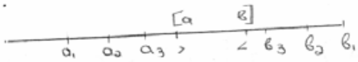
6.11.2007 Μάθημα 5ο

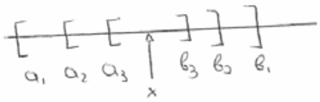
Αρχή Κιβωτισμού

, $[a_1,b_1]$, $[a_2,b_2]$, $[a_3,b_3]$, ... $[a_n,b_n]$ ... ακολουθία κλειστών και φραγμένων διαστημάτων

ώστε $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n,b_n]$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Τότε υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ που ανήκει σε όλα τα $[a_n,b_n]$

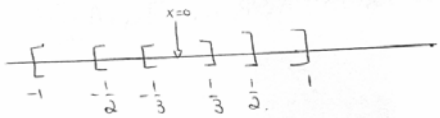
,2, ... δηλαδή $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n,b_n] \neq \emptyset$.





* ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

1. $a_n = -\frac{1}{n}$ $\quad b = \frac{1}{n}$



2. $a_n = -\frac{1}{n}$ $\quad b_n = 1 + \frac{1}{n}$

$\Rightarrow \quad [0,1] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right]$

* Απόδειξη αρχής κιβωτισμού

Θέτουμε $A = \{a_n : n = 1, 2, \dots\}$

Τότε το A είναι άνω φραγμένο και ειδικότερα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το b_n είναι άνω φράγμα του A (ερ: γιατί;). Άρα υπάρχει το $s = \sup A$ και ως ελάχιστο άνω φράγμα θα είναι μικρότερο ή ίσο του b_n, $\forall n \in \mathbb{N}$. Άρα $a_n \leq s \leq b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ και άρα s ανήκει στο $[a_n,b_n]$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

άνω φράγμα του $\{a_n\}$ — ελάχιστο άνω φράγμα.

— x —

f: 1-1 : αν $x_1, x_2 \in A$ και $x_1 \neq x_2$ τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$

f: επί : $B = \{ f(x) : x \in A \} = f[A]$

Θεώρημα

↳ Υπάρχει $f : \mathbb{Q}_+ \xrightarrow{1-1} \mathbb{N}$, όπου $\mathbb{Q}_+ = \{q \in \mathbb{Q} : q > 0\}$

Απόδειξη

Ορίζουμε $f(q) = 2^m \cdot 3^n$ αν $q = \frac{m}{n}$ όπου $\frac{m}{n}$ ανάγωγο

ΠΟΡΙΣΜΑ: Οι ρητοί αριθμοί γράφονται υπό τη μορφή ακολουθίας $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \dots\}$

Απόδειξη Από το παραπάνω θεώρημα υπάρχει $h : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ 1-1

Άρα το $h(\mathbb{Q}) = \{h(q) : q \in \mathbb{Q}\}$ είναι ένα άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{N}$ που μπορεί να γραφεί

ως $m_1 < m_2 < m_3 < \dots$ Τότε $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, q_3, \dots\}$ με q_n να είναι εκείνος ο ρητός

με $h(a_n) = m_n$

* **Ορισμός**

Κάθε απεικόνιση $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ καλείται **ακολουθία** πραγματικών αριθμών. Οι τιμές $a(1)$, $a(2), a(3) \dots a(n)$ καλούνται **όροι** της ακολουθίας και συμβολίζεται με a_1, a_2, a $\dots, a_n, \dots$

⟹ Κάθε ακολουθία συμβολίζεται με $a_1, a_2, a_3, \dots$ ή $(a_n)_n$ ή $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ή $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

1. Η σταθερή ακολουθία $a_n = c$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (όπου $c \in \mathbb{R}$ σταθερός)
   (παρατηρείστε ότι το $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \{c\}$)
2. $a_n = (-1)^n$, $n = 1, 2, \dots$ $a_1 = -1, a_2 = 1, a_3 = -1, a_4 = 1 \dots$
   $\{a_n, n \in \mathbb{N}\} = \{-1, 1\}$
3. $a_n = a + n \cdot \omega$ αριθμητική πρόοδος
   $a_n = 2n + 1$ $(\omega = 2, a = 1)$
4. $a_n = \vartheta^n$, $\vartheta > 0$ $a_n = n \cdot \vartheta$.

