Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα

Ασκήσεις:

1) α) Έστω $\mathbf{0} \neq \mathbf{x}$, η λύση του συστήματος **Ax=b**, όπου **A** n×n αντιστρέψιμος πίνακας και **x,b** n-διάστατα. διανύσματα. Έστω **y** μία προσέγγιση του x και **r= Ay-b** το αντίστοιχο υπόλοιπο. Δείξτε ότι για κάθε νόρμα ||.|| στον $\boldsymbol{R^n}$**,** και για την αντίστοιχη φυσική νόρμα ισχύει :

$$\| \mathbf{y} - \mathbf{x} \| / \|\mathbf{x}\| \le \mathbf{k(A)} \, (\| \mathbf{r} \| / \|\mathbf{b}\|)$$

όπου **k(A)** συμβολίζει τον δείκτη κατάστασης.

β) Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Να δοθεί μία εκτίμηση του σφάλματος (με βάση τον τύπο του (Α)) για την προσέγγιση της λύσης του συστήματος **Ax=b**, με $\mathbf{b=[7,-2,6]^T}$ εκτελώντας 2 επαναλήψεις της επαναληπτικής μεθόδου Gauss-Seidel.

2) Έστω ο συμμετρικός πίνακας, με $b \in (1,2)$,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & b & 0 \\ b & 8 & b \\ 0 & b & 4 \end{pmatrix}$$

α) Να μελετήσετε τη σύγκλιση των μεθόδων Jacobi και Gauss-Seidel.

β) Να κατασκευάσετε την επαναληπτική μέθοδο χαλάρωσης JOR. Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου χαλάρωσης ω, για τις οποίες η JOR συγκλίνει. Μπορείτε να επιταγχύνεται την Jacobi με κατάλληλη επιλογή της παραμέτρου χαλάρωσης;

3) Για τον πίνακα της άσκησης 3, να απαντήσετε το ερώτημα (γ), για την SOR.

4) Αριθμητική επίλυση τριδιαγωνίων συστημάτων. Κατασκευάστε αλγόριθμο της μορφής LU για την επίλυση τριδιαγώνιων συστημάτων. Π.χ για 3×3 πίνακες, οι τριδιαγώνιοι πίνακες παίρνουν τη μορφή,

$$\text{A=} \begin{pmatrix} d_1 & f_1 & 0 \\ e_2 & d_2 & f_2 \\ 0 & e_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

δηλαδή για n × n πίνακες τα μόνα μη-μηδενικά στοιχεία βρίσκονται στην κύρια διαγώνιο καθώς και στις δύο δευτερεύουσες διαγώνιες (υπέρ- και υπό-διαγώνιο) του. Οι πίνακες αυτής τις μορφής αποτελούν τυπικά παραδείγματα αραιών πινάκων και εμφανίζονται συχνά στις εφαρμογές (π.χ στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, θεωρεία κατασκευών Splines κτλ.).
Υποθέτουμε ότι η κύρια διαγώνιος είναι αυστηρώς κυρίαρχη, δηλαδή

$$d_i,\ e_i,\ f_i \neq 0, \text{ για κάθε } 1 \leq i \leq n$$

$$|d_1| > |f_1|\ ,\ |d_n| > |e_n|\ ,\ |d_i| \geq |e_i| + |f_i|, \text{ για } 2 \leq i \leq n-1.$$

Αποδείξτε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και υπολογίστε των αριθμό των πράξεων που απαιτούνται για την κατασκευή του αλγόριθμου μου LU. Κατασκευάστε ένα αλγόριθμο που να επιλύει τριδιαγώνια συστήματα της παραπάνω μορφής με βάση τον αλγόριθμο LU. Χρησιμοποιείστε τον παραπάνω αλγόριθμο για την επίλυση του συστήματος

$$Ax = b$$

όπου ο A είναι ένας 100 × 100 *συμμετρικός* πίνακας, με στοιχεία
$d_i = 1000 + i$, για $1 \leq i \leq n$, $e_i = 1 + i$, για $2 \leq i \leq 100$, και $b_i = 1 + i,\ \ 1 \leq i \leq 100$.
(Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε κατάλληλες δομές ώστε να εκμεταλευτείτε το γεγονός ότι ο A είναι αραιός πίνακας).

5) (α) Κατασκευάστε αλγόριθμο της μορφής QR για τον υπολογισμό των ιδιοτιμών / ιδιοδιανυσμάτων ενός συμμετρικού πίνακα. Για την παραγοντοποίηση QR των πινάκων που προκύπτουν κατά την εκτέλεση των επαναλήψεων, χρησιμοποιήστε τη συνάρτηση QR_factor(A) που περιέχεται στη βιβλιοθήκη προγραμμάτων του Matlab.
(β) Να χρησιμοποιήσετε τον παραπάνω αλγόριθμο για την εύρεση των ιδιοτιμών του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2/3 & -4/3 & 4/3 \\ 2/3 & 4 & 0 & 0 \\ -4/3 & 0 & 6 & 2 \\ 4/3 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

6) (α) Να υπολογίσετε τη μέγιστη (κατά μέτρο) ιδιοτιμή του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 4 & -1 \\ 4 & 15 & 4 \\ -1 & 4 & 15 \end{pmatrix}$$

χρησιμοποιώντας 3 επαναλήψεις της μεθόδου των δυνάμεων.
(β) Να υπολογίσετε τη δεύτερη μεγαλύτερη (κατά μέτρο) ιδιοτιμή του πίνακα του ερωτήματος (α).

7) Για το συμμετρικό πίνακας A της άσκησης 6(β), υπολογίστε την μέγιστη (κατά μέτρο) ιδιοτιμή χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των δυνάμεων με 5 επαναλήψεις, καθώς και τη μέθοδο των δυνάμεων με βάση το υπόλοιπο Rayleigh. Να συγκρίνετε τα αποτελέσματα.

8) Δίνεται ο πίνακας,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 10^{-4} & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Για την επαναληπτική διαδικασία Gauss-Seidel για τη λύση του συστήματος Ax=b, με $b=[5,7.001,7]^T$, να υπολογίσετε μια προσέγγιση της νόρμας του επαναληπτικού πίνακα B_{GS} μετά από δύο επαναλήψεις με τη βοήθεια των διαφορών $\delta_j=\|x^{(j)}-x^{(j-1)}\|$. Να υπολογίσετε μία a-posteriori εκτίμηση για το σφάλμα με βάση τις διαφορές δ_j μετά από δύο επαναλήψεις και να βρεθεί το πλήθος των επαναλήψεων που απαιτούνται ώστε το σφάλμα να είναι μικρότερο από 10^{-5}.

9) (α) Να εφαρμόσετε τη μέθοδο των κλίσεων και τη μέθοδο των συζυγών κλίσεων με δύο επαναλήψεις για το σύστημα, Ax=b, $b=[3,-5,3]^T$ με αρχικό διάνυσμα $x_0=[0,0,1/2]^T$ όπου

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(β) Να υπολογίσετε μία εκτίμηση σφάλματος για τη δεύτερη επανάληψη του ερωτήματος (α) για τη μέθοδο των κλίσεων.