Αριθμητική Ανάλυση (3^o Φυλλάδιο)

1) (α) Αποδείξτε ότι αν $g \in C^{p+1}(D)$ σε κάποια περιοχή D του σταθερού σημείου και $g^{(i)}(a)=0, 1 \le i \le p$ με $g^{(p+1)}(a) \ne 0$ τότε

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_{k+1}-a}{(x_k-a)^{p+1}} = \frac{g^{(p+1)}(a)}{(p+1)!}.$$

(β) Θεωρούμε την επαναληπτική μέθοδο $x_{k+1}=f(x_k)$, k=0,1,… με $f(x)= Ax+Bx^2+Cx^3$. Για δοθέν a>0, υπολογίστε τις σταθερές A,B,C ώστε η διαδικασία να συγκλίνει τοπικά στο 1/a, με τάξη σύγκλισης p=3.

(γ) Βρείτε συνθήκη για το αρχικό σφάλμα $e_0 = x_0 - (1/a)$ ώστε οι επαναλήψεις να συγκλίνουν.

2) Υποθέτουμε ότι για το μη-γραμμικό σύστημα F(x)=0 ικανοποιούνται οι κλασσίκες υποθέσεις:

$(a) \exists x^*, F(x^*)=0$

$(\beta) F': \Omega \to \mathbb{R}^n$, Lipschitz, με σταθερά γ,

(γ) F' είναι αντιστρέψιμος

Να δείξετε ότι: $\| F'(x^*)^{-1} \|^{-1} \| x-x^* \| \le \| F(x) \|$

3) Να βρεθεί ο γενικός τύπος σφάλματος για το πολυώνυμο παρεμβολής Hermite, $p \in P_3$ τέτοιο ώστε

$$p(x_0)=f(x_0), p(x_1)=f(x_1), p'(x_1)=f'(x_1), p''(x_1)=f''(x_1), p(x_2)=f(x_2)$$

με $x_0 < x_1 < x_2$. Να βρεθεί μία απλοποιημένη έκφραση του παραπάνω τύπου αν τα σημεία αυτά είναι ισαπέχοντα.

4) Έστω $f \in C^1$, και Δ={ $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ } ένας ομοιόμορφος διαμερισμός με του [a,b] με βήμα h. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει μοναδική κυβική συνάρτηση τύπου Spline τέτοια ώστε, $s(x_i)=f(x_i), i=0,\ldots,n,$ και $s'(x_0)=f'(x_0), s'(x_n)=f'(x_n)$, και να κατασκευαστούν οι εξισώσεις υπολογισμού των συντελεστών της.

5) Να δειχθεί ότι για την συνάρτηση Spline του ερωτήματος (6), ισχύει:

$$\int_a^b (g''(x))^2\,dx \ge \int_a^b (s''(x))^2\,dx$$

όπου g(x) $\in C^2(a,b)$ είναι οποιαδήποτε συνάρτηση που παρεμβάλλει την f στα ίδια σημεία με την spline s.

Μέχρι: 10/01/2018