. ΒΕΛΤΙΣΤΟ ΜΕΓΕΘΟΣ & ΣΗΜΕΙΟ ΠΑΡΑΓΓΕΛΙΑΣ

Η μακριά συνεργασία των αντιπροσώπων υπαίθρου με την εταιρεία C&R έχει οδηγήσει τη συνεργασία τους να διέπεται από **κανόνες αμοιβαίας εμπιστοσύνης**. Οι δε αντιπρόσωποι γνωρίζουν πλέον την ετήσια ζήτηση και εμπειρικά υπολογίζουν και κάνουν τις παραγγελίες τους στην εταιρεία C&R. Ανέκαθεν όμως στην Κύπρο τους καλοκαιρινούς μήνες παρουσιάζεται το φαινόμενο ο τουρισμός πολλών πόλεων να πολλαπλασιάζεται σε μεγάλο βαθμό λόγω της άφιξης των τουριστών. Η κινητικότητα του τουριστικού ρεύματος οδηγεί τον υπολογισμό του βέλτιστου μεγέθους μιας παραγγελίας καθώς και τον υπολογισμό της συχνότητας με την οποία γίνονται οι παραγγελίες μια πολύ δύσκολη υπόθεση. Η εταιρεία C&R επιθυμεί να βοηθήσει τους αντιπροσώπους υπαίθρου με τους οποίους συνεργάζεται να επιλύσουν με επιστημονικό τρόπο το πρόβλημα του βέλτιστου μεγέθους κάθε παραγγελίας καθώς και του βέλτιστου σημείου μιας παραγγελίας.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

Οικονομική Ποσότητα της Παραγγελίας όταν η Ζήτηση είναι Γνωστή.

Σε ένα εξελισσόμενο σύστημα ελέγχου παραγγελίας υπάρχουν δύο σημαντικές επιχειρηματικές αποφάσεις:

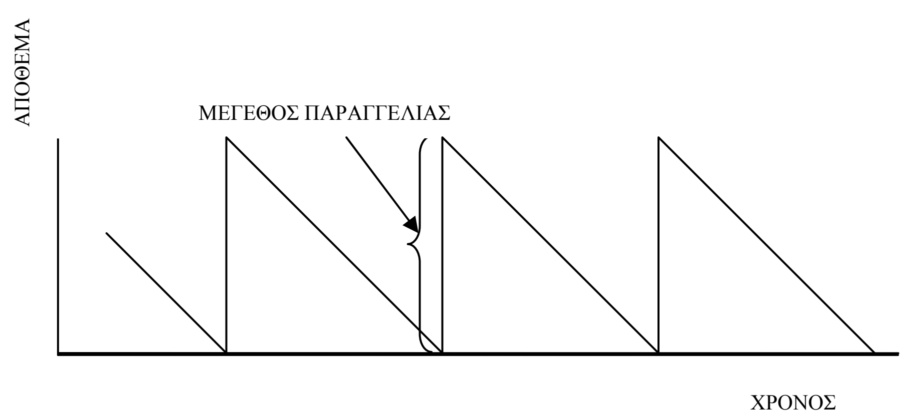
Πότε θα γίνει μια παραγγελία.

Πρέπει να βρούμε το βέλτιστο σημείο παραγγελίας (optimum order point), έτσι ώστε όταν το απόθεμα πέσει κάτω από το σημείο αυτό να γίνει μια συμπληρωματική παραγγελία. Πρέπει να υποθέσουμε ότι το σημείο παραγγελίας υπολογίζεται από τις μονάδες αποθέματος παρά σύμφωνα με τον ημερολογιακό χρόνο (calendar time).

Το μέγεθος της παραγγελίας.

Πρέπει να βρούμε τη βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας (optimum order quantity).

Εδώ θα υποθέσουμε αρχικά ότι η μελλοντική ζήτηση για ένα προϊόν είναι γνωστή και σταθερή, και αργότερα θα επιτρέψουμε η ζήτηση να είναι αβέβαιη.



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 2.

Υπάρχουν δύο γενικές μορφές κόστους που πρέπει να ληφθούν υπόψη όταν η ζήτηση είναι γνωστή και σταθερή:

1) το κόστος για να γίνει μια παραγγελία, και

2) το κόστος αποθήκευσης του αποθέματος.

Το βέλτιστο μέγεθος παραγγελίας (optimum order size) και το βέλτιστο σημείο παραγγελίας (optimum order point) θα είναι εν γένει μια συνάρτηση που θα εξαρτάται από τα δύο αυτά κόστη καθώς και από τον ρυθμό που ακολουθεί η ζήτηση στη μονάδα του χρόνου. Επιπλέον κάνουμε προς το παρόν τις μη ρεαλιστικές υποθέσεις ότι και ο χρόνος αναμονής από τη στιγμή που γίνεται μια παραγγελία μέχρι αυτή να μας παραδοθεί και η ζητούμενη ποσότητα D είναι γνωστά και σταθερά. Με αυτές τις υποθέσεις ο υπολογισμός του σημείου παραγγελίας δεν είναι περίπλοκος. Το διάγραμμα 2 επεξηγεί την συμπεριφορά αποθέματος του συστήματος μας κάτω από τις υποθέσεις της γνωστής και σταθερής ζήτησης D και του γνωστού και σταθερού χρόνου αναμονής (lead time).

Το βέλτιστο μέγεθος παραγγελίας καθορίζεται από την ανάλυση του ολικού κόστους. Το ολικό κόστος (Total Cost = T.C.). για μια περίοδο θα είναι ίσο με το άθροισμα του κόστους παραγγελίας συν το κόστος διακράτησης του αποθέματος κατά τη διάρκεια μιας περιόδου. Υποθέτουμε ότι οι μονάδες θα παραλειφθούν με τη μία, δηλαδή ότι ο χρόνος αναμονής (lead time) είναι μηδέν.

Θέτουμε:

K = κόστος για να γίνει μια επιπλέον παραγγελία

k_c = ετήσιο κόστος αποθήκευσης μιας μονάδας προϊόντος

D = συνολική ετήσια ζήτηση σε μονάδες (περίοδος= 1 έτος)

Q = βέλτιστο μέγεθος παραγγελίας σε μονάδες (άγνωστη ποσότητα)

Σημείωση: προφανώς ο ετήσιος αριθμός παραγγελιών που θα γίνουν, εξαρτάται από το D και το Qκαι ισχύει: $\frac{D}{Q}$ = ετήσιος αριθμός παραγγελιών.

Επίσης:

$\frac{Q}{2}$ = μέσο απόθεμα (υποθέτοντας η ζήτηση είναι γραμμική) συνεπώς:

$\frac{Q}{2}k_c$ = ετήσιο κόστος διακράτησης αποθέματος

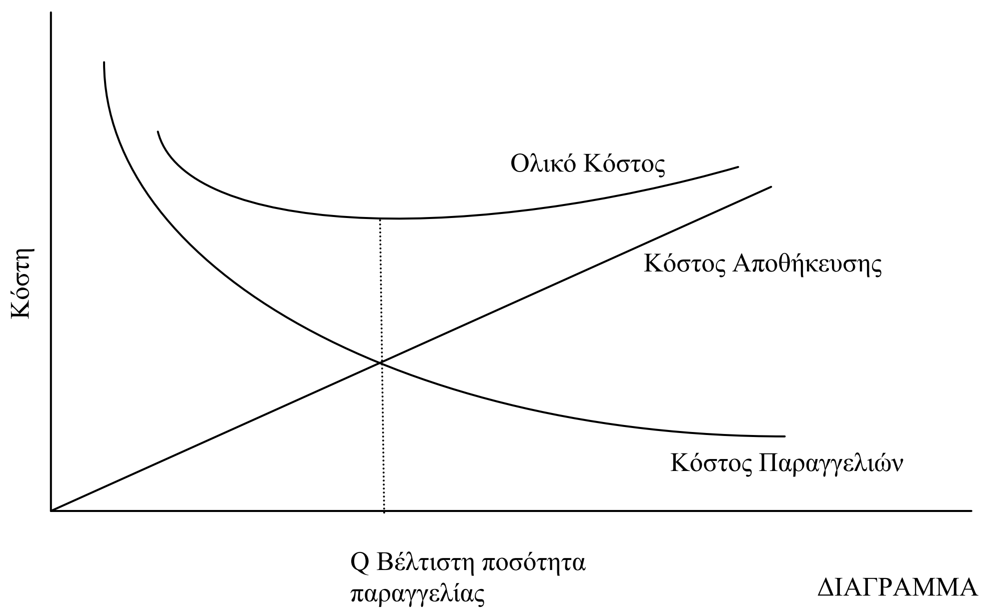
(μέσο απόθεμα $\frac{Q}{2}$) × (k_c ετήσιο κόστος για την αποθήκευση μιας μονάδα προϊόντος)

$\frac{D}{Q}K$ = ετήσιο κόστος για να γίνουν οι παραγγελίες

(ετήσιος αριθμός παραγγελιών $\frac{D}{Q}$) × (το κόστος για να γίνει μια παραγγελία K)

Το συνολικό ετήσιο κόστος είναι:

$$TC = \frac{Q}{2}k_c + \frac{D}{Q}K \qquad (4.1)$$



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 3.

Τα ανωτέρω κόστη σχεδιάστηκαν σαν μια συνάρτηση του μεγέθους παραγγελίας στο διάγραμμα 3. Το ελάχιστο συνολικό κόστος στο διάγραμμα 3 παρουσιάζεται εκεί όπου οι κλίσεις των δύο συνιστωσών του κόστους (παραγγελίας και μεταφοράς) είναι ίσες σε μέτρο και αντίθετες σε πρόσημο. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, αυτό συμβαίνει όταν οι δύο συνιστώσες κόστους είναι ίσες (όταν οι καμπύλες τέμνονται). Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτό το γεγονός για να βρούμε ένα τύπο για τη βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας Q (optimal order quantity), θέτοντας τα δύο κόστη ίσα και λύνοντας ως προς Q.