(Μάθημα 6ο)

Υπάρχουν (1) $f: \mathbb{N} \xrightarrow{1-1} \mathbb{Z}$

(2) $g: \mathbb{N} \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} \mathbb{Q}$ $\Rightarrow$ $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, q_3, \dots, q_n, \dots\}$

→ οι ρητοί μπορούν να γραφτούν υπό μορφή ακολουθίας.

Δεν υπάρχει $h: \mathbb{N} \xrightarrow{\text{επί}} \mathbb{R}$, δηλαδή, το $\mathbb{R}$ δεν γράφεται υπό την μορφή ακολουθίας.

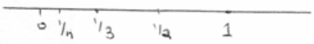
- Ακολουθία (πραγματικών αριθμών) είναι κάθε απεικόνιση από το $\mathbb{N}$ στο $\mathbb{R}$.

$a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $\qquad$ $a = (a_n)_n$

$a(1), a(2), a(3), \dots a(n), \dots$ $\qquad$ $\underset{a(1)}{\overset{\shortparallel}{a_1}}, a_2, a_3, \dots, a_4, \dots$ όροι της ακολουθίας

* Όρια Ακολουθίας

$a_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$ $\qquad$ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$



$a_1 > a_2 > \dots$ γνησίως φθίνουσα ακολουθία

$\inf\{\frac{1}{n} : n = 1, 2, \dots\} = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$

$\shortparallel$
μέγιστο κάτω φράγμα.

* Ορισμός

Έστω $(a_n)_n$ ακολουθία πραγματικών αριθμών και $a \in \mathbb{R}$. Λέμε ότι η ακολουθία $(a_n)_n$ **συγκλίνει** στο a ή **έχει όριο το a** και συμβολίζουμε:

$a_n \xrightarrow[n]{} a$ ή $\lim_n a_n = a$ όταν συμβαίνει το εξής:

$\Rightarrow$ Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ($n_0 = n_0(\varepsilon)$) ώστε $|a_n - a| < \varepsilon$ για όλα τα $n \geq n_0$.

- ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ
  - 1η $|a_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \Leftrightarrow a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$
  - 2η Αν $a_n = a$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (δηλαδή σταθερή ακολουθία) τότε $\lim a_n = a$.

Πράγματι, έστω $\varepsilon > 0$. Τότε $\forall n \geq 1 = n_0(\varepsilon)$ $\qquad$ $0 = |a_n - a| < \varepsilon$.

- **ΠΡΟΤΑΣΗ** Η ακολουθία $a_n = \frac{1}{n}$ έχει όριο το 0.

Απόδειξη

Έστω $\varepsilon > 0$. Πρέπει να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n \geq n_0$ $|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon$. Από την αρχή Αρχιμήδους-Ευδόξου υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{m} < \varepsilon$. Τότε για κάθε $n \geq m \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{m} < \varepsilon$. Θέτουμε $n_0 = m$. Τότε $\forall n \geq n_0 \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon$. Αφού λοιπόν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$ έχουμε $a_n \to 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: ακολουθία που δεν έχει όριο : $a_n = (-1)^n$

Πράγματι, έστω προς απαγωγή σε άτοπο ότι υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ με $a = \lim a_n$. Έστω $\varepsilon = \frac{1}{2}$.
Επειδή $a_n \to a$ θα πρέπει να υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|a_n - a| < \frac{1}{2}$ $\forall n \geq n_0$. Αυτό σημαίνει

$|a_n - a_m| < 2\varepsilon$ $\forall n, m \geq n_0$ $\left(|a_n - a_m| = |(a_n - a) - (a_m - a)| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \varepsilon + \varepsilon \right)$

Όμως $|a_{n_0} - a_{n_0+1}| = |(-1)^{n_0} - (-1)^{n_0+1}| = |(-1)^{n_0}|\,|1 - (-1)| = 2$.

Άτοπο

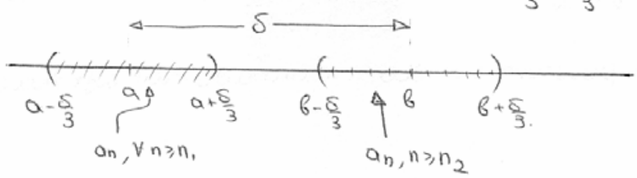
• **ΠΡΟΤΑΣΗ**: Το όριο μιας ακολουθίας αν υπάρχει είναι μοναδικό.

Απόδειξη

Έστω προς απαγωγή σε άτοπο ότι υπάρχει $(a_n)_n$ και $a \neq \beta$ πραγματικοί αριθμοί ώστε $a_n \to a$ και $a_n \to \beta$. Έστω $\delta = |a - \beta|$. Αφού $a \neq \beta$ έχουμε ότι $\delta > 0$. Εφόσον $a_n \to a$ υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $|a_n - a| < \frac{\delta}{3}$, $\forall n \geq n_1$ (1). Ομοίως, αφού $a_n \to \beta$ υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε $|a_n - \beta| < \frac{\delta}{3}$ $\forall n \geq n_2$ (2).

Από (1),(2) αν $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ έχουμε ότι $|a_n - a| < \frac{\delta}{3}$ και $|a_n - \beta| < \frac{\delta}{3}$ $\forall n \geq n_0$

Άτοπο αφού τότε $\delta = |a - \beta| \leq |a - a_{n_0}| + |a_{n_0} - \beta| < \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} = \frac{2\delta}{3}$



[Διαφορετικά: αν $\Delta_a = (a - \frac{\delta}{3}, a + \frac{\delta}{3})$ και $\Delta_\beta = (\beta - \frac{\delta}{3}, \beta + \frac{\delta}{3})$ τότε $\Delta_a \cap \Delta_\beta = \emptyset$. Όμως $a_{n_0} \in \Delta_a \cap \Delta_\beta \Rightarrow$ άτοπο.]

* Ορισμός του e

→ Είναι το $\boxed{\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \overset{\text{ορ}}{\equiv} e}$ $\simeq 2{,}718$

Η $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n = 1, 2, \dots$ είναι γνησίως αύξουσα και άνω φραγμένη.

- Μια ακολουθία $(a_n)_n$ καλείται **αύξουσα** αν $a_n \le a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $(a_1 \le a_2 \le a_3 \le \dots)$ 6.3

- Μια ακολουθία $(a_n)_n$ καλείται γνησίως αύξουσα αν $a_n < a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

- Η $(a_n)_n$ θα καλείται **άνω φραγμένη** αν υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ με $a_n \le M$, $\forall n \in \mathbb{N}$
  (ισοδύναμα το σύνολο των όρων της $(a_n)_n$, $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι <u>άνω φραγμένο</u>

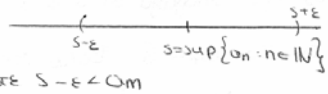
— <u>Θεώρημα</u>

↳ Έστω a_n αύξουσα και άνω φραγμένη ακολουθία. Έστω $s = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

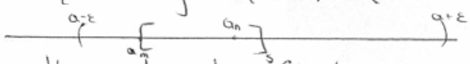
Τότε $a_n \to s$

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $\varepsilon > 0$. Θα βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n \ge n_0$, $|a_n - s| < \varepsilon$.



Επειδή $s - \varepsilon < s = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ έχουμε ότι υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $s - \varepsilon < a_m$



Ισχυριζόμαστε ότι $\forall n \ge m$ $|a_n - s| < \varepsilon$. (Άρα μπορούμε να θέσουμε $n_0 = m$). Ισοδύναμα $\forall n \ge m$, $a_n \in (s-\varepsilon, s+\varepsilon)$. Στην πραγματικότητα $\forall n \ge m$, $a_n \in [a_m, s]$

Πράγματι, επειδή $(a_n)_n$ ↑ έχουμε $a_m \le a_n$, $\forall n \ge m$ και επειδή s άνω φράγμα του $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, $a_n \le s$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow a_n \in [a_m, s] \subseteq (s-\varepsilon, s+\varepsilon)$ $\forall n \ge m$

— <u>ΠΟΡΙΣΜΑ</u>: Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία είναι συγκλίνουσα.