ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ Ι

23.10.2007

Λαμπιανίδου Υβόννη

Μάθημα 1ο.

① Αρχή της μαθηματικής Επαγωγής

Έστω $A \subseteq \mathbb{N}$. Αν $1 \in A$ και για κάθε $n \in A$, το $n+1 \in A$ τότε $A = \mathbb{N}$ ή αλλιώς $A = \{ n \in \mathbb{N} : \text{ισχύει η } P(n)$

- Έστω P πρόταση που αφορά τους φυσικούς
- Ισχύει η $P(1)$
- Αν ισχύει η $P(n)$ τότε ισχύει η $P(n+1)$
- Τότε η P ισχύει για όλους τους φυσικούς

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

- Έστω $a > -1$, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $(1+a)^n \geq 1 + n \cdot a$ (ανισότητα Bernoulli)

  - Για $n=1$ προφανώς ισχύει

Έστω ότι ισχύει για κάποιο φυσικό n δηλαδή $(1+a)^n \geq 1+n\cdot a$

Θα δείξουμε ότι ισχύει και για τον $n+1$

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n(1+a) \underset{\substack{\text{επαγωγική υπόθεση} \\ a+1>0}}{\geq} (1+n\cdot a)(1+a) = 1 + n\cdot a + a + na^2 = 1 + a(n+1) + n\cdot a^2$$

$$\geq 1 + a(n+1) \Rightarrow (1+a)^{n+1} \geq 1 + a(n+1)$$

Άρα η πρόταση ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

② Απαγωγή σε Άτοπο

- Δεν υπάρχει ρητός αριθμός q με $q^2 = 2$.

Φυσικοί αριθμοί $\mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$

$\to \mathbb{Z} = \{\dots -3,-2,-1,0,1,2,\dots\}$

$\to \mathbb{Q} = \{ \frac{\kappa}{\lambda} : \kappa \in \mathbb{Z}$ και $\lambda \in \mathbb{N}$ $(\lambda \neq 0)\}$

$\to \mathbb{R}$ πραγματικοί αριθμοί

Απόδειξη

Έστω προς απαγωγή σε άτοπο ότι υπάρχει ρητός q με $q^2=2$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι q είναι θετικός (Αν το q είναι αρνητικός τότε θεωρώ τον $-q$)

Έστω κ, λ φυσικοί αριθμοί ώστε $q = \frac{\kappa}{\lambda}$. Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι το $\frac{\kappa}{\lambda}$ είναι ανάγωγο δηλαδή οι κ, λ δεν έχουν άλλο κοινό διαιρέτη παρά μόνο τη μονάδα 1.

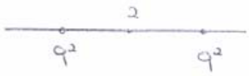
Έχουμε $\left(\frac{\kappa}{\lambda}\right)^2 = 2 \Leftrightarrow \frac{\kappa^2}{\lambda^2} = 2 \Leftrightarrow \kappa^2 = 2\lambda^2 \Rightarrow \kappa^2$ άρτιος $\Rightarrow \kappa$ άρτιος

δηλαδή $\kappa = 2\kappa_1$ με $\kappa_1 \in \mathbb{N}$

$\kappa^2 = 2\lambda^2 \Rightarrow (2\kappa_1)^2 = 2\lambda^2 \Rightarrow 4\kappa_1^2 = 2\lambda^2 \Rightarrow 2\kappa_1^2 = \lambda^2 \Rightarrow \lambda^2$ άρτιος $\Rightarrow \lambda$ άρτιος

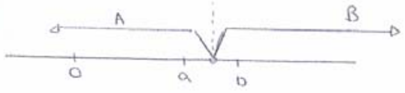
Άρα αφού κ και λ και οι δύο άρτιοι: Άτοπο αφού είχαμε υποθέσει ότι δεν υπάρχει άλλος κοινός διαιρέτης των κ, λ εκτός από τον 1.

