(Μάθημα 8ο) 14.11.2007.

Άσκηση Αν το $a_n + b_n \to \ell$ και $a_n \to a$ τότε πού τείνει το b_n; και συγκλίνει ή όχι;

Λύση

$(a_n+b_n) - a_n \to \ell - a \Rightarrow \boxed{b_n \to \ell - a}$ (8.1)

ΕΡΩΤΗΣΗ : Είναι δυνατόν το άθροισμα δύο ακολουθιών να συγκλίνει και καμμία από τις ακολουθίες να μην συγκλίνει;

Λύση

Ναι! Παράδειγμα: $a_n = (-1)^n$ + $b_n = -(-1)^n = (-1)^{n+1} \Rightarrow a_n + b_n = 0$.

Άσκηση 1. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $(q_n)_n$ από ρητούς με $q_n \to x$.
2. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $(\tau_n)_n$ από άρρητους με $\tau_n \to x$

Απόδειξη

1. Έστω $x \in \mathbb{R}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ επιλέγουμε $q_n \in \mathbb{Q}$ με $x - \frac{1}{n} < q_n < x + \frac{1}{n}$.

Αυτό μπορεί να γίνει από την πυκνότητα των ρητών στο $\mathbb{R}$ ($\Leftrightarrow$ μεταξύ δύο διαφορετικών πραγματικών υπάρχει ρητός.) Έτσι σχηματίζουμε μια ακολουθία ρητών $(q_n)_n$. Από θεώρημα ισοσυγκλινουσών αφού $x \pm \frac{1}{n} \to x$ έχουμε ότι $q_n \to x$

2. (σαν άσκηση...)

* <u>Ο αριθμός e</u>

ΠΡΟΤΑΣΗ - ΟΡΙΣΜΟΣ.

↳ Η ακολουθία $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n = 1, 2, 3, \dots$ είναι γνησίως αύξουσα και άνω φραγμένη.
Ειδικότερα, αν θέσουμε $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ τότε :

1. $a_n < b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
2. $a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots b_n < \dots < b_2 < b_1$ δηλαδή $(a_n) \nearrow$, $(b_n) \searrow$
3. $\lim\limits_n a_n = \lim\limits_n b_n$

Το κοινό όριο των $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ συμβολίζεται με $e = \lim\limits_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim\limits_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

$$\boxed{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{(n+1)^n}{n^n}}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e \simeq 2{,}71828\dots$$

<u>Απόδειξη</u> (πρότασης)

Έστω $n \geq 2$. Τότε $\frac{a_n}{b_{n-1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n} = \left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n}{n-1}}\right)^n = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n > 1 - n \cdot \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{a_n}{b_{n-1}} > 1 - \frac{1}{n} \Rightarrow a_n \geq b_{n-1}\left(1-\frac{1}{n}\right) = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n\left(1-\frac{1}{n}\right) =$$

$$= a_{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right) = a_{n-1}\underbrace{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)}_{\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n} = 1} > 1.$$

$$\Rightarrow a_n > a_{n-1} \Rightarrow a_n \nearrow.$$

▶ Άσκηση: Θεωρώντας το $\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}$ με ανάλογη διαδικασία έχουμε ότι $b_{n-1} > b_n \Rightarrow b_n \searrow$

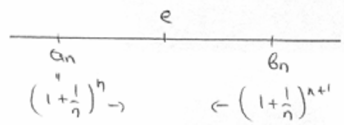
Επίσης, $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = a_n$.

Άρα $a_n < b_n$ $(a_n)\nearrow$ $b_n \searrow$

Επομένως, $a_n < b_n < b_1$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (a_n)_n$ άνω φραγμένη από το b_1

Επίσης $a_1 < a_n < b_n$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow b_n \searrow$ και κάτω φραγμένη από το a_1.

Ως μονότονες και φραγμένες οι $(a_n)_n$ και $(b_n)_n$ είναι συγκλίνουσες.



* Άσκηση: Δείξτε ότι $\forall n \in \mathbb{N}$ $|e-a_n| < \frac{a_n}{n} < \frac{4}{n}$.

• ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω $(a_n)_n$ ακολουθία πραγματικών αριθμών. Τότε $a_n \to 0 \Leftrightarrow |a_n| \to 0$

Απόδειξη: $|a-0| = |a| = \big||a|-0\big|$ $\forall a \in \mathbb{R}$.

• ΕΡΩΤΗΣΗ: ① Αν $a_n \to a \overset{?}{\Rightarrow} |a_n| \to |a|$;

② Αντίστροφα αν $|a_n| \to x \Rightarrow (a_n)_n$ συγκλίνει στο x ή $-x$?

Αποδείξεις

① (σαν άσκηση)

② Αν η $|a_n|_n$ είναι συγκλίνουσα δεν έπεται κατ' ανάγκη ότι $(a_n)_n$ είναι συγκλίνουσα παρά μόνο αν $|a_n| \to 0$ π.χ. $a_n = (-1)^n$ όχι συγκλίνουσα αλλά $|a_n| = 1 \to 1$