Μάθημα 3ο.   30.10.2007.

$\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ (3.1)

• Ένας αριθμός $x \in \mathbb{R}$ καλείται **άνω φράγμα** του A αν $a \leq x$, για όλα τα $a \in A$.

Το A λέγεται **άνω φραγμένο** αν υπάρχει άνω φράγμα x του A

π.χ $A = (0,1)$ κάθε $x \geq 1$ είναι άνω φράγμα του A

Το $\mathbb{R}$ δεν είναι άνω φραγμένο

*ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ : Αν x άνω φράγμα του A τότε και κάθε $x' > x$ είναι άνω φράγμα του A.

* $\sup A$ = ελάχιστο άνω φράγμα του $A = \min\{x \in \mathbb{R} : x$ άνω φράγμα του $A\}$

□ Αξίωμα της πληρότητας : Αν $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ άνω φραγμένο τότε υπάρχει το $\sup A$.

— Θεώρημα

↳ Το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Απόδειξη

Έστω προς απαγωγή σε άτοπο το $\mathbb{N}$ είναι άνω φραγμένο. Από την ιδιότητα της πληρότητας του $\mathbb{R}$ θα υπάρχει το $\sup \mathbb{N} = s \in \mathbb{R}$

Επειδή s είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του $\mathbb{N}$ το $s-1$ δεν είναι άνω φράγμα του $\mathbb{N}$ (διότι $s-1<s$)

Άρα υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $s-1<n \Rightarrow s<n+1$. Άρα το s δεν είναι άνω φράγμα του $\mathbb{N}$.
↳ Άτοπο

Συνεπώς το $\mathbb{N}$ $\boxed{\text{δεν}}$ είναι άνω φραγμένο.

— Θεώρημα

↳ Έστω $\theta > 0$. Το σύνολο $A = \{1\theta, 2\theta, 3\theta, 4\theta, \ldots, n\cdot\theta, \ldots\}$ δεν είναι άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$

Απόδειξη

Έστω ότι το σύνολο $A = \{1\theta, 2\theta, 3\theta, 4\theta, \ldots, n\cdot\theta, \ldots\}$ είναι άνω φραγμένο. Τότε (από αξίωμα πληρότητας του $\mathbb{R}$) υπάρχει το $\sup A = s \in \mathbb{R}$. Το $s-\theta$ δεν είναι άνω φράγμα του A αφού $s-\theta<s$.

Άρα υπάρχει φυσικός $n \in \mathbb{R}$ και $s-\theta < n\cdot\theta \Rightarrow s < n\theta+\theta = (n+1)\theta$

Και συνεπώς υπάρχει ~~το~~ σημείο του A που είναι γνήσια μεγαλύτερο του $s \Rightarrow$ Άτοπο

('Αρα s άνω φράγμα του A)

↳ Συνεπώς το A δεν είναι άνω φραγμένο.

(3.2)

• **ΠΟΡΙΣΜΑ 1**: (1). Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $x < n$.

(2). Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\theta > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $x < n \cdot \theta$.

• **ΠΟΡΙΣΜΑ 2**: Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Απόδειξη

Έστω $x = \frac{1}{\varepsilon}$. Από Πόρισμα 1(1) υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $\frac{1}{\varepsilon} < n \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon$.

* **Ορισμός**: Έστω $x \in \mathbb{R}$. **Ακέραιο μέρος** του x είναι ο ακέραιος $k \in \mathbb{Z}$ αριθμός n με την ιδιότητα $k \leq x < k+1$ και συμβολίζεται με $[x]$.

π.χ. $x = 3,1$ $[x] = 3$ / $x = -3,1$ $[-3,1] = -4$

$-\infty$ -4 -3 0 1 2 3

ΠΡΟΤΑΣΗ: Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει το $[x]$

Απόδειξη

Έστω $x \geq 0$

Έστω $M = \{n \in \mathbb{N} : x < n\}$

Το $M \neq \emptyset$ επειδή το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο. Από την αρχή της καλής διάταξης του $\mathbb{N}$ υπάρχει το $n_0 = \min A$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις για το n_0

Περίπτωση 1: $n_0 = 1$. Τότε $0 \leq x < 1$ και άρα $[x] = 0$

Περίπτωση 2: $n_0 > 0$. Τότε $n_0 - 1 \in \mathbb{N}$. Επειδή $n_0 - 1 < n_0 = \min M \Rightarrow n_0 - 1 \notin M \Rightarrow n_0 - 1 \leq x$.

Άρα $n_0 - 1 \leq x < n_0$ οπότε $[x] = n_0 - 1$.

— **Θεώρημα: Πυκνότητα των ρητών στο $\mathbb{R}$**

↳ **Μεταξύ δύο πραγματικών αριθμών υπάρχει ρητός.**

(Δηλαδή αν $a < b$ πραγματικοί τότε υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ με $a < q < b$)

Απόδειξη

Έστω $a < b$ πραγματικοί αριθμοί. Υποθέτουμε καταρχήν ότι $a > 0$. Έστω $\theta = b - a > 0$. Όπως είδαμε το σύνολο $\{1\theta, 2\theta, 3\theta\}$ δεν είναι άνω φραγμένο και άρα για το $x = 1$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $1 < n \cdot \theta = n(b - a) = nb - na$

a b $[na]$ na nb $n\theta$

Επειδή $a < n \cdot a$ έχουμε ότι $a \leq \underbrace{[na]}_{k} \leq n \cdot a$.

Έχουμε $k \leq n \cdot a < k+1$ ① (επειδή $k = [na]$)

Επειδή $1 < nb - na \Rightarrow na + 1 < nb$ και $k \leq n \cdot a \Rightarrow k+1 \leq na + 1$ $\Big\} \Rightarrow k+1 < nb$ ②

Δηλαδή $(k \leq) n \cdot a < k+1 < n \cdot b \Rightarrow a < \underbrace{\frac{k+1}{n}}_{q} < b$

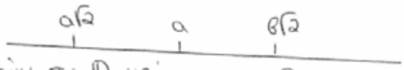
Θεώρημα: Πυκνότητα των άρρητων στο $\mathbb{R}$

↳ Μεταξύ δύο πραγματικών αριθμών υπάρχει άρρητος. (3.

(Δηλαδή αν $a<b$ πραγματικοί τότε υπάρχει $w \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ με $a<w$

Απόδειξη

Έστω $a<b$. Τότε $\sqrt{2}\cdot a<\sqrt{2}\cdot b$ και όπως γνωρίζουμε $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$



Από πυκνότητα των ρητών στο $\mathbb{R}$ υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ με $a\sqrt{2}<q<b\sqrt{2}$.

$\Rightarrow a<\frac{q}{\sqrt{2}}<b$. Θέτουμε $w=\frac{q}{\sqrt{2}}$. Τότε (αφού $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

$w \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

*** Ασκήσεις**

▶ Έστω $a \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $\sup A = a$ αν $A=\{q \in \mathbb{Q} : q<a\}$

Λύση

Το A είναι άνω φραγμένο (από το a) και άρα υπάρχει το $s=\sup A$. Επειδή ο a είναι ά φράγμα του A θα έχουμε $s \leq a$ (1) διότι το s είναι το ελάχιστο άνω φράγμα.

Από την (1) αρκεί να δειχθεί ότι δεν μπορεί να συμβεί $s<a$.

Πράγματι αν $s<a$ τότε από την πυκνότητα των ρητών θα υπάρχε $q \in \mathbb{Q}$ με $s<q<a$. Αλλά τότε (αφού $q<a$) $q \in A$ οπότε το s δεν είναι άνω φράγμα του A. Άτοπο αφού $s=$

▶ Δείξτε ότι δεν υπάρχει γνησίως φθίνουσα ακολουθία φυσικών αριθμών. (δηλαδή δεν υπάρχει $f:\mathbb{N}\to$ με f γνησίως φθίνουσα

Λύση

Έστω ότι υπάρχει $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ με $f \searrow$

Θέτω $A=f(\mathbb{N})=\{f(n): n \in \mathbb{N}\}$

Επειδή $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{N}$ μη κενό

Από την αρχή της καλής διάταξης υπάρχει το $m=\min A$. Τότε $m=f(n_0)$ για κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$. Επειδή $f \searrow$ $f(n_0+1)<f(n_0)=\min A$ άτοπο.

(Μάθημα 4ο) 31.10.2007

• Ασκήσεις

(4.1)

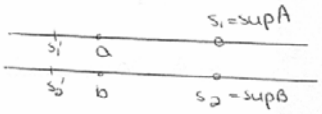
▶ Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}$ μη κενά άνω φραγμένα. Ορίζουμε $A+B = \{a+b : a \in A, b \in B\}$
Δείξτε ότι το $A+B$ είναι άνω φραγμένο και ότι $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.

Λύση

Έστω $s_1 = \sup A$ και $s_2 = \sup B$. Άρα $a \le s_1, \forall a \in A$

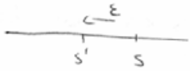
$$\frac{b \le s_2, \forall b \in B}{a+b \le s_1+s_2, \ \forall a \in A \text{ και } \forall b \in B} \leadsto \forall z \in A+B \quad z \le s_1+s_2$$

Άρα το s_1+s_2 είναι άνω φράγμα του $A+B$, οπότε το $A+B$ είναι άνω φραγμένο. Μένει να δειχθεί ότι το $s = s_1+s_2$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του $A+B$.
Ισοδύναμα αν $s' < s$ θα μπορούμε να βρούμε $a \in A$ και $b \in B$ με $s' < a+b$
(το s' όχι α.φ του $A+B$)



$\Big\}\ s_1'+s_2' < a+b$

Έστω $s' < s$. Τότε $s' = s - \varepsilon$ (όπου $\varepsilon = s - s'$)



και άρα $s' = (s_1+s_2) - \varepsilon$

$$= \left(s_1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) + \left(s_2 - \frac{\varepsilon}{2}\right) = s_1' + s_2' \quad \text{με } s_1' = s_1 - \frac{\varepsilon}{2} < s_1$$

και

$$s_2' = s_2 - \frac{\varepsilon}{2} < s_2$$

Επειδή $s_1' < s_1 = \sup A$ $\exists\, a \in A$ με $s_1' < a$
Όμοια $\exists\, b \in B \longrightarrow$ με $s_2' < b$ $\Big\}\ s_1'+s_2' = s' < a+b$.

———— × ————

* Ορισμοί

1. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Το A καλείται **πυκνό** στο $\mathbb{R}$, αν για κάθε $x<y$ στο $\mathbb{R}$ υπάρχει $a \in A$ με $x<a<y$.

2. Έστω $(G, *)$ σύνολο με μια διμελή πράξη $g_1 * g_2$.
   Αν
   i) $\exists$ ένα στοιχείο $g_0 \in G$ με $g * g_0 = g_0 * g = g \quad \forall g \in G$
   ii) $\forall g \in G$ υπάρχει $g' \in G$ με $g' * g = g * g' = g_0$
   iii) $(g_1 * g_2) * g_3 = g_1 * (g_2 * g_3)$

   τότε το G καλείται **ομάδα**.

* **Θεώρημα** (Ύπαρξη του $\sqrt{2}$) (συνέπεια του αξιώματος πληρότητας (suprenum))

↳ Υπάρχει $s \in \mathbb{R}$ με $s^2 = 2$.

(4.2)

Απόδειξη

Ορίζουμε $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \text{ και } x^2 < 2\}$ $\quad 0 \in A \Rightarrow A \neq \emptyset$ A άνω φραγμένο π.χ. αν $M=5$ τότε $\forall x \in A,\ x < 5$

(διαφορετικά $x \geq 5$, $2 > x$

Το A από την ιδιότητα της πληρότητας έχει suprenum.

Θέτουμε $s = \sup A$. Θα δείξω ότι $s^2 = 2$.

∘ Λήμμα : Έστω $s \in \mathbb{R}$

(1) Αν $s^2 < 2$ τότε υπάρχει $s' \in \mathbb{R}$ με $s < s'$ και $(s')^2 < 2$.

(2) Ομοίως, αν $s^2 > 2$ τότε υπάρχει $s' \in \mathbb{R}$ με $s > s'$ και $2 < (s')^2$

[Απόδειξη λήμματος: Θέτουμε $\varepsilon = \frac{|2 - s^2|}{s+2} > 0$ αν $s^2 \neq 2$ και $s > 0$

· Αν $s^2 < 2$ τότε $(s+\varepsilon)^2 < 2$ πράξεις

·· Αν $s^2 > 2$ τότε $(s-\varepsilon)^2 < 2$ πράξεις]

∘ Αν $s^2 < 2 \xrightarrow{\text{ΛΗΜΜΑ}} \exists s' > s$ και $(s')^2 < 2$. Όμως τότε $s' \in A$ άτοπο αφού $s' > s = \sup A$.

∘∘ Αν $s^2 > 2 \xrightarrow{\text{ΛΗΜΜΑ}} \exists s' < s$ και $(s')^2 > 2$.

$\Rightarrow \forall x \in A,\ x^2 < 2 < (s')^2 \rightsquigarrow x < s'\ \forall x \in A \rightsquigarrow s'$ α.φ. του A και $s' < \sup A$

Άτοπο

* **Ορισμοί**

· suprenum = ελάχιστο άνω φράγμα $\quad$ **infinum** = μέγιστο κάτω φράγμα.

· Έστω $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ και $m \in \mathbb{R}$. Το m καλείται **κάτω φράγμα** του A αν $m \leq a,\ \forall a \in A$.

[Πάλι αν m κάτω φράγμα του A τότε κάθε $m' \in (-\infty, m)$ **κάτω φραγμένο**. του A].

· $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ κάτω φραγμένο.

$\inf A$ = (infinum του A) = μέγιστο κάτω φράγμα του A = $\max\{m \in \mathbb{R} : m \text{ κάτω φράγμα του } A\}$

* **Θεώρημα**

↳ Για κάθε μη κενό κάτω φραγμένο υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ υπάρχει $\tau \in \mathbb{R}$ με $\tau = \inf A$.

Απόδειξη

↳ άσκηση για το Δ

? **Ερώτηση?** Έστω $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ άνω φραγμένο και έστω $s = \sup A$. (1.3)

Αν $s' < s$ τότε όπως γνωρίζουμε υπάρχει $a \in A$ με $s' < a \leq s$.

Υπάρχουν άπειρα $a \in A$ με αυτήν την ιδιότητα; ή όχι;

⇨ **Απάντηση**: Όχι

π.χ. $A = \{1, 2, 3\}$ $\sup A = 3 (= \max A) \Rightarrow s' = 2$

$A = (0,1) \cup \{2\}$ $\sup A = 2$ $\inf A = 0$

*Άσκηση

▷ $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ 1) $\sup A = ?$ 2) $\inf A = ?$ 3) Δείξτε ότι για κάθε $\tau' > \tau = \inf A$

υπάρχουν άπειρα $a \in A$ με $\tau < a < \tau'$

$A = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \right\}$

$\sup A = \max A = 1$

$\inf A = 0$

[Από την αρχή Αρχιμήδους - Ευδόξου για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n} < \varepsilon$ $\left(\frac{1}{\varepsilon} < n\right)$]

- Το 0 είναι κάτω φράγμα του A $\left(0 \leq \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}\right)$
- Το 0 είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του A.

Πράγματι αν $\tau' > 0$ τότε το τ' δεν είναι κάτω φράγμα του A.

Από Αρχιμήδους - Ευδόξου υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n} < \tau'$

$0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \tau'$