Άρα $\nexists$ ρητός q με $q^2=2$. Διαφορετικά για κάθε ρητό q, $q^2 \neq 2$ ισοδύναμα για κάθε ρητό q είτε $q^2<2$ είτε $q^2>2$.



$$A=\{q\in\mathbb{Q} : q>0 \text{ και } q^2<2\}\cup\{q\in\mathbb{Q} : q\leq 0\}$$

$$B=\{q\in\mathbb{Q} : q>0 \text{ και } q^2>2\}$$



1) Αν $a\in A$ και $b\in B$, $a<b$
2) Το A δεν έχει μέγιστο στοιχείο
3) Το B δεν έχει ελάχιστο στοιχείο

} έρχονται οσοδήποτε κοντά

4) Για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχουν $a\in A$ και $b\in B$ με $b-a<\varepsilon$.

$$\mathbb{Q}=A\cup B, \quad A\cap B=\emptyset$$

— × —

Φυσικοί αριθμοί

1 2 3 4 ....

*ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αν $n\neq m$ φυσικοί αριθμοί τότε $|m-n|\geq 1$

↳ ισχύει και για τους ακεραίους

▷ Άσκηση: Έστω $p\neq q$ ρητοί. Τότε υπάρχει r ρητός που είναι μεταξύ των p, q.

$$\boxed{r=\frac{p+q}{2}}$$

Θεώρημα : Καλή διάταξη των φυσικών αριθμών.

➡ Κάθε μη κενό υποσύνολο των φυσικών αριθμών έχει ελάχιστο στοιχείο. Δηλαδή αν $A\subseteq\mathbb{N}$, με $A\neq\emptyset$ τότε υπάρχει $a\in A$ με $a\leq a'$ για όλα τα $a'\in A$.

Ερώτηση: Το $\mathbb{Z}$ είναι καλά διατεταγμένο;

⇒ Όχι, π.χ $A=\mathbb{Z}$: δεν έχει ελάχιστο

* Απόδειξη Θεωρήματος.

• Έστω προς απαγωγή σε άτοπο ότι υπάρχει $A \subseteq \mathbb{N}$ μη κενό χωρίς ελάχιστο στοιχείο

Ορίζουμε $B = \{ n \in \mathbb{N} : 1, 2, \dots, n$ δεν ανήκουν στο $A \}$

• $1 \in B$ γιατί αν $1 \notin B$ σημαίνει ότι υπάρχει $1 \leq j \leq 1$ με $j \in A$

δηλαδή $j = 1 \in A \Rightarrow 1 \in A$ και άρα $1 = \min A$

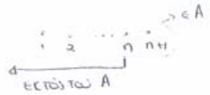
↳ Άτοπο αφού το A δεν έχει ελάχιστο.

•• Αν $n \in B$ τότε $n+1 \in B$

γιατί αν $n+1 \notin B$ υπάρχει $1 \leq j \leq n+1$ με $j \in A$

Επειδή όμως $n \in B \Rightarrow 1, \dots, n \notin A$ και άρα $j = n+1 \in A$

↳ $\Rightarrow n+1 = \min A$



Άτοπο αφού το A δεν έχει ελάχιστο

Άρα $B = \mathbb{N} \Rightarrow A = \emptyset$ άτοπο

24.10.2007.

Μαθηματική Ανάλυση Ι (μάθημα 2ο)

Ορισμός: Έστω ένα σύνολο $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}$. Ένα στοιχείο $a \in A$ καλείται ελάχιστο στοιχείο του A αν $a \leq x, \ \forall x \in A$.

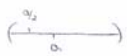
* ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Αν υπάρχει $a \in A$ που είναι ελάχιστο τότε αυτό είναι μοναδικό και συμβολίζεται με $\min A$.

⇒ Λέμε ότι το A έχει ελάχιστο στοιχείο αν υπάρχει το $\min A$.

π.χ. $A = \{5, 6, 7, 8, 9, \dots\}$ $\min A = 5$

$A = (0,1)$

↳ δεν έχει ελάχιστο



$a \in A \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{a+0}{2} \in A$ και $\frac{a}{2} < a$.

