτε ζευγάρι τιμών (x_1, x_2) που δίνει η σχέση

$$(x_1, x_2) = \lambda_1(5, 12) + \lambda_2(35, 0), \text{ όπου } \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \text{ και } \lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

είναι βέλτιστη λύση του προβλήματος. Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι ίση με 630 (εκατομμύρια) χρηματικές μονάδες.

9(ii).

(a) Για να χρησιμοποιείται μόνο ένας τύπος φορτηγών πρέπει να είναι $x_1 = 0$ ή $x_2 = 0$. Άρα:
$x_1 = 0 \Rightarrow 45x_2 = 630 \Rightarrow x_2 = 14$ (απορρίπτεται, το σημείο (0, 14) δεν ανήκει στην εφικτή περιοχή).
$x_2 = 0 \Rightarrow 18x_1 = 630 \Rightarrow x_1 = 35$ (δεκτή).

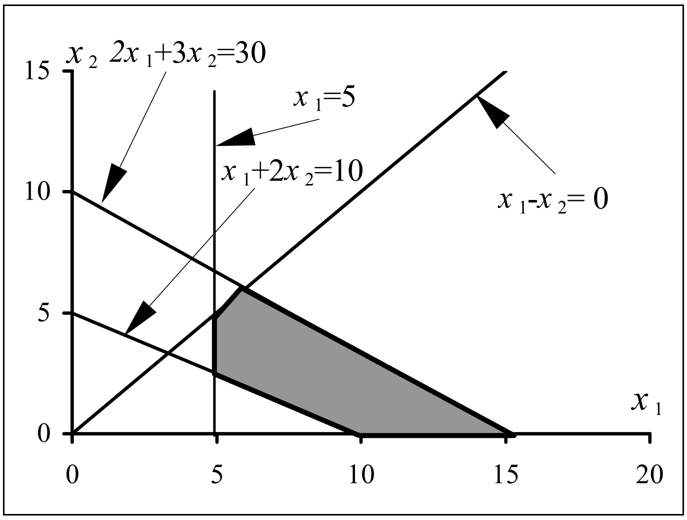
(b) Στην περίπτωση αυτή έχουμε ως αντικειμενική συνάρτηση την minimize $z = x_1 + x_2$. Η βέλτιστη λύση $x_1 = 5$, $x_2 = 12$ εντοπίζεται στο σημείο Α, ενώ η αντίστοιχη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι ίση με 17 (εκατομμύρια) χρηματικές μονάδες.

(c) Τώρα ζητάμε να έχουμε $x_1 = x_2$, οπότε αντικαθιστώντας στην αντικειμενική συνάρτηση θα έχουμε: $18x_1 + 45x_1 = 630 \Rightarrow x_1 = x_2 = 10$ (που είναι σημείο της εφικτής περιοχής).

10. Στην άσκηση αυτή είναι $w_1 = -v_1$, $w_2 = v_2$, $w_3 = v_3$, $w_4 = v_4$.

πρωτεύον πρόβλημα ελαχιστοποίησης $\Longrightarrow$	**πρωτεύον πρόβλημα μεγιστοποίησης**
min $z = 2x_1 + 3x_2$	**max** $-z = -2x_1 - 3x_2$
με τους περιορισμούς	**με τους περιορισμούς**
$w_1 \rightarrow 2x_1 + 3x_2 \leq 30$	$v_1 \rightarrow 2x_1 + 3x_2 \leq 30$
$w_2 \rightarrow x_1 + 2x_2 \geq 10$	$v_2 \rightarrow -x_1 - 2x_2 \leq -10$
$w_3 \rightarrow x_1 - x_2 \geq 0$	$v_3 \rightarrow -x_1 + x_2 \leq 0$
$w_4 \rightarrow x_1 \geq 5$	$v_4 \rightarrow -x_1 \leq -5$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
$\Downarrow$	$\Downarrow$
δυϊκό πρωτεύοντος προβλήματος ελαχιστοποίησης $\Longleftarrow$	**δυϊκό πρωτεύοντος προβλήματος μεγιστοποίησης**
max $y = 30w_1 + 10w_2 + + 5w_4$	**min** $-y = 30v_1 - 10v_2 - 5v_4$
με τους περιορισμούς	**με τους περιορισμούς**
$2w_1 + w_2 + w_3 + w_4 \leq 2$	$2v_1 - v_2 - v_3 - v_4 \geq -2$
$3w_1 + 2w_2 - w_3 \leq 3$	$3v_1 - 2v_2 + v_3 \geq -3$
$w_1 \leq 0, w_2 \geq 0, w_3 \geq 0, w_4 \geq 0$	$v_1 \geq 0, v_2 \geq 0, v_3 \geq 0, v_4 \geq 0$

(i) Η γραφική επίλυση του πρωτεύοντος, που φαίνεται στο επόμενο σχήμα, δείχνει ότι η βέλτιστη λύση του προβλήματος αυτού είναι το σημείο $x_1^* = 5$, $x_2^* = 5/2$ που βρίσκεται στην τομή των ευθειών $x_1 = 5$ και $x_1 + 2x_2 = 10$. Η ελάχιστη τιμή του z είναι $z^* = 2\times5 + 3\times5/2 = 35/2$.



(ii) Στη βέλτιστη λύση, ο πρώτος και ο τρίτος περιορισμός του πρωτεύοντος προβλήματος είναι αδρανείς. Έτσι, σύμφωνα με τις συμπληρωματικές συνθήκες χαλαρότητας, στη βέλτιστη λύση του δυϊκού πρέπει να έχουμε $w_1^* = 0$ και $w_3^* = 0$. Επιπλέον, αφού $x_1^* > 0$ και $x_2^* > 0$, στη βέλτιστη λύση του δυϊκού πρέπει και οι δύο περιορισμοί του προβλήματος αυτού να είναι ενεργοί. Επομένως, θα πρέπει να ισχύει $w_2^* + w_4^* = 2$ και $2\,w_2^* = 3$. Έτσι, $w_2^* = 3/2 > 0$ και $w_4^* = 1/2 > 0$. Παρατηρούμε ότι οι τιμές $w_1^* = 0$, $w_2^* = 3/2$, $w_3^* = 0$, $w_4^* = 1/2$ είναι εφικτές για το δυϊκό πρόβλημα. Επιπλέον, για τις τιμές αυτές είναι y^* $= 30\times0 + 10\times3/2 + 0\times0 + 5\times1/2 = 35/2 = z^*$. Άρα, οι τιμές αυτές είναι βέλτιστες για το δυϊκό πρόβλημα.

11(i). Έστω x_1, x_2, x_3 και x_4, αντίστοιχα, οι παραγόμενες ποσότητες από τα προϊόντα P_1, P_2, P_3 και P_4. Το ζητούμενο μαθηματικό μοντέλο αποτελεί το πρωτεύον πρόβλημα:

πρωτεύον πρόβλημα

max		$z = 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 6x_4$
με τους	$w_1 \rightarrow$	$2x_1 + x_3 + x_4 \leq 8$
περιορισμούς	$w_2 \rightarrow$	$2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 12$
		$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0$

11(ii). Το δυϊκό πρόβλημα είναι:

δυϊκό πρόβλημα

min	$y = 8w_1 + 12w_2$
	$2w_1 + 2w_2 \geq 2$
με τους	$2w_2 \geq 1$
περιορισμούς	$w_1 + w_2 \geq 5$
	$w_1 + 2w_2 \geq 6$
	$w_1 \geq 0,\ w_2 \geq 0$

12(i). Έστω x_1, x_2, x_3 και x_4, αντίστοιχα, οι ποσότητες (σε γραμμάρια) των τροφών T_1, T_2, T_3 καιT_4, τις οποίες περιλαμβάνει η δίαιτα. Το ζητούμενο μαθηματικό μοντέλο είναι το ακόλουθο:

πρωτεύον πρόβλημα

$$
\begin{array}{lrl}
\textbf{min} & & z = 8x_1 + 8x_2 + 16x_3 + 7x_4 \\
 & w_1 \rightarrow & x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 \geq 32 \\
\textbf{υπό τους} & w_2 \rightarrow & 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 3x_4 \geq 28 \\
\textbf{περιορισμούς} & w_3 \rightarrow & 7x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 5x_4 \geq 35 \\
 & & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0
\end{array}
$$

12(ii). Για να είναι η βιομηχανία ανταγωνιστική θα πρέπει οι μονάδες βιταμινών που περιέχονται στο ένα γραμμάριο της κάθε τροφής να μην κοστίζουν σε χάπια περισσότερο από ό,τι κοστίζει το ένα γραμμάριο τροφής στην αγορά. Από την άλλη βέβαια πλευρά, είναι φυσικό η φαρμακοβιομηχανία να θέλει να μεγιστοποιήσει το κέρδος της. Αν, λοιπόν, w_1, w_2 και w_3 είναι, αντίστοιχα, η τιμή μονάδας σε χάπια για τις βιταμίνες B_1, B_2 και B_3, το μαθηματικό μοντέλο που περιγράφει το πρόβλημα της φαρμακοβιομηχανίας είναι το ακόλουθο:

δυϊκό πρόβλημα

$$
\begin{array}{ll}
\textbf{max} & y = 32w_1 + 28w_2 + 35w_3 \\
 & w_1 + 2w_2 + 7w_3 \leq 8 \\
\textbf{με τους} & 3w_1 + 2w_2 + 4w_3 \leq 8 \\
\textbf{περιορισμούς} & 3w_1 + 8w_2 + 6w_3 \leq 16 \\
 & 2w_1 + 3w_2 + 5w_3 \leq 7 \\
 & w_1 \geq 0,\ w_2 \geq 0,\ w_3 \geq 0
\end{array}
$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνική

Βασιλείου, Π.-Χ. Γ., Γ. Τσακλίδης και Ν.Δ. Τσάντας (2001), *Ασκήσεις στην Επιχειρησιακή Έρευνα,* τόμος 1, εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.

Μπότσαρης, Χ. (2002), *Επιχειρησιακή Έρευνα,* τόμος Ι, Εκδόσεις Ελληνικά Γράμματα, Αθήνα.

Οικονόμου, Γ. και Γεωργίου Α. (1999), *Ποσοτική Ανάλυση για τη Λήψη Διοικητικών Αποφάσεων,* τόμος Α', Εκδόσεις Μπένου, Αθήνα.

Υψηλάντης, Π. (1998). *Επιχειρησιακή Έρευνα – Λήψη Επιχειρηματικών Αποφάσεων*, 2η έκδοση, Εκδόσεις ΙΩΝ, Αθήνα.

Αγγλική

Anderson, D.R., Sweeny, D.J., & Williams, T.A. (2003), *An Introduction to Management Science: Quantitative Approaches to Decision Making*, 10th ed, South-Western College Publishing.

Bazaraa, M., Jarvis, J. & Sherali, H. (1990), *Linear Programming and Network Flows*, 2nd ed, Wiley, New York.

Bradley, S., Hax, A. & Magnanti, T. (1977), *Applied Mathematical Programming*, Addison-Wesley, Reading, MA.

Chvátal, V. (1983), *Linear Programming*, Freeman, New York.

Dantzig, G. (1963), *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, Princeton, NJ.

Dantzig, G.B. (1951), 'Maximization of a linear function of variables subject to linear inequalities', in T.P. Koopmans (ed.), *Activity Analysis of Production and Allocation*, Cowles Commisson Monograph 13, Wiley, New York.

Dennis, J.B. (1959), *Mathematical Programming and Electrical Networks*, Wiley, New York.

Gale, D. H., Kuhn, H. W. & Tucker, A. W. (1951), 'Linear programming and the theory of games', in T.P. Koopmans (ed.), *Activity Analysis of Production and Allocation*, Wiley, New York, pp. 317-329.

Hillier, F. & Lieberman, G. (2001), *Introduction to Operations Research*, 7th ed, McGraw-Hill, New York.

Kantorovich, L. (1960), 'Mathematical methods in the organization and planning of production', *Management Science* **6**, 550-559. Μετάφραση από τη Ρωσική της αρχικής έκδοσης του 1939.

Koopmans, T. P. ed. (1951), *Activity Analysis of Production and Allocation*, Wiley, New York.

Leontief, W. W. (1951), *The Structure of the American Economy, 1919-1939*, 2nd ed, Oxford, New York.

Moore, J.H., Weatherford, L.R., Eppen G.D., Gould, F.J., & Schmidt, C.P. (2001), *Decision Modeling with Microsoft Excel*, 6th ed, Prentice Hall.

Nash, S. & Sofer, A. (1996), *Linear and Nonlinear Programming*, McGraw-Hill, New York.

Ragsdale C.T. (2004). *Spreadsheet Modeling and Decision Analysis*, 4th ed. South-Western College Publishing.

Saigal, R. (1995), *Linear Programming*, Kluwer Academic Publishers, Boston.

Strum, J. E. (1972), *Introduction to Linear Programming*, Holden-Day, New York.

Taylor, B.W. III (2004), *Introduction to Management Science*, 8th ed., Prentice Hall.

von Neumann, J. (1928), 'Zur theorie der gesellshaftspiele, *Mathematische Annalen* **100**, 295-320.

von Neumann, J. (1935-1936), 'Über ein ökonomisches gleichungssystem und eine verallgemeinerung des brouwerschen fixpunktsatzes', *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums* **8**, 73-83.

Winston, L.W. (2003), *Operations Research, Applications and Algorithms*, 4th ed, Duxbury Press.