13.11.2007

Μάθημα 7ο.

Ακολουθία πραγματικών αριθμών εννοούμε κάθε συνάρτηση $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Οι όροι της ακολουθίας είναι οι τιμές $a(1), a(2), \ldots$ που συμβολίζονται με $a_1, a_2, \ldots$. Η ακολουθία συμβολίζεται με $(a_n)_n$.

(7.1)

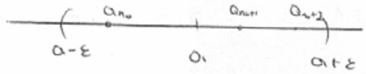
Έστω $(a_n)_n$ ακολουθία και $a \in \mathbb{R}$

$a_n \to a$ (ή $\lim_n a_n = a$) αν $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

$$\Updownarrow$$

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon.$$



▸ Κάθε ανοικτό διάστημα με κέντρο το a περιέχει τελικά όλους τους όρους της $(a_n)_n$.

* ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω $(a_n)_n$ ακολουθία και $a \in \mathbb{R}$. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα

1. $a_n \not\to a$ (Η $(a_n)_n$ δεν συγκλίνει στο a)
2. Υπάρχει $\varepsilon > 0$ και $M \subseteq \mathbb{N}$ άπειρο ώστε $\forall n \in M$, $|a_n - a| \geq \varepsilon$

(δηλ. υπάρχει ανοικτό διάστημα I με κέντρο το a ώστε άπειρο πλήθος όρων της $(a_n)_n$ βρίσκεται εκτός του I)

[Έστω $(a_n)_n$. Τελικό τμήμα της $(a_n)_n$ είναι η ακολουθία $(a_n)_{n \geq n_0}$ για κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$]

▸ Άσκηση

Έστω $(a_n)_n$ με $a_n = \begin{cases} n, & \text{αν } n \leq 10^6 \\ \frac{1}{n}, & \text{αν } n > 10^6 \end{cases}$. Βρείτε το $\lim a_n$

Λύση

$\lim a_n = 0$. Πράγματι, $\ldots \frac{1}{10^6+1}$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & 10^6 \\ \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & & \\ a_1 & a_2 & a_3 & & \end{array}$$

ΤΑΣΗ : Έστω $(a_n)_n$ ακολουθία και $a \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim a_n = a$.
Έστω $n_0 \in \mathbb{N}$ και $(b_n)_n$ ακολουθία με $a_n = b_n$ $\forall n \geq n_0$. Τότε $\lim b_n = a$.

οδειξη
Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $a_n \to a$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για όλα τα $n \geq n_0$, $|a_n - a| < \varepsilon$ ①

ταμε $n_1 = \max(n_0, m_0)$. Τότε $\forall n \geq n_1$ από την ①, $|\overset{b_n}{a_n} - a| < \varepsilon$ και $a_n = b_n$.

Υπόδειξη: Να θέσετε $m_0 = \max \Delta$

ΚΟΛΟΥΘΙΕΣ και ΔΙΑΤΑΞΗ.

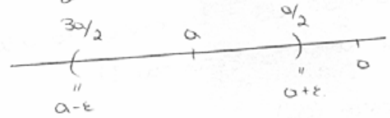
*ΠΡΟΤΑΣΗ : Έστω $(a_n)_n$ ακολουθία, $a \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim a_n = a$ και $a_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Τότε $a \geq 0$.

Απόδειξη
Έστω προς απαγωγή σε άτοπο ότι $\lim a_n = a < 0$. Θέταμε $\varepsilon = \frac{|a|}{2} > 0$

Αφού $a_n \to a$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n \geq n_0$ $a_n \in \left(\frac{3a}{2}, \frac{a}{2}\right)$

Άρα $a_n < \frac{a}{2} < 0$ $\forall n \geq n_0 \Rightarrow a_n < 0$ $\forall n \geq n_0$ Άτοπο



• ΠΟΡΙΣΜΑ : Έστω $(a_n)_n, (b_n)_n$ ακολουθίες και $a = \lim a_n$, $b = \lim b_n$.
Αν $a_n \geq b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ τότε $a \geq b$.

Απόδειξη
Θέταμε $\gamma_n = a_n - b_n$, $n \in \mathbb{N}$. Τότε $\gamma_n \geq 0$ και όπως θα δούμε (ακολουθίες και πε
$\lim \gamma_n = \lim a_n - \lim b_n = a - b$. Από την προηγούμενη πρόταση, αφού $\gamma_n \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim \gamma_n = a - b \geq 0 \Rightarrow a \geq b$.

Θεώρημα (7.3)

↳ Έστω $(a_n)_n, (b_n)_n, (\gamma_n)_n$ ακολουθίες ώστε $(a_n)_n, (b_n)_n$ συγκλίνουν σε κοινό όριο. Αν $a_n \le \gamma_n \le b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ τότε και η $(\gamma_n)_n$ συγκλίνει στο ίδιο όριο.

⚠ ΔΕΝ υποθέτουμε ότι $(\gamma_n)_n$ συγκλίνει.

[Το παραπάνω θεώρημα ονομάζεται: Θεώρημα ισοσυγκλινουσών ακολουθιών ή Κριτήριο Παρεμβολής]

Απόδειξη

Υποθέσεις $\left.\begin{array}{l} a_n \le \gamma_n \le b_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ a_n \to \ell, \ b_n \to \ell \end{array}\right\} \Rightarrow (\gamma_n)_n$ συγκλίνει και $\gamma_n \to \ell$

(ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Αν υποθέτουμε ότι η $(\gamma_n)_n$ συγκλίνει τότε το συμπέρασμα θα ήταν άμεσο από το προηγούμενο θεώρημα)

Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $a_n \to \ell$ υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$, $\forall n \ge n_1$. Επειδή $b_n \to \ell$ υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε $\ell - \varepsilon < b_n < \ell + \varepsilon$, $\forall n \ge n_2$.

Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$

Τότε, $\left.\begin{array}{l} \forall n \ge n_0 \quad \ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon \text{ και } \ell - \varepsilon < b_n < \ell + \varepsilon \\ \text{Επιπλέον } a_n \le \gamma_n \le b_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{array}\right\} \Rightarrow \forall n \ge n_0$

$\ell - \varepsilon < a_n \le \gamma_n \le b_n < \ell + \varepsilon$

$\Rightarrow \forall n \ge n_0 \quad \ell - \varepsilon < \gamma_n < \ell + \varepsilon$

---

* **Άσκηση**: Δείξτε ότι $\gamma_n \to 0$ με $(\gamma_n)_n$ ακολουθία και $0 \le \gamma_n \le \frac{1}{n}$.

Λύση 0 — $a_n = 0$ σταθερή ακολουθία, $a_n \to 0$. Η ακολουθία $\frac{1}{n} \to 0$. Άρα $\gamma_n \to 0$.

□ **Σημείωση**: Οι προτάσεις που συνδέουν τα όρια των ακολουθιών με τη διάταξη ισχύουν ακόμη και αν υποθέσουμε ότι οι ανισότητες ισχύουν όχι για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ αλλά ισχύουν τελικά για όλα τα $n \in \mathbb{N}$

π.χ. $a_n \le \gamma_n \le b_n \quad \forall n \ge n_0$, $a_n \to a$, $b_n \to a$ $\Rightarrow \gamma_n \to a$

$a_n \le \gamma_n' \le b_n \ \forall n$

$\gamma_n' = \gamma_n \quad \forall n > n_0$

— Θεώρημα

↳ Έστω $(a_n)_n, (b_n)_n$ ακολουθίες, $a=\lim a_n$, $b=\lim b_n$. Τότε

1. $a_n+b_n \to a+b$
2. $\lambda a_n \to \lambda a \quad \forall \lambda\in\mathbb{R}$
3. $\lambda a_n+\mu b_n \to \lambda a+\mu b \quad \forall \lambda,\mu\in\mathbb{R}$
4. * $a_n\cdot b_n \to a\cdot b$
5. ** Αν $b_n\neq 0$ και $b\neq 0$ τότε $\frac{a_n}{b_n}\to\frac{a}{b}$.

Αποδείξεις

1. Έστω $\gamma_n=a_n+b_n$. Θα δείξω ότι αν $a_n\to a$, $b_n\to b$ τότε $\gamma_n\to a+b$. Έστω $\varepsilon>0$.

Αφού $a_n\to a \Rightarrow \exists\, n_1\in\mathbb{N}$ ώστε $\forall\, n\geq n_1$, $|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$.

Αφού $b_n\to b \Rightarrow \exists\, n_2\in\mathbb{N}$ ώστε $\forall\, n\geq n_2$, $|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$.

Άρα $\forall\, n\geq n_0=\max\{n_1,n_2\}$

$$|\gamma_n-(a+b)|=|(a_n+b_n)-(a+b)|=|(a_n-a)+(b_n-b)|\leq|a_n-a|+|b_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

Άρα $\gamma_n\to a+b$.

4.

Θα χρησιμοποιήσουμε την εξής πρόταση:

• ΠