<u>Αριθμητική Ανάλυση (Μεταπτυχιακό): 1ο Φυλλάδιο</u>

1)α) Έστω A, δA τετραγωνικοί n×n αντιστρέψιμοι πίνακες, b,δb $\in R^n$,b $\neq 0$ και μ(A) = ||A|| ||A^{-1}|| ο δείκτης κατάστασης. Αν ισχύουν οι σχέσεις

$$\|\delta A\| \le \gamma \|A\|, \qquad \|\delta b\| \le \gamma \|b\|, \qquad \gamma \in \mathrm{R}^+$$

να δείξετε ότι

$$\frac{\|x+\delta x\|}{\|x\|} \le \frac{1+\gamma\mu(A)}{1-\gamma\mu(A)}, \qquad \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le \frac{2\gamma}{1-\gamma\mu(A)}\mu(A),$$

όπου $Ax = b$ και $(A+\delta A)(x+\delta x) = b+\delta b$.

β) Έστω ορθογώνιος πίνακας $A \in \mathbb{R}^{10^5 \times 10^5}$ και πίνακας διαταραχών $\delta A = \varepsilon A,\ \ \varepsilon = 10^{-16}$. Να υπολογιστεί το εύρος των τιμών της παραμέτρου γ ώστε το σχετικό σφάλμα διαταραχών να είναι μικρότερο από 10^{-7}. Δίνεται $\|b\|_2=1$, και δb = $[\varepsilon,0,...,0,0,\varepsilon]^T$.

2) Αποδείξτε ότι η φυσική νόρμα πίνακα που παράγεται από τη διανυσματική νόρμα $\|.\|_1$ ταυτίζεται με τη νόρμα πίνακα στήλη.

3) (α) Αποδείξτε το ακόλουθο λήμμα (Neumann Lemma). Έστω B ένας n × n πίνακας με ρ(B) < 1. Τότε υπάρχει ο $(I-B)^{-1}$ και

$$(I-B)^{-1} = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=0}^{k} B^i$$

(β) Υποθέτουμε ότι ο M είναι ένας $n \times n$ πίνακας που ικανοποιεί τη σχέση ||M|| <1. Αποδείξτε ότι ο I-M είναι ομαλός και ότι ισχύει η ανισότητα $\|(I-M)^{-1}\| \le \dfrac{1}{1-\|M\|}$.

(γ) Δίνεται ο τριδιαγώνιος $n\ x\ n$ πίνακας A,

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 1\ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots 1 & 9 \end{pmatrix}$$

Να αποδειχθεί ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και να βρεθεί ένα άνω φράγμα για την νόρμα $\|A^{-1}\|_\infty$ καθώς και για τη φασματική ακτίνα του A^{-1}. Να υπολογιστεί επίσης ένα άνω και κάτω φράγμα για το μέτρο των ιδιοτιμών του A καθώς και μία προσέγγιση του δείκτη κατάστασης $\mu_2(A)$.

4) Έστω A,B πίνακες $n \times n$ ώστε ||I-BA|| < 1. Τότε οι A,B είναι ομαλοί και ισχύουν οι σχέσεις:

$$\|A^{-1}\| \le \frac{\|B\|}{1-\|I-BA\|}, \qquad \|B^{-1}\| \le \frac{\|A\|}{1-\|I-BA\|}$$

και

$$\|A^{-1}-B\| \le \frac{\|B\|\|I-BA\|}{1-\|I-BA\|}, \qquad \|A-B^{-1}\| \le \frac{\|A\|\|I-BA\|}{1-\|I-BA\|}.$$

5) Αριθμητική επίλυση συμμετρικών θετικά ορισμένων τριδιαγώνιων συστημάτων. Κατασκευή παραγοντοποίησης τύπου Cholesky. Υποθέτουμε ότι ο πίνακας A είναι συμμετρικός, δηλαδή

$$A=\begin{pmatrix} d_1 & e_2 ....0 & 0 \\ e_2 & d_2 ..... & \vdots \\ 0 & \cdots e_n & d_n \end{pmatrix}$$

και τα στοιχεία του ικανοποιούν τις ακόλουθες συνθήκες.

$$d_i > 0 \text{ για } 1 \leq i \leq n,$$
$$d_I > |e_2| \,,\; d_i > |e_i| + |e_{i+1}| \text{ για } 2 \leq i \leq n-1,\; d_n > |e_n|.$$

α) Αποδείξτε ότι ο A είναι θετικά ορισμένος

β) Κατασκευάστε ένα αλγόριθμο για τον υπολογισμό των στοιχείων της παραγοντοποίησης Cholesky, (χρησιμοποιώντας την αραιή δομή του πίνακα), και χρησιμοποιήστε τον αλγόριθμο για την κατασκευή αλγορίθμου για την επίλυση του γραμμικού συστήματος Ax=b.

γ) Επιλύστε το σύστημα Ax= b, όπου A πίνακας με στοιχεία,

$$d_i = 1000 + i, \text{ για } 1 \leq i \leq 500, \qquad e_i = 1 + i \text{ για } 2 \leq i \leq 500,$$
$$b_i = 1+i,\; 1 \leq i \leq 500.$$

(Παράδοση μέχρι: 10/11/2017).