

Ασκήσεις για το μάθημα της Αριθμητικής Ανάλυσης

- 1) Ένας γενικός τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης δίνεται ως:

$$\int_0^1 \sqrt{x} f(x) dx \approx a_0 f(0) + a_1 \int_0^1 f(x) dx$$

και χρησιμοποιείται σε περίπτωση που μπορούμε να ολοκληρώσουμε εύκολα την συνάρτηση $f(x)$ και γνωρίζουμε την τιμή της στο σημείο 0. Να προσδιορίσετε τους συντελεστές a_0, a_1 ώστε παραπάνω μέθοδος να ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα βαθμού 1. Να

υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_0^1 (e^{2x} + x)\sqrt{x} dx$ με βάση την παραπάνω

τεχνική.

- 2) Να κατασκευάσετε ένα κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης με βάση το πολυώνυμο παρεμβολής Hermite, για την ολοκλήρωση της συνάρτησης. Να υπολογιστεί ο τύπος του σφάλματος που αντιστοιχεί στον παραπάνω κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης.

- 3) Να κατασκευάσετε ένα κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης της μορφής

$$\int_0^1 x^a f(x) dx \approx a_1 \int_0^1 f(x) dx + a_2 \int_0^1 x f(x) dx, 0 < a < 1$$

τέτοιο ώστε να ολοκληρώνονται ακριβώς συναρτήσεις της μορφής

$$f(x) = x^{1/2} p(x), p \in P_1.$$

- 4) Να κατασκευαστεί ο κανόνας ολοκλήρωσης Gauss για τη συνάρτηση βάρους $w(x) = x^{1/2}$ στο διάστημα $[0,1]$ της μορφής

$$\int_0^1 x^{1/2} f(x) dx \approx a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2)$$

και να υπολογιστεί με βάση τον παραπάνω κανόνα το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 x^{1/2} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx.$$

- 5) Να κατασκευαστεί ο κανόνας ολοκλήρωσης Gauss για τη συνάρτηση βάρους $w(x) = -\ln x$ στο διάστημα $(0,1)$ της μορφής

$$\int_0^1 w(x) f(x) dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1).$$

- 6) Να βρεθούν τα a, b, x_1 ώστε ο κανόνας της μορφής,

$$\int_0^1 f(x) dx \approx a f(x_1) + b(f(1) - f(0))$$
 να έχει τη μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια.