

Νόσσημα 3.2

30.10.2007.

$$\phi = A \subseteq \mathbb{R}$$

(3.1)

• Έως ορισμού $x \in \mathbb{R}$ καλείται ώω φράγμα τω A αν $a \leq x$, για όλα τα $a \in A$.

Το A λέγεται ώω φραγμένο αν υπάρχει ώω φράγμα x τω A

π.χ $A = (0, 1)$ κάθε $x \geq 1$ είναι ώω φράγμα τω A

Το \mathbb{R} δέν είναι ώω φραγμένο

* ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ : Αν x ώω φράγμα τω A τότε και κάθε $x' > x$ είναι ώω φράγμα τω A .

* $\sup A =$ ελάχιστο ώω φράγμα τω $A = \min \{ x \in \mathbb{R} : x \text{ ώω φράγμα τω } A \}$

□ Αξίωμα τωσ ηθρόκτωσ : Αν $\phi \neq A \subseteq \mathbb{R}$ ώω φραγμένο τότε υπάρχει το $\sup A$.

— Θεώρημα

↳ το \mathbb{N} δέν είναι ώω φραγμένο υποσύνολο τω \mathbb{R} .

Απόδειξη

Έστω προς αποχώρη σε άτοπο το \mathbb{N} είναι ώω φραγμένο. Από τω ιδιότητα τωσ ηθρόκτωσ τω \mathbb{R} θα υπάρχει το $\sup \mathbb{N} = s \in \mathbb{R}$

Επειδή s είναι το ελάχιστο ώω φράγμα τω \mathbb{N} το $s-1$ δέν είναι ώω φράγμα τω \mathbb{N}

(διότι $s-1 < s$)

Άρα υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $s-1 < n \Rightarrow s < n+1$. Άρα το s δέν είναι ώω φράγμα τω \mathbb{N} .

↳ Άτοπο

Συνεπώς το \mathbb{N} δέν είναι ώω φραγμένο.

— Θεώρημα

↳ Έστω $\vartheta > 0$. Το σύνολο $A = \{1\vartheta, 2\vartheta, 3\vartheta, 4\vartheta, \dots, n\vartheta, \dots\}$ δέν είναι ώω φραγμένο υποσύνολο τω \mathbb{R}

Απόδειξη

Έστω ότι το σύνολο $A = \{1\vartheta, 2\vartheta, 3\vartheta, 4\vartheta, \dots, n\vartheta, \dots\}$ είναι ώω φραγμένο. Τότε (από αξίωμα ηθρόκτωσ τω \mathbb{R}) υπάρχει το $\sup A = s \in \mathbb{R}$. Το $s-\vartheta$ δέν είναι ώω φράγμα τω A αφού $s-\vartheta < s$.

Άρα υπάρχει φυσικός $n \in \mathbb{R}$ και $s-\vartheta < n\vartheta \Rightarrow s < n\vartheta + \vartheta = (n+1)\vartheta$

Και συνεπώς υπάρχει σημείο τω A που είναι γνήσια μεγαλύτερο τω $s \Rightarrow$ Άτοπο

(Άρα s ώω φράγμα τω A)

↳ Συνεπώς το A δέν είναι ώω φραγμένο.

• ΠΡΟΤΑΣΗ 1: (1). Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $x < n$.

(3.2)

(2). Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\delta > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $x < n \cdot \delta$.

• ΠΡΟΤΑΣΗ 2: Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

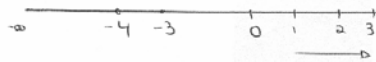


Απόδειξη

Έστω $x = \frac{1}{\varepsilon}$. Από πρόταση (1) υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $\frac{1}{\varepsilon} < n \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon$.

* Ορισμός: Έστω $x \in \mathbb{R}$. Ακέραιο μέρος του x είναι ο ακέραιος $k \in \mathbb{Z}$ αριθμός n με την ιδιότητα $k \leq x < k+1$ και συμβολίζεται με $[x]$.

π.χ. $x = 3,1$ $[x] = 3$ / $x = -3,1$ $[-3,1] = -4$



ΠΡΟΤΑΣΗ: Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει το $[x]$

Απόδειξη

Έστω $x \geq 0$

Έστω $M = \{n \in \mathbb{N} : x < n\}$

Το $M \neq \emptyset$ επειδή το \mathbb{N} δεν είναι άνω φραγμένο. Από την αρχή της εκθετικής διαδικασίας του \mathbb{N} υπάρχει

το $n_0 = \min A$

Διακρίνουμε τις εφ'όσον περιπτώσεις για το n_0

Περίπτωση 1: $n_0 = 1$. Τότε $0 \leq x < 1$ και άρα $[x] = 0$

Περίπτωση 2: $n_0 > 0$. Τότε $n_0 - 1 \in \mathbb{N}$. Επειδή $n_0 - 1 < n_0 = \min M \Rightarrow n_0 - 1 \notin M \Rightarrow n_0 - 1 \leq x$.

Άρα $n_0 - 1 < x < n_0$ άρα $[x] = n_0 - 1$.

— Θεώρημα: Πυκνότητα των ρητών στο \mathbb{R}

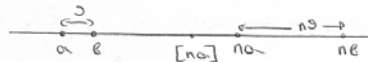
↳ Μεταξύ δύο πραγματικών αριθμών υπάρχει ρητός.

(Ανταξύ αν $a < b$ πραγματικοί τότε υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ με $a < q < b$)

Απόδειξη

Έστω $a < b$ πραγματικοί αριθμοί. Υποθέτουμε καταρχήν ότι $a > 0$. Έστω $\delta = b - a > 0$. Όπως είδαμε το σύνολο $\{1, 2, 3, \dots\}$ δεν είναι άνω φραγμένο και άρα για τον $x = 1$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με

$$1 < n \cdot \delta = n(b-a) = nb - na$$



Επειδή $0 < n \cdot a$ έχουμε ότι $a \leq [na] \leq n \cdot a$.

Έχουμε $k \leq n \cdot a < k+1$ (επειδή $k = [na]$)

Επειδή $k \leq n \cdot a \Rightarrow na + 1 < n \cdot b$
 $k \leq n \cdot a \Rightarrow k+1 \leq na+1$ } $\Rightarrow k+1 < n \cdot b$

Ανταξύ $(k \leq) n \cdot a < k+1 < n \cdot b \Rightarrow 0 < \frac{k+1}{n} < b$

Λήμμα: Η πυκνότητα των ρητών στο \mathbb{R}

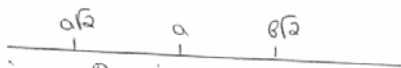
↳ Μεταξύ δύο πραγματικών αριθμών υπάρχει άρρητος.

(3.1)

(Απόδειξη αν $a < b$ πραγματικοί τότε υπάρχει $w \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ με $a < w$

Απόδειξη

Έστω $a < b$. Τότε $\sqrt{2} \cdot a < \sqrt{2} \cdot b$ και ίσως περιφράξουμε $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$



Από πυκνότητα των ρητών στο \mathbb{R} υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ με $a\sqrt{2} < q < b\sqrt{2}$.

$\Rightarrow a < \frac{q}{\sqrt{2}} < b$. Θέτουμε $w = \frac{q}{\sqrt{2}}$. Τότε (αφού $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$)
 $w \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

* Ασκήσεις

▷ Έστω $a \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $\sup A = a$ αν $A = \{q \in \mathbb{Q} : q < a\}$

Λύση:

Το A είναι άνω φραγμένο (από τον a) και άρα υπάρχει το $s = \sup A$. Επειδή ο a είναι άνω φράγμα του A θα έχουμε $s \leq a$ (1) διότι το s είναι το ελάχιστο άνω φράγμα.

Από την (1) αρκεί να δείξουμε ότι δεν μπορεί να συμβεί $s < a$.

Πράγματι αν $s < a$ τότε από την πυκνότητα των ρητών θα υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ με $s < q < a$. Αλλά τότε (αφού $q < a$) $q \in A$ οπότε το s δεν είναι άνω φράγμα του A . Άρα αφού $s =$

▷ Δείξτε ότι δεν υπάρχει γνησίως φθίνουσα ακολουθία φυσικών αριθμών (επειδή δεν υπάρχει $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ με f γνησίως φθίνουσα

Λύση:

Έστω ότι υπάρχει $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ με $f \searrow$

Θέτω $A = f(\mathbb{N}) = \{f(n) : n \in \mathbb{N}\}$

Επειδή $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{N}$ μη κενό

Από την αρχή της κατ'ής διάταξης υπάρχει το $m = \min A$. Τότε $m = f(n_0)$ για κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$

Επειδή $f \searrow$ $f(n_0 + 1) < f(n_0) = \min A$ άτοπο.

Ασκήσεις

(4.1)

▶ Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}$ μη κενά άνω φραγμένα. Ορίσουμε $A+B = \{a+b : a \in A, b \in B\}$. Δείξτε ότι το $A+B$ είναι άνω φραγμένο και ότι $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.

Λύση

Έστω $s_1 = \sup A$ και $s_2 = \sup B$. Άρα $a \leq s_1, \forall a \in A$

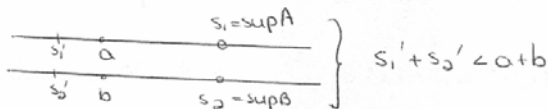
$$b \leq s_2, \forall b \in B$$

$$a+b \leq s_1+s_2, \forall a \in A \text{ και } \forall b \in B \rightsquigarrow \forall z \in A+B, z \leq s_1+s_2$$

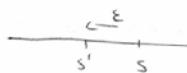
Άρα το s_1+s_2 είναι άνω φράγμα του $A+B$, οπότε το $A+B$ είναι άνω φραγμένο. Μένει να δείξει ότι το $s = s_1+s_2$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του $A+B$.

Για να δείξουμε ότι $s' < s$ θα μπορούμε να βρούμε $a \in A$ και $b \in B$ με $s' < a+b$

(το s' όχι α.φ του $A+B$)



Έστω $s' < s$. Τότε $s' = s - \epsilon$ (όπου $\epsilon = s - s'$)



$$\text{και άρα } s' = (s_1+s_2) - \epsilon$$

$$= (s_1 - \frac{\epsilon}{2}) + (s_2 - \frac{\epsilon}{2}) = s_1' + s_2' \quad \text{με } s_1' = s_1 - \frac{\epsilon}{2} < s_1$$

Επειδή $s_1' < s_1 = \sup A \exists a \in A$ με $s_1' < a$

Όμοια $\exists b \in B \rightarrow$ με $s_2' < b$ } $s_1' + s_2' = s' < a+b$.

$$\text{και } s_2' = s_2 - \frac{\epsilon}{2} < s_2$$

* Ορισμοί

1) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Το A καλείται **πυλώ** στο \mathbb{R} , αν για κάθε $x < y$ στο \mathbb{R} υπάρχει $a \in A$ με $x < a < y$.

2) Έστω $(G, *)$ άνωτο με μια διμερή πράξη $g_1 * g_2$.

Αν i) \exists ένα στοιχείο $g_0 \in G$ με $g * g_0 = g_0 * g = g \quad \forall g \in G$

ii) $\forall g \in G$ υπάρχει $g' \in G$ με $g' * g = g * g' = g_0$

iii) $(g_1 * g_2) * g_3 = g_1 * (g_2 * g_3)$

τότε το G καλείται ομάδα.

* Θεώρημα (Υπαρξη του $\sqrt{2}$) (ωμέγεια του υψίστου πηρύσιου (supremum))

↳ Υπάρχει $s \in \mathbb{R}$ με $s^2 = 2$.

4.2

Απόδειξη

Ορίσμε $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \text{ και } x^2 < 2\}$ $0 \in A \Rightarrow A \neq \emptyset$ A ώω φραγμένο

Το A από την ιδιότητα της πηρύσιου έχει supremum.

Θέτμε $s = \sup A$. Θα δείξω ότι $s^2 = 2$.

π.χ. αν $M = 5$ τότε

$\forall x \in A, x < 5$

(διαφορετικά $x > 5, 2 > x$)

◦ Λήμμα: Έστω $s \in \mathbb{R}$

(1) Αν $s^2 < 2$ τότε υπάρχει $s' \in \mathbb{R}$ με $s < s'$ και $(s')^2 < 2$.

(2) Ομοίως, αν $s^2 > 2$ τότε υπάρχει $s' \in \mathbb{R}$ με $s > s'$ και $2 < (s')^2$

[Απόδειξη λήμματος: Θέτμε $\epsilon = \frac{2-s^2}{s+2} > 0$ αν $s^2 \neq 2$ και $s > 0$]

- Αν $s^2 < 2$ τότε $(s+\epsilon)^2 < 2$ πρῶτος
- Αν $s^2 > 2$ τότε $(s-\epsilon)^2 < 2$ πρῶτος

◦ Αν $s^2 < 2$ $\exists s' > s$ και $(s')^2 < 2$. Όμως τότε $s' \in A$ άρα άρα $s' > s = \sup A$.

◦ Αν $s^2 > 2$ $\exists s' < s$ και $(s')^2 > 2$.

$\Rightarrow \forall x \in A, x^2 < 2 < (s')^2 \Rightarrow \forall x \in A, x < s'$ άρα $s' < \sup A$

Όταν

* Ορισμοί

• supremum = ελάχιστο ώω φράγμα infimum = μέγιστο κάτω φράγμα.

• Έστω $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ και $m \in \mathbb{R}$. Το m καλείται κάτω φράγμα του A αν $m \leq a, \forall a \in A$.

[Πάτι αν m κάτω φράγμα του A τότε κάθε $m' \in (-\infty, m)$ κάτω φραγμένο του A].

• $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ κάτω φραγμένο.

$\inf A = (\text{infimum του } A) = \text{μέγιστο κάτω φράγμα του } A = \max \{m \in \mathbb{R} : m \text{ κάτω φράγμα του } A\}$

* Θεώρημα

↳ Για κάθε μη κενό κάτω φραγμένο υποσύνολο A του \mathbb{R} υπάρχει $\tau \in \mathbb{R}$ με $\tau = \inf A$.

Απόδειξη

↳ άσκηση για το \square

? Ερώτηση? Έστω $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ άνω φραγμένο και έστω $s = \sup A$.

Αν $s' < s$ τότε όπως γνωρίζουμε υπάρχει $a \in A$ με $s' < a \leq s$

Υπάρχουν άπειρα $a \in A$ με αυτήν την ιδιότητα; ή όχι;

(4.3)

⇒ Απάντηση:

Οχι
π.χ. $A = \{1, 2, 3\}$ $\sup A = 3 \in \max A \Rightarrow s' = 2$

$A = (0, 1) \cup \{0\}$ $\sup A = 1 \notin A \Rightarrow \inf A = 0$

*Άσκηση

▷ $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ 1) $\sup A = ?$ 2) $\inf A = ?$ 3) Δείξτε ότι για κάθε $\tau > \inf A$

υπάρχουν άπειρα $a \in A$ με $\tau < a \leq s'$

$A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$

$\sup A = \max A = 1$
 $\inf A = 0$

[Από την αρχή Αρχιμήδους - εύκολο]
για κάθε $\varepsilon > 0$
υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε
 $\frac{1}{n} < \varepsilon$ (~~$\frac{1}{\varepsilon} < n$~~)

• Το 0 είναι κάτω φράγμα του A ($0 \leq \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$)

• Το 0 είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του A .

Πρόκειται αν $\tau > 0$ τότε το τ δεν είναι κάτω φράγμα του A .

Από Αρχιμήδους - Εύκολο υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n} < \tau$

$0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \tau$