• Ιδιότητες των φυσικών αριθμών

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

(1) Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής

Έστω $A \subseteq \mathbb{N}$. Αν

$$\left. \begin{array}{l} \cdot\ 1 \in A \\ \cdot\cdot\ n \in A \Rightarrow n+1 \in A \end{array} \right\} \text{ τότε } A = \mathbb{N}$$

(2) Καλή διάταξη του $\mathbb{N}$

Κάθε $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}$ έχει ελάχιστο σημείο

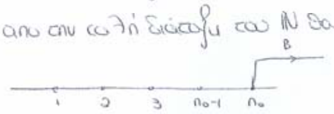
Καλή Διάταξη ⇒ Μαθηματική Επαγωγή

Έστω $A \subseteq \mathbb{N}$ με $1 \in A$ και αν $n \in A$ τότε και $n+1 \in A$

Έστω $B = \mathbb{N} \setminus A$. Θα δείξουμε ότι $B = \emptyset$ οπότε $\mathbb{N} = A$.

Πράγματι αν $B \neq \emptyset$ από την καλή διάταξη του $\mathbb{N}$ θα είχε ελάχιστο στοιχείο $n_0 = \min B$. Επειδή $1 \in B$

$\Rightarrow n_0 > 1$



$\Rightarrow n_0 - 1 \in \mathbb{N}$

$n_0 - 1 \in A \Rightarrow n_0 \in A$ Άτοπο

Έστω $m, n \in \mathbb{N}$

$m \neq n \Rightarrow |m - n| \geq 1$

Οι Πραγματικοί Αριθμοί

▶ Οι πραγματικοί αριθμοί είναι ένα σύνολο $\mathbb{R}$ εφοδιασμένο με δύο πράξεις $+, \cdot$ και μια διάταξη που ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

I. Ιδιότητες του $(\mathbb{R}, +)$

① $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$ (Προσεταιριστική ιδιότητα)

② $\alpha+\beta=\beta+\alpha$ (Αντιμεταθετική ιδιότητα)

③ Ύπαρξη ουδέτερου στοιχείου: υπάρχει το 0 με $\alpha+0=\alpha$, $\forall \alpha\in\mathbb{R}$

④ Ύπαρξη αντιθέτου. $\forall \alpha\in\mathbb{R}$ υπάρχει ο αντίθετος του α που συμβολίζεται με $-\alpha$ και ισχύει ότι $\alpha+(-\alpha)=0$

* Άσκηση Να δείξεις: 1. Αν $\alpha+\beta=0 \to \beta=-\alpha$

2. $-(-\alpha)=\alpha$ (ο αντίθετος του $-\alpha$ είναι ο α)

Απόδειξη

1. $\alpha+\beta=0 \Rightarrow (-\alpha)+(\alpha+\beta)=(-\alpha)+0$

$\Rightarrow ((-\alpha)+\alpha)+\beta=-\alpha$

$\Rightarrow 0+\beta=-\alpha \Rightarrow \boxed{\beta=-\alpha}$

2. $\alpha+(-\alpha)=0$

$\Rightarrow \alpha=-(-\alpha)$

II. Ιδιότητες του $(\mathbb{R}, \cdot)$

⑤ $\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma$ (προσεταιριστική ιδιότητα)

⑥ $\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$ (μεταθετική ιδιότητα)

⑦ Ύπαρξη ουδέτερου στοιχείου: το 1 με $\alpha\cdot 1=\alpha$, $\forall \alpha\in\mathbb{R}$.

⑧ Ύπαρξη αντιστρόφου: $\forall \alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ υπάρχει ο αντίστροφος του α που συμβολίζεται με α^{-1} ή $\frac{1}{\alpha}$ και ισχύει ότι $\alpha\cdot\alpha^{-1}=1$

⑨ $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$ (επιμεριστική ιδιότητα)

$\alpha(-\beta)=(-\alpha)\beta=-(\alpha\cdot\beta)$

Πρόταση $\alpha\cdot 0=0$ (γι' αυτό το 0 δεν έχει αντίστροφο)

$\alpha\cdot 0=\alpha(\beta+(-\beta))=\alpha\beta+\alpha(-\beta)=\alpha\beta+(-\alpha\beta)=0$

III. Ιδιότητες του $(\mathbb{R}, <)$ $\quad (\alpha<\beta<\gamma \Rightarrow \alpha<\gamma)$

⑩ Τριχοτομία

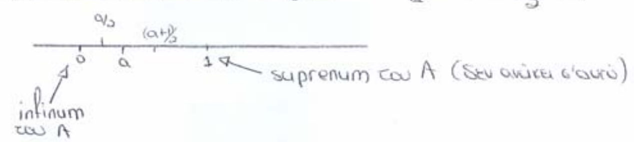
↳ Αν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ τότε ακριβώς ένα από τα επόμενα συμβαίνει είτε $\alpha>\beta$, είτε $\alpha=\beta$ είτε $\alpha<\beta$

⑪ $\alpha,\beta>0 \Rightarrow \alpha+\beta>0$ $\quad$ [ισοδύναμο $\alpha<\beta \Rightarrow \alpha+\gamma<\beta+\gamma \;\; \forall\gamma\in\mathbb{R}$

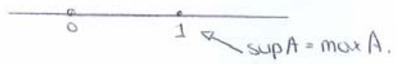
⑫ $\alpha,\beta>0 \Rightarrow \alpha\cdot\beta>0$ $\quad$ -"- $\alpha<\beta \Rightarrow \alpha\gamma<\beta\cdot\gamma \;\; \forall\gamma>0$]

* ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Οι ①-⑫ ιδιότητες ισχύουν και για το $\mathbb{Q}$

$A=(0,1)$ δεν έχει ούτε ελάχιστο ούτε μέγιστο $\quad 0<\frac{\alpha}{2}<\alpha<\frac{\alpha+1}{2}<1$



$A=(0,1]$



⑬ Ιδιότητα της πληρότητας των πραγματικών αριθμών.

➡ Κάθε μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει suprenum.

Ορισμοί

Έστω $\phi\neq A\subseteq\mathbb{R}$ (A: μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$)

(1) Ένας πραγματικός αριθμός $M\in\mathbb{R}$ καλείται **άνω φράγμα** του A αν για όλα τα $\alpha\in A \Rightarrow \underline{\alpha\leq M}$

· Αν το σύνολο A έχει κάποιο άνω φράγμα M $\quad (A\subseteq(-\infty,M])$ τότε το A καλείται **άνω φραγμένο**.

* ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: (i) αν M άνω φράγμα του A τότε M' άνω φράγμα του A για κάθε $M'>M$. Δηλαδή το διάστημα $[M,+\infty)$ αποτελείται από άνω φράγματα του A $\quad -\infty \quad M \quad M'$

(ii) αν M άνω φράγμα του A και $M\in A$ τότε $M=\max A$.

(2) Έστω ότι το A είναι άνω φραγμένο. Το $s\in\mathbb{R}$ καλείται **suprenum** του A αν το s είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A. Δηλαδή:

$$s=\min\{M\in\mathbb{R} : M \text{ άνω φράγμα του } A\}.$$

□ Ερώτηση 1: $\phi\neq A\subseteq\mathbb{R}$ και $x\in\mathbb{R}$ ώστε x <u>δεν</u> είναι άνω φράγμα. Τι σημαίνει αυτό;

↳ Υπάρχει $\alpha\in A$ ώστε $x<\alpha$.

□ Ερώτηση 2: Έστω ότι το A έχει suprenums ($\sup A=s$). Έστω $s'<s$...

↳ τότε το s' δεν είναι άνω φράγμα του A

αν $s'>s$

↳ τότε το s' είναι άνω φράγμα του A.

<u>Άσκηση</u> Έστω $A\subseteq\mathbb{R}$ μη κενό άνω φραγμένο και $s\in\mathbb{R}$ άνω φράγμα του A. Δείξτε ότι τα επόμενα είναι ισοδύναμα.

1) $s=\sup A$

2) για κάθε $s'<s$ υπάρχει $\alpha\in A$ ώστε $s'<\alpha\leq s$.