

Αριθμητική Ανάλυση (2^ο Φυλλάδιο)

- 1) Έστω οι συμμετρικοί πίνακες

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Να κατασκευάσετε την επαναληπτική μέθοδο χαλάρωσης SOR. Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου χαλάρωσης ω , για τις οποίες η SOR συγκλίνει. Μπορείτε να επιταγχύνεται τη σύγκλιση με κατάλληλη επιλογή της παραμέτρου χαλάρωσης;

- 2) Να ολοκληρώσετε την απόδειξη της εύρεσης του διανύσματος κατεύθυνσης ρ για την μέθοδο των συζυγών κλίσεων για συμμετρικό και θετικά ορισμένο πίνακα:

Έστω ότι ισχύουν οι σχέσεις: Για $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} (A\rho^{(i)})^T \rho^{(j)} &= 0, \quad \forall i, j = 0, \dots, k, \quad i \neq j, \\ (\rho^{(j)})^T r^{(k)} &= 0, \quad j = 0, \dots, k \end{aligned}$$

Να δείξετε ότι,

$$(\rho^{(j)})^T r^{(k+1)} = 0, \quad j = 0, \dots, k.$$

Υπόδειξη: Να χρησιμοποιήσετε επαγωγή.

- 3) Συμβολίζουμε με $\{x_k\}$ την ακολουθία που παράγει η εφαρμογή της μεθόδου των συζυγών κλίσεων για την επίλυση συστήματος $Ax=b$, όπου A είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος τετραγωνικός πίνακας, με ιδιοτιμές λ_i που περιέχονται στο διάστημα $(7,13)$. Να βρεθεί ο αριθμός των επαναλήψεων που χρειάζονται ώστε το σχετικό σφάλμα $\frac{\|x_k - x\|_A}{\|x\|_A}$ να είναι μικρότερο από 10^{-5} . Χρησιμοποιείτε $x_0 = 0^T$. Να

δοθεί επίσης ένα άνω φράγμα για την ποσότητα $\frac{\|b - Ax_k\|_2}{\|b\|_2}$.

- 4) Ένας τετραγωνικός αντιστρέψιμος πίνακας A καλείται μονότονος αν όλα τα στοιχεία του A^{-1} είναι θετικά. Έστω διανύσματα $x, y \in \mathbb{R}^n$. Τότε γράφουμε $x \geq y$ αν ισχύει $x_i \geq y_i$, $i=1, \dots, n$. Ομοίως για $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ορίζουμε για $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ορίζουμε $A \geq B$, αν ισχύει $a_{ij} \geq b_{ij}$, $i, j=1, \dots, n$. Αν ο A

είναι μονότονος, και x, y είναι λύσεις των συστημάτων $Ax=b$, $Ay=c$ αντιστοίχως να δείξετε ότι αν $b \geq c$, τότε $x \geq y$. Στη συνέχεια αν A, B είναι αντιστρέψιμοι και μονότονοι, να δείξετε ότι αν $A \geq B$ τότε $B^{-1} \geq A^{-1}$

Μέχρι: 28/11/2017.