20.11.2007

(Μάθημα 9ο)

(9.1)

* <u>ΑΣΚΗΣΗ</u>: Έστω $a_n > 0$ και $a_n \to a$. Δείξτε ότι $a \geq 0$ και $\sqrt{a_n} \to \sqrt{a}$

<u>Λύση</u> $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ $\forall a, b \geq 0$ (Πρόταση) με ένα τουλάχιστο θετικό.

<u>1η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ</u>: $a > 0$

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $a_n \to a$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|a_n - a| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$.

Άρα $\forall n \geq n_0$, $\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}\right| = \dfrac{|a_n - a|}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a}} \leq \dfrac{|a_n - a|}{\sqrt{a}} < \dfrac{\varepsilon \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \varepsilon$

Συνεπώς $\sqrt{a_n} \to \sqrt{a}$

<u>2η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ</u>: $a = 0$

$a_n \to 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0$ ώστε $\forall n \geq n_0$ $|a_n - 0| = |a_n| = a_n < \varepsilon$.

Έστω $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ $0 \leq a_n < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : 0 \leq \sqrt{a_n} < \sqrt{\varepsilon}$ $\forall n \geq n_0$

Άρα $\sqrt{a_n} \to 0$.

▫ΣΗΜΕΙΩΣΗ: ΓΕΝΙΚΑ αν $a_n \geq 0$ και $a_n \to a$ τότε για οποιοδήποτε σταθερό $k \in \mathbb{N}$ $\sqrt[k]{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt[k]{a}$.

* <u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u>: (i) Για κάθε $\vartheta \in (-1,1)$ (ισοδ. $|\vartheta| < 1$) ισχύει ότι $\vartheta^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

(ii) $\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} \to 1$

(iii) $\sqrt[n]{a} \to 1$ για κάθε $a > 0$.

Απόδειξη

(i) $\vartheta^n \to 0$ $\forall \vartheta \in (-1,1)$ <u>Α' ΤΡΟΠΟΣ</u>

▫ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1.

Έστω $0 < \vartheta < 1$. Τότε $\dfrac{1}{\vartheta} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\vartheta} = 1 + \delta$ με $\delta > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{\vartheta^n} = (1+\delta)^n \overset{\text{ανισότητα Bernoulli}}{\geq} 1 + n\cdot\delta > n\delta$.

$\Rightarrow \dfrac{1}{\vartheta^n} > n\cdot\delta$ με $\delta > 0 \Rightarrow \vartheta^n < \dfrac{1}{n\cdot\delta}$ $\forall n \in \mathbb{N} \to \forall n \in \mathbb{N}$ $\underset{\downarrow 0}{0} < \vartheta^n < \underset{\downarrow 0}{\dfrac{1}{\delta}\cdot\dfrac{1}{n}}$.

Άρα, από θεώρημα ισοσυγκλινουσών $\vartheta^n \to 0$.

▫ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2.

Έστω $\vartheta = 0$. Τότε $\vartheta^n = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ και άρα $\vartheta^n \to 0$

▫ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3

Έστω $-1 < \vartheta < 0 \Rightarrow 0 < |\vartheta| < 1 \xRightarrow{\text{περ 1}} |\vartheta|^n \to 0 \to |\vartheta^n| \to 0 \overset{\text{ΠΡΟΤΑΣΗ}}{\Leftrightarrow} \vartheta^n \to 0$.

Β' ΤΡΟΠΟΣ

(9.2)

Έστω $0<\theta<1$.

<u>Βήμα1</u>: Η ακολουθία $(\theta^n)_n$ είναι γνησίως φθίνουσα και κάτω φραγμένη από το 0.

$(\theta^{n+1} = \theta^n \cdot \theta < \theta^n \cdot 1 = \theta^n \Rightarrow \theta^{n+1} < \theta^n \Rightarrow (\theta^n)_n \searrow$. Επίσης $0<\theta \Rightarrow 0<\theta^n \ \forall n\in\mathbb{N})$

Άρα η $(\theta^n)_n$ είναι συγκλίνουσα. Έστω $x = \lim_n \theta^n$. Επειδή $0<\theta^n \Rightarrow 0\le x$.

Έχουμε $\theta^{n+1} = \theta\cdot\theta^n \Leftrightarrow a_{n+1} = \theta\cdot a_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$ όπου $a_n=\theta^n$.

Θέτουμε $b_n = a_{n+1} = \theta^{n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Τότε $b_n = \theta\cdot a_n \Rightarrow \lim b_n = \theta\cdot x$
Επίσης $(b_n)_n$ υπακολουθία της $(a_n)_n \Rightarrow \lim b_n = x$ $\Big\}\Rightarrow$

$\Rightarrow x = \theta\cdot x \Rightarrow \underline{x=0}$

(ii) $\sqrt[n]{n}\to 1$

Για $n>1 \Rightarrow \sqrt[2n]{n}>1 \Rightarrow \forall n>1, \exists\ \delta_n>0 \quad \sqrt[2n]{n} = 1+\delta_n \Rightarrow$

$$n^{\frac{1}{2n}} = 1+\delta_n \Rightarrow n^{\frac{1}{2}} = (1+\delta_n)^n \geq 1+n\cdot\delta_n > n\cdot\delta_n.$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} > n\cdot\delta_n \Rightarrow 0<\delta_n<\frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow \delta_n\to 0$$

Άρα $\forall n>1$, $\sqrt[2n]{n} = 1+\delta_n$ με $\delta_n\to 0 \Rightarrow \sqrt[n]{n} = (1+\delta_n)^2 \to 1^2 = 1$.

(iii) $\sqrt[n]{a}\to 1$, $\forall a>0$

Έστω $a>1$

Το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο. Άρα υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $a<n_0$.

$$\text{Οπότε } \forall n\geq n_0,\ 1<a<n \Rightarrow \forall n\geq n_0 \quad \sqrt[n]{1}, \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{n}$$

$$\Rightarrow \underset{\downarrow 1}{1} < \sqrt[n]{a} < \underset{\downarrow 1}{\sqrt[n]{n}},\ \forall n\geq n_0 \Rightarrow \sqrt[n]{a}\to 1.$$

Αν $a=1$, $\sqrt[n]{a} = 1\to 1$ (σταθερή ακολουθία).

Έστω $0<a<1$. Τότε $\frac{1}{a}>1 \overset{\text{περ. 1}}{\Longrightarrow} \sqrt[n]{\frac{1}{a}}\to 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{a}}\to 1 \Rightarrow \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt[n]{a}}\right)} \to \frac{1}{1} \Rightarrow \sqrt[n]{a}\to 1$

***<u>Άσκηση</u>** : Έστω $a_n = \sqrt[n]{2^n+3^n+5^n}$. Βρείτε το $\lim a_n = ?$

$$\underset{\downarrow 5}{5} = \sqrt[n]{5^n} \le a_n \le \sqrt[n]{5^n+5^n+5^n} = \sqrt[n]{3\cdot 5^n} = \underset{\downarrow 5}{\sqrt[n]{3}\cdot 5}$$

Άρα από θεώρημα ισοσυγκλινουσών $a_n\to 5$.

*Άσκηση: Έστω $\lambda \neq 0$ και $(a_n)_n$ γεωμετρική πρόοδος με λόγο λ, δηλαδή $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, 1) Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda$

2) Αν $0<\lambda<1$ τότε $\lim_n a_n = 0$.

9.3

Λύση

1) $a_n = a_1 \cdot \lambda^{n-1}$, $n = 1,2,3,\ldots$

$\Rightarrow a_n = \frac{a_1}{\lambda} \cdot \lambda^n \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{a_1}{\lambda}} \cdot \lambda \to 1 \cdot \lambda = \lambda.$

2) $a_n = \frac{a_1}{\lambda} \cdot \lambda^n \to \frac{a_1}{\lambda} \cdot 0 = 0$

— Θεώρημα

↳ Έστω $(a_n)_n$ ακολουθία με $a_n > 0$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει το $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$, έστω $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$. Τότε $\boxed{1.}$ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda$

$\boxed{2.}$ αν $0 \leq \lambda < 1$ τότε $a_n \to 0$

Απόδειξη → (εξήγηση): Επειδή $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda \Rightarrow$ Για αρκετά μεγάλο $n \in \mathbb{N}$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} \simeq \lambda$

$\Rightarrow$ Για $n \geq n_0$ (για κάποιο μεγάλο n_0) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda \Leftrightarrow a_{n+1} \simeq \lambda \cdot a_n \Leftrightarrow (a_n)_{n \geq n_0}$ γεωμετρική πρόοδο με λόγο λ.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

$\boxed{1.}$ $\sqrt[n]{a} \to 1$: Θέτουμε $a_n = a$ $\forall n$. Τότε $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a}{a} = 1 \to 1 = \lambda$. Άρα $\underset{\sqrt[n]{a}}{\overset{\|}{\sqrt[n]{a_n}}} \to 1$.

$\boxed{2.}$ $\sqrt[n]{n} \to 1$ $\quad a_n = n \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} \to 1$.

$\boxed{3.}$ $\sqrt[n]{n!} \to \infty$

$a_n = n! \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1 \to \infty$

$\boxed{4.}$ $a_n = n^k \cdot \theta^n$ όπου $k \in \mathbb{N}$ $0<\theta<1$ σταθεροί

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^k \cdot \theta^{n+1}}{n^k \cdot \theta^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^k \cdot \theta \to 1^k \cdot \theta = \theta < 1.$$

Άρα $n^k \cdot \theta^n \to 0$.

$\boxed{5.}$ Έστω $(a_n)_n$ ακολουθία θετικών όρων με $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a$.

Ορίζω $b_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$

Τότε $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot a_{n+1}}{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} = a_{n+1} \to a \overset{\text{θεωρ.}}{\Rightarrow} \sqrt[n]{b_n} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \to a.$