Για το βέλτιστο: $$\frac{Q}{2}k_c = \frac{D}{Q}K$$

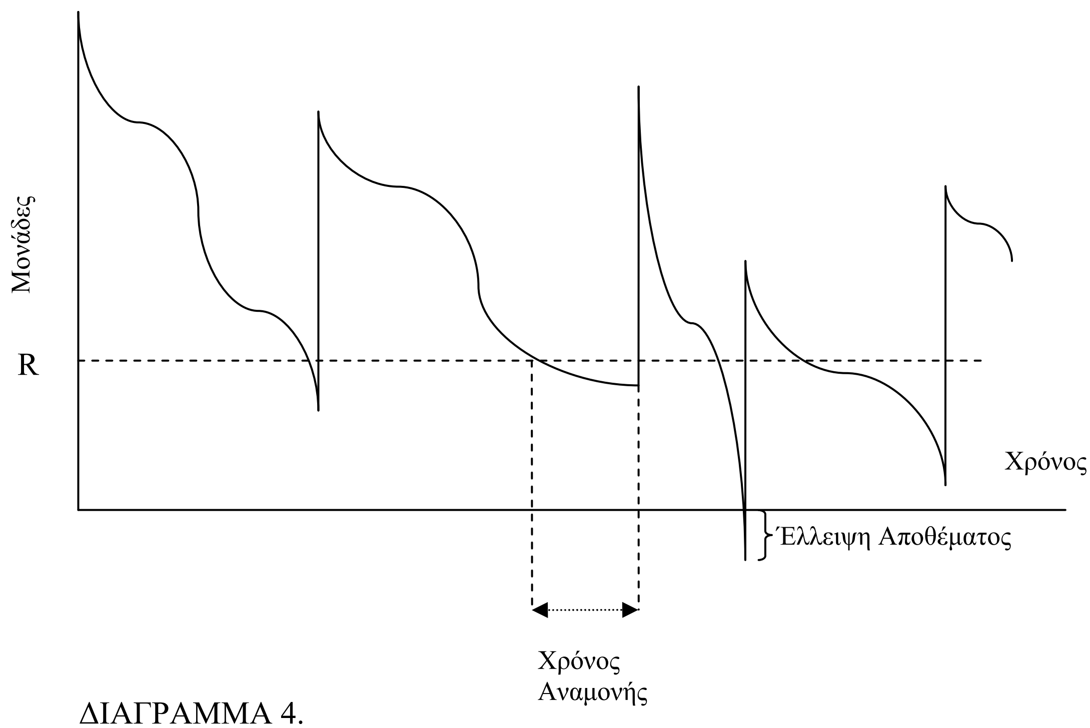
ή $$Q^2 = \frac{2KD}{k_c}$$

έτσι ώστε $$Q = \sqrt{\frac{2KD}{k_c}} \qquad (4.2)$$

Έλεγχος Αποθέματος με Επανάληψη Παραγγελιών και Αβέβαιη Ζήτηση

Εδώ επεκτείνουμε την επεξεργασίας για τον έλεγχο του αποθέματος επιτρέποντας την αβεβαιότητα στη ζήτηση.

Αντί να υποθέσουμε ότι η ζητούμενη ποσότητα είναι γνωστή και σταθερή, ας υποθέσουμε ότι γνωρίζουμε μόνο την κατανομή της πιθανότητας της ζήτησης κατά τη διάρκεια του χρόνου αναμονής, αλλά όχι την ακριβή ζήτηση κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου. Όταν θέσουμε το σημείο παραγγελίας R, υπάρχει πάντα κάποια πιθανότητα να εξαντληθεί το απόθεμα και επομένως να αντιμετωπίσουμε κόστος από την έλλειψη αποθέματος. Υποθέτουμε ότι οποιεσδήποτε μονάδες προϊόντος που περίσσεψαν από μια περίοδο χρήσης μπορούν να χρησιμοποιηθούν την επόμενη περίοδο (ρεαλιστική υπόθεση).



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.

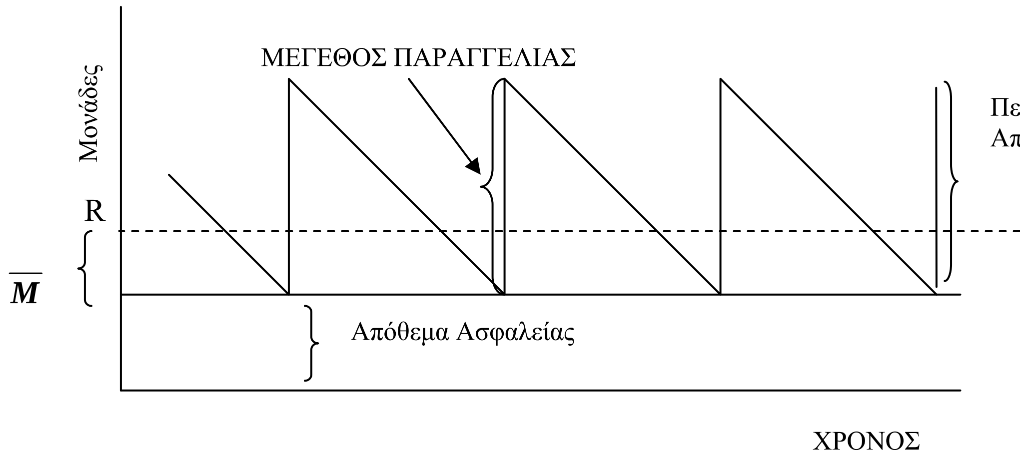
Το διάγραμμα 4 επεξηγεί τη συμπεριφορά του αποθέματος κάτω από τη νέα υπόθεση. Σημειωτέον ότι γίνεται μια παραγγελία μεγέθους Q όταν το απόθεμα φτάνει το επίπεδο R. Λόγω της αβέβαιης ζήτησης κατά τη διάρκεια του χρόνου αναμονής, μερικές φορές παρουσιάζεται το φαινόμενο της εξάντλησης αποθέματος (stock out) (όπως κατά τη διάρκειας της τρίτης περιόδου στο διάγραμμα 4). Το ετήσιο αναμενόμενο κόστος εξαντλήσεως αποθεμάτων θα επηρεαστεί από την επιλογή του σημείου παραγγελίας (R) καθώς και από το μέγεθός της παραγγελίας (Q).

Πριν προχωρήσουμε στην ανάλυση, είναι σημαντικό να δώσουμε έμφαση στο ότι τα μοντέλα αυτού του τμήματος είναι κατάλληλα μόνο όταν η ζήτηση, η οποία φαίνεται στο διάγραμμα 4, έρχεται από ένα λογικό μεγάλο αριθμό από **ανεξάρτητες** πηγές. Αυτή είναι γενικά μια ρεαλιστική υπόθεση για καταναλωτικά προϊόντα π.χ. τηλεοράσεις, αυτοκίνητα κ.τ.λ. πόσο μάλλον για προϊόντα της εταιρείας μας που είναι νερό, αναψυκτικά και ποτά. Δεν θα ήταν ρεαλιστική υπόθεση π.χ. για εξοπλισμούς, όπου αυτός που παραγγέλνει ο πελάτης είναι ένα κράτος). Ακόμη η υπόθεση δεν επηρεάζεται όταν πρόκειται για πρώτες ύλες, ή ανταλλακτικά, ή τμήματα σε μια κατασκευή. Στην τελευταία περίπτωση, για παράδειγμα, διάφορα τμήματα από ηλεκτρικές μηχανές μπορούν να αγοραστούν για την συναρμολόγηση κλιματιστικών. Εφόσον η "ζήτηση" για τις μηχανές είναι τελείως εξαρτημένη στο σχέδιο συναρμολόγησης για τα κλιματιστικά, αυτή η ζήτηση θεωρείται περισσότερο **εξαρτημένη** παρά ανεξάρτητη. Για καταστάσεις εξαρτημένης ζήτησης, έχει αναπτυχθεί μια τεχνική προγραμματισμένου σχεδίου η οποία καλείται **σχέδιο απαιτούμενων υλικών MRP (Manufacturing Resources Planning).** Τα μοντέλα που παρουσιάζονται σ' αυτό το κεφάλαιο, πρέπει να χρησιμοποιηθούν μόνο σε περίπτωση που υπάρχει ανεξάρτητη ζήτηση.

Τώρα θέλουμε να χωρίσουμε το απόθεμα σε 2 τύπους: στο περιοδικό απόθεμα και στο απόθεμα ασφαλείας

α) Το **περιοδικό απόθεμα** (cycle stock) είναι το απόθεμα το οποίο λήφθηκε υπόψη στην προηγούμενη παράγραφο: $\frac{Q}{2}$ κατά μέσο όρο. Είναι το απόθεμα που διατηρείται κατά μέσο όρο στις αποθήκες και εξαρτάται από το μέγεθος παραγγελίας (Q).

β) Το **απόθεμα ασφαλείας** (safety stock) αναφέρεται στην διαφορά που υπάρχει ανάμεσα στο σημείο παραγγελίας (R) και στη μέση ζήτηση κατά τη διάρκεια του συμπληρωματικού χρόνου αναμονής ($\overline{M}$) (βλέπε διάγραμμα 5). Όσο μεγαλύτερο είναι το απόθεμα ασφαλείας (και το σημείο παραγγελίας αντίστοιχα), τόσο χαμηλότερος είναι ο κίνδυνος να παρουσιαστεί έλλειψη αποθέματος (stock out) και αντιστρόφως.



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 5

Είναι ενδιαφέρον να κοιτάξει κανείς την αλληλεπίδραση μεταξύ των διάφορων τύπων του κόστους και τις δύο μεταβλητές (σημείο παραγγελίας και μέγεθος παραγγελίας) οι οποίες παρουσιάζονται στον πίνακα 5.2.1.

Μια αλλαγή στο μέγεθος της παραγγελίας επηρεάζει τη συχνότητα προσέγγισης του σημείου παραγγελίας (έτσι, αλλάζει η συχνότητα αντιμετώπισης μιας διακινδυνευμένης έλλειψης προϊόντων). Μια αλλαγή στο σημείο παραγγελίας επηρεάζει την πιθανότητα ελλείψεως προϊόντων προς πώληση και επηρεάζει τον αριθμό των περιπτώσεων που φτάνουμε στο σημείο παραγγελίας. Έτσι, το συνολικό κόστος επηρεάζεται και από το σημείο παραγγελίας καθώς και από το βέλτιστο μέγεθος παραγγελίας, τα οποία συσχετίζονται.

ΠΙΝΑΚΑΣ 5.2.1.

ΕΝΕΡΓΕΙΑ	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ
Μείωση σημείου παραγγελίας	Μείωση κόστους διακράτησης του αποθέματος ασφαλείας και αύξηση του κόστους έλλειψης
Μείωση μεγέθους παραγγελίας	Μείωση κόστους διακράτησης του περιοδικού αποθέματος (Q/2) και αύξηση του κόστους έλλειψης και του κόστους των παραγγελιών
Αύξηση σημείου παραγγελίας	Αύξηση κόστους διακράτησης του αποθέματος ασφαλείας και μείωση του κόστους έλλειψης
Αύξηση μεγέθους παραγγελίας	Αύξηση κόστους διακράτησης του περιοδικού αποθέματος (Q/2) και μείωση του κόστους έλλειψης και του κόστους των παραγγελιών

Προκειμένου να μοντελοποιήσουμε την κατάσταση αυτή πρέπει να αποφασίσουμε πως θα εκτιμήσουμε τα ελλείμματα. Η πρώτη μας προσέγγιση είναι να υποθέσουμε ότι μπορούμε να υπολογίσουμε το κόστος εξαντλήσεως του αποθέματος κατά μια μονάδα (το κόστος έλλειψης μιας μονάδας προϊόντος). Όταν ο υπολογισμός αυτού του είδους κόστους είναι δύσκολος και απαιτεί διευθυντική εκτίμηση και κρίση, συχνά η διοίκηση μιας εταιρείας είναι διατεθειμένη να θέσει μια τιμή φράγμα σ’ αυτό το κόστος, όπως “είναι κάτω από $20” ή “είναι σίγουρα κάτω από $5”. Επιπλέον, όταν υπολογιστεί ένα τέτοιο κόστος, κάθε προϊόν θα έχει μια συνεχή επεξεργασία. Αναγνωρίζοντας την ενδεχόμενη δυσκολία αυτής της προσέγγισης, στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε ένα εναλλακτικό μοντέλο, το οποίο επιτρέπει στη διοίκηση να καθορίσει το ποσοστό της ετήσιας ζήτησης που ικανοποιείται από το απόθεμα.

Μοντέλο Κόστους Εξάντλησης Αποθέματος

Και πάλι εδώ θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε το συνολικό κόστος το οποίο δημιουργήθηκε κατά τη διάρκεια μιας δεδομένης περιόδου. Τώρα έχουμε 3 κόστη τα οποία πρέπει να ληφθούν υπόψη:

$K =$ κόστος για να γίνει μια παραγγελία

$k_c =$ ετήσιο κόστος διακράτησης μιας μονάδας αποθέματος

$k_u =$ κόστος εξαντλήσεως αποθέματος κατά μια μονάδα (κόστος έλλειψης)

Το βέλτιστο μέγεθος παραγγελίας και το βέλτιστο σημείο παραγγελίας σε γενικές γραμμές, θα είναι μια συνάρτηση αυτών των τριών κοστών συν τη μέση ζήτηση κατά τη διάρκεια της αναμονής και τη μεταβλητότητα της ζήτησης πέραν του χρόνου αναμονής.

Οι Υποθέσεις:

Πρέπει πρώτα να υποθέσουμε ότι ο χρόνος αναμονής είναι γνωστός και σταθερός. Δεύτερο, το κόστος έλλειψης είναι ένα υποθετικό κόστος ανά μονάδα, ανεξαρτήτως από τη θέση της διάρκειας εκτός αποθέματος. Η Τρίτη υπόθεση είναι ότι το Μ δηλαδή η ζήτηση κατά τη διάρκεια του χρόνου αναμονής, ακολουθεί τη κανονική κατανομή. Αυτό είναι η λιγότερο σημαντική υπόθεση και μπορεί να αλλάξει, έχει δε επιλεχθεί για να απλοποιήσει τον υπολογισμό. Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι το βέλτιστο σημείο παραγγελίας R είναι μεγαλύτερο από τη μέση ζήτηση $\overline{M}$ κατά το χρόνο αναμονής, έτσι ώστε το αντίστοιχο απόθεμα ασφαλείας $\left(R-\overline{M}\right)$ είναι θετικό. Τελικά, υποθέτουμε ότι το απόθεμα ασφαλείας, παραμένει, πάντα σαν απόθεμα. Θέλουμε να καθορίσουμε πόσο πρέπει να παραγγείλουμε (Q) και πότε να παραγγείλουμε (R).

ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΜΑΣ

Θέτουμε:

R= σημείο παραγγελίας (ο ολικός αριθμός μονάδων που κατέχω και που έχω ήδη παραγγείλει, που πυροδοτεί μια νέα παραγγελία).

Q= ποσότητα παραγγελίας (ο αριθμός των μονάδων που παραγγέλλονται σε κάθε παραγγελία).

D= μέση ετήσια ζήτηση.

K= κόστος μιας παραγγελίας.

k_c = ετήσιο κόστος διακράτησης μιας μονάδας αποθέματος.

k_u = κόστος εξαντλήσεως του αποθέματος κατά μία μονάδα (κόστος έλλειψης).

M= ζήτηση κατά τη διάρκεια του χρόνου αναμονής (τυχαία μεταβλητή)

$\overline{M}$ = μέση τιμή της ζήτησης κατά τη διάρκεια του χρόνου αναμονής.

σ_{M} = τυπική απόκλιση της ζήτησης κατά τη διάρκεια του χρόνου αναμονής.

Θέλουμε να καθορίσουμε τη βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας (Q) και το βέλτιστο σημείο παραγγελίας (R). Θα υποθέσουμε, σαν μια λογική προσέγγιση, ότι η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας αυτής της κατάστασης (τυχαίας ζήτησης) είναι η ίδια με την οικονομική ποσότητα παραγγελίας (EOQ) για την περίπτωση σταθερής ζήτησης. Άρα θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο:

$$Q = \sqrt{\frac{2KD}{k_c}} .$$

Αυτή η υπόθεση έγινε για δύο λόγους. Πρώτον, όπως φαίνεται πιο πάνω, το άθροισμα των ετήσιων κοστών της διαδικασίας παραγγελίας συν το ετήσιο κόστος αποθήκευσης, δεν είναι τόσο ευπαθή για μέτρια λάθη του Q, δηλαδή όταν η ποσότητα παραγγελίας είναι λογικά κοντά στη βέλτιστη τιμή, δεν απαιτείται απόλυτη ακρίβεια. Δεύτερο, έχει αποδειχθεί ότι, παρόλο που το Q και το R θεωρητικά έπρεπε να υπολογίζονται ταυτόχρονα, στην πράξη, δεν υπάρχει κανένα σοβαρό πρόβλημα για το κόστος αν το Q υπολογιστεί ανεξάρτητα από τον τύπο EOQ της εξίσωσης 4.2. Έτσι θα συμφωνήσουμε με την εξίσωση 4.2 ως βασικό τύπο για το Q, ακόμα και αν η ζήτηση είναι στοχαστική.

Αφού επιλεγεί το Q, είναι σημαντικό να το λάβουμε υπόψη μας για τον υπολογισμό του R, αφού το μέγεθος του Q επηρεάζει άμεσα τον αριθμό των περιπτώσεων ανά χρόνο, που θα βρεθούμε εκτεθειμένοι σε μια πιθανή έλλειψη αποθέματος.

Βέλτιστο σημείο παραγγελίας-Προσεγγιστικά

Από την ακόλουθη μικρή ανάλυση βρίσκουμε τον τύπο για το βέλτιστο σημείο παραγγελίας:

Αρχίζουμε με μερικές τιμές για το σημείο παραγγελίας R, για παράδειγμα $R=\overline{M}$, μέση ζήτηση κατά τη διάρκεια του χρόνου αναμονής. Στη συνέχεια ρωτάμε αν αξίζει να αυξήσουμε το R κατά μια μονάδα. Έτσι, συγκρίνουμε το αναμενόμενο κόστος για την πρόσθεση ακόμα μιας μονάδας στο R, με το αναμενόμενο κόστος χωρίς την πρόσθεση της μιας μονάδος.

Το ετήσιο αυξανόμενο κόστος για την πρόσθεση της μιας μονάδας στο R είναι προσεγγιστικά ίσο με το k_c, αφού η επιπρόσθετη μονάδα προστέθηκε στο απόθεμα ασφαλείας $\left(R-\overline{M}\right)$ και γι' αυτό κρατήθηκε στο απόθεμα σχεδόν για όλο το χρόνο.

Το ετήσιο αυξανόμενο προσδοκώμενο κόστος για τη μη πρόσθεση της μιας μονάδας στο R θα είναι ίσο με την πιθανότητα ότι η επιπρόσθετη μονάδα (ή και περισσότερες μονάδες) μπορεί να ζητηθεί κατά τη διάρκεια του χρόνου αναμονής, πολλαπλασιαζόμενη με τη μονάδα του κόστους εξαντλήσεως του αποθέματος k_u, και όλα πολλαπλασιάζονται με τον ετήσιο αριθμό των κύκλων "παραλαβή παραγγελίας – πωλήσεις – προσέγγιση του σημείου παραγγελίας - τοποθέτηση νέας παραγγελίας" που δίνεται από τον τύπο $\frac{D}{Q}$.

$$\begin{pmatrix} \text{Κόστος από} \\ \text{τη μη αύξηση} \\ \text{του σημείου} \\ \text{παραγγελίας} \\ \text{κατά μία μονάδα} \end{pmatrix} = \Pr\text{ob}\begin{pmatrix} \text{Να ζητηθεί} \\ \text{μία επιπλέον} \\ \text{μονάδα} \end{pmatrix} \cdot k_u \cdot \left[\frac{D}{Q}\right]$$

Υποθετικά προσδιορίζουμε το $F(R)$ να είναι η πιθανότητα ότι η ζήτηση (M) κατά τη διάρκεια του χρόνου αναμονής να είναι μικρότερη ή ίση από την παρούσα τιμή του R:

$$F(R) = \Pr\text{ob}(M \leq R)$$

Η πιθανότητα ότι η επόμενη μονάδα (ή και περισσότερες μονάδες) θα ζητηθούν θα είναι $1-F(R)$. Το κόστος της πρόσθεσης και μη πρόσθεσης μιας μονάδας στο R παριστάνεται στο διάγραμμα 6. Σημειωτέον ότι όσο το R αυξάνεται, η πιθανότητα να ζητηθεί μια επιπλέον μονάδα (ή και περισσότερες μονάδες) μειώνεται και επομένως το σημείο τομής των δύο γραμμών του διαγράμματος 6. Σ' αυτό το σημείο, σταματάμε να προσθέτουμε μονάδες στο R, επειδή το κόστος πρόσθεσης μιας μονάδας υπερβαίνει το κόστος μη πρόσθεσης μιας μονάδας, στο R. Όταν οι γραμμές τέμνονται, τα δύο οριακά κόστη είναι ίσα:

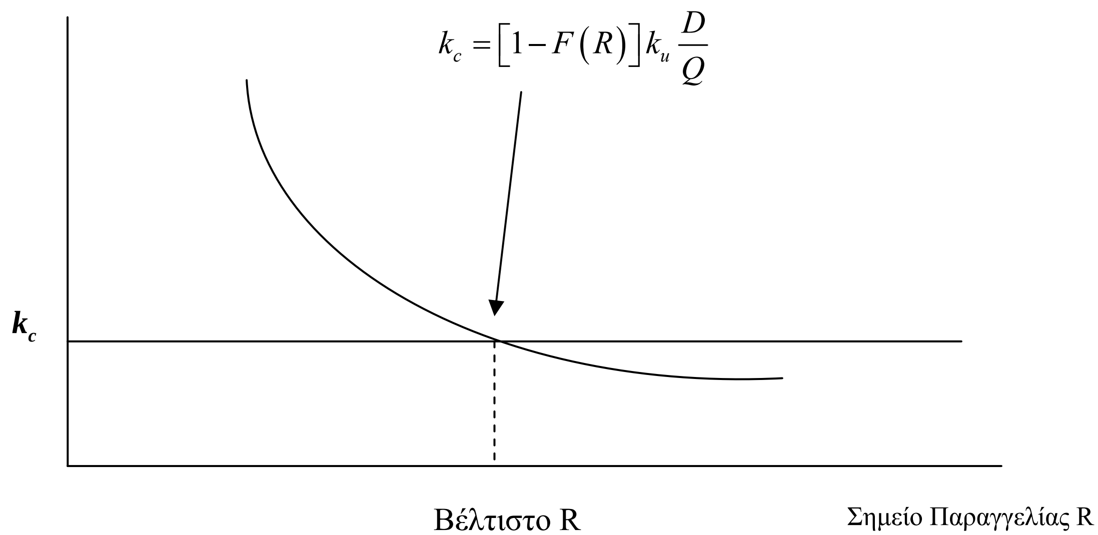
$$k_c = \left[1 - F\left(R\right)\right] k_u \frac{D}{Q}$$

ή

$$\left[1 - F\left(R\right)\right] = \frac{k_c Q}{k_u D}$$

έτσι ώστε:

$$F\left(R\right) = 1 - \frac{k_c Q}{k_u D} \qquad (4.3)$$



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 6.

Η εξίσωση 4.3 μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της βέλτιστης τιμής για το R:

1) υπολογισμός του Q από τον τύπο EOQ (4.2)
2) υπολογισμός του δεξιού μέλους της εξίσωσης 4.3, αυτή είναι η επιθυμητή πιθανότητα η ζήτηση κατά την αναμονή να είναι μικρότερη ή ίση με του R.

3) Από τους πίνακες της Τυποποιημένης Κανονικής Κατανομής, βρίσκουμε τη τιμή του R για την οποία εμφανίζεται η παραπάνω πιθανότητα (βλέπε παράρτημα πινάκων στο τέλος της εργασίας).

Ο όρος $F(R)$ στην εξίσωση 4.3 σημαίνει: ‘ορίζω το R έτσι ώστε να υπάρχει: η πιθανότητα $1-\frac{k_c Q}{k_u D}$ το Μ να είναι ίσο ή μικρότερο από το R’.

Θέτω το Z τον αριθμό των τυπικών αποκλίσεων που πρέπει να απομακρυνθούμε από τις μέσες πωλήσεις, $\overline{M}$, πριν γίνει $F(R)$ η πιθανότητα ‘ζήτηση M κατά τη διάρκεια της αναμονής να είναι ίση ή μικρότερη από το R’ Μπορούμε να υπολογίσουμε το R, το βέλτιστο σημείο παραγγελίας, από τον τύπο:

$$R = \overline{M} + Z\sigma_{\mathrm{M}} \qquad (4.4)$$

Σημειωτέον ότι από τον ορισμό, το σημείο παραγγελίας είναι ίσο με τη μέση ζήτηση κατά τον χρόνο αναμονής συν το απόθεμα ασφαλείας. Έτσι το απόθεμα ασφαλείας είναι $\mathrm{Z}\sigma_{\mathrm{M}}$.

Προσδιορισμός του Βέλτιστου Σημείου Παραγγελίας και του Μεγέθους της Παραγγελίας

Θέτουμε:

Q= μέγεθος παραγγελίας.

R= σημείο παραγγελίας.

D= ετήσια μέση ζήτηση.

M= Ζήτηση κατά το χρόνο αναμονής ($\overline{M}$ = μέση ζήτηση), τυχαία μεταβλητή.

f(M)= συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για το Μ.

$R-\overline{M}$ = απόθεμα ασφαλείας.

σ_{M} = τυπική απόκλιση της ζήτησης κατά το χρόνο αναμονής.

$R-M=$ απούλητες μονάδες κατά τη παραλαβή νέων μονάδων, (αν M<R).

$M-R=$ πόσο η ζήτηση κατά το χρόνο αναμονής υπερβαίνει το σημείο παραγγελίας, (αν M>R).

K= κόστος παραγγελίας.

$k_c=$ ετήσιο κόστος διακράτησης μιας μονάδας προϊόντος στο απόθεμα.

$k_u=$ κόστος παράβασης εξάντλησης αποθέματος κατά μια μονάδα.

Συνολικό Ετήσιο Προσδοκώμενο Κόστος

Το συνολικό κόστος μίας πολιτικής η όποια περιλαμβάνει ένα συγκεκριμένο μέγεθος παραγγελίας R και μια συγκεκριμένη ποσότητα Q, είναι ίσο με το άθροισμα του κόστους παραγγελίας, του κόστους εξάντλησης του αποθέματος και του κόστους διακράτησης του αποθέματος:

$$\Sigma\upsilon\nu o\lambda\iota\kappa\acute{o}\ \mathrm{K}\acute{o}\sigma\tau o\varsigma(Q,R)=K\left(\frac{D}{Q}\right)+\left[k_u\int_R^{\infty}(M-R)\,f(M)\,dM\right]\left(\frac{D}{Q}\right)$$

$$+\left[\frac{Q}{2}+(R-\overline{M})\right]k_c \qquad (4.5)$$

οπού

- $K\left(\frac{D}{Q}\right)$ είναι το κόστος των παραγγελιών,
- K είναι το κόστος ανά παραγγελία,
- $\frac{D}{Q}$ το ετήσιο πλήθος παραγγελιών,

- $\left[k_u\int_R^{\infty}(M-R)f(M)dM\right]\frac{D}{Q}$ είναι το κόστος εξάντλησης του αποθέματος,
- k_u το κόστος έλλειψης μιας μονάδας προϊόντος,
- το ολοκλήρωμα είναι το προσδοκώμενο πλήθος μονάδων εκτός αποθέματος ανά περίοδο,
- $\frac{D}{Q}$ είναι το ετήσιο πλήθος των κύκλων παραγγελιών δηλαδή το ετήσιο πλήθος παραγγελιών,
- k_c είναι το κόστος αποθήκευσης μιας μονάδας για ένα χρόνο,
- το $\left[\left(\frac{Q}{2}\right)+\left(R-\overline{M}\right)\right]$ είναι το μέσο απόθεμα $\frac{Q}{2}$ συν το μέσο απόθεμα ασφαλείας ($R-\overline{M}$) και
- $\left[\left(\frac{Q}{2}\right)+\left(R-\overline{M}\right)\right]k_c$ είναι το κόστος διακράτησης του αποθέματος.

Ο όρος ($R-\overline{M}$) είναι μόνο μία προσέγγιση του μέσου επιπέδου του αποθέματος ασφαλείας, άλλα στις περισσότερες πρακτικές περιπτώσεις η προσέγγιση είναι έγκυρη. Οι εξισώσεις για το Q και F(R) βρίσκονται από την εξίσωση του συνολικού κόστους, παίρνοντας τις μερικές παραγώγους ως προς R και ως προς Q και θέτοντάς τες ίσες με μηδέν.

$$\Sigma\upsilon\nu o\lambda\iota\kappa\acute{o}\ \text{Κόστος}(Q,R)=K\left(\frac{D}{Q}\right)+\left[k_u\int_R^{\infty}(M-R)f(M)dM\right]\left(\frac{D}{Q}\right)$$

$$+\left[\frac{Q}{2}+(R-\overline{M})\right]k_c$$

Παραγωγίζοντας ως προς το R:

$$\frac{\partial \Sigma \upsilon\nu o\lambda\iota\kappa \acute{o}\ \mathrm{K}\acute{o}\sigma\tau o\varsigma(Q,R)}{\partial R} = k_c - \frac{D}{Q}k_u Rf\left(R\right) + \frac{D}{Q}k_u\left[F\left(R\right) + Rf\left(R\right) - 1\right]$$

$$= k_c - \frac{D}{Q}k_u + \frac{D}{Q}k_u F(R)$$

Θέτοντας την παράγωγο ίση με μηδέν και λύνοντας ως προς $F\left(R\right)$:

$$F\left(R\right) = 1 - \frac{k_c Q}{k_u D}$$

Παραγωγίζοντας το συνολικό κόστος ως προς Q λαμβάνουμε:

$$\frac{\partial \Sigma \upsilon\nu o\lambda\iota\kappa \acute{o}\ \mathrm{K}\acute{o}\sigma\tau o\varsigma(Q,R)}{\partial Q} = -\frac{KD}{Q^2} + \frac{k_c}{2} - \frac{D}{Q^2}k_u\int_R^{\infty}(M-R)f(M)dM$$

Θέτοντας την παράγωγο ίση με μηδέν και λύνοντας ως προς Q έχουμε:

$$Q = \sqrt{\frac{2D\left[K + k_u\int_R^{\infty}\left(M-R\right)f(M)dM\right]}{k_c}} \tag{4.6}$$

Η εξίσωση 4.6 μπορεί να μετατραπεί σ’ ένα τύπο πιο αποδεκτό για υπολογισμούς. Χρησιμοποιώντας το γεγονός, ότι το M ακολουθεί την κανονική κατανομή και αν το R είναι μεγαλύτερο από τις αναμενόμενες πωλήσεις $\left(\overline{M}\right)$ κατά τη διάρκεια της αναμονής της νέας παραγγελίας, τότε:

$$\int_R^{\infty}\left(M-R\right)f\left(M\right)dM = \sigma_M N\left(Z\right) \tag{4.7}$$

όπου $N\left(Z\right)$ δίνει το πόσες φορές την τυπική απόκλιση σ_{M} απέχει το R από τη μέση τιμή. Το σ_{M} είναι η τυπική απόκλιση της ζήτησης κατά τη διάρκεια του χρόνου αναμονής. Η εξίσωση 4.7 είναι ο αναμενόμενος αριθμός ακάλυπτων παραγγελιών κατά το χρόνο αναμονής. Η εξίσωση 4.6 τώρα γίνεται ως εξής:

$$Q = \sqrt{\frac{2D\left[K + k_u \sigma_{\mathrm{M}} N(Z)\right]}{k_c}} \tag{4.8}$$

Σημειωτέον ότι το R βρίσκεται στον τύπο του Q (εξίσωση 4.6) και το Q βρίσκεται στην εξίσωση 4.3 για το R. Θεωρητικά, οι δύο εξισώσεις πρέπει να λυθούν ταυτόχρονα. Αυτό μπορεί να γίνει με τη χρήση μιας επαναληπτικής διαδικασίας, η οποία ξεκινά με μια προϋπολογιζόμενη τιμή για το Q, και λύνοντας ως προς R, τότε λύνει για ένα καινούργιο Q και επαναλαμβάνεται η διαδικασία μέχρι να βρεθούν ένα Q και ένα R που να ικανοποιούν και τις δύο εξισώσεις. Όμως, για πρακτικούς σκοπούς, είναι επαρκές να καθοριστεί η αξία του Q χρησιμοποιώντας τον τύπο EOQ (4.2), όπου η συγκεκριμένη ζήτηση έχει υπολογιστεί ως εξής: $Q = \sqrt{\frac{2KD}{k_c}}$. Η εξίσωση του συνολικού κόστους απλοποιείται (υποθέτοντας ότι $R > \overline{M}$) χρησιμοποιώντας την εξίσωση 4.7 και αντικαθιστώντας στην εξίσωση 4.5, βρίσκουμε:

$$\Sigma\upsilon\nu o\lambda\iota\kappa\acute{o}\ \mathrm{K}\acute{o}\sigma\tau o\varsigma\left(Q,R\right) = \left[K + k_u \sigma_{\mathrm{M}} N(Z)\right]\frac{D}{Q} + \left[\frac{Q}{2} + \left(R - \overline{M}\right)\right]k_c \tag{4.9}$$

Β Ι Β Λ Ι Ο Γ Ρ Α Φ Ι Α

Α.ΕΛΛΗΝΙΚΗ

1) Γ. Κοκολάκης και Ι. Σπηλιώτης, Εισαγωγή στις Πιθανότητες, Εκδόσεις Συμεών 2002.
2) Α. Μπακόπουλος και Ι. Χρυσοβέργης, Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση, Εκδόσεις Συμεών, 1994.
3) Γ.Σ. Παπαγεωργίου και Χ.Γ. Τσίτουρας, Αριθμητική Ανάλυση με Εφαρμογές σε Matlab και Mathematica, Εκδόσεις Συμεών 2005.
4) Γ.Σ. Παπαγεωργίου, Χ.Γ. Τσιπούρας, Ι.Θ. Φαμέλης, Σύγχρονο Μαθηματικό Λογισμικό Matlab-Mathematica, Εκδόσεις Συμεών 2004.

Β. ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΗ

1) A.M. Anile, V. Capasso and A. Greco, Progress in Industrial Mathematics, Springer 2000.
2) S.B. Block and G.A. Hirt, Foundations of Financial Management, Irwin Mc Graw-Hill 2000.
3) D.N. Gujarati, Basic Econometrics, Mc Graw-Hill 1995.
4) P. Herrici and J. Wiley & Sons, Elements of Numerical, NY 1969.
5) J.T. McClave, P.G. Benson and T. Sincich, Statistics for Business and Economics, Prentice Hall 1998.
6) M.J.D. Powell and S. Scholtes, System Modelling and Optimization Methods, Theory and Applications, Kluwer Academic Publishers 2000.
7) S.S. Rao, Applied Numerical Methods for Engineers and Scientists, Prentice Hall 2002.
8) E.W. Sachs and R. Tichatschke, System Modeling and Optimization XX, Kluwer Academic Publishers 2003.
9) C.F. Van Loan, Introduction to Scientific Computing, Prentice Hall 2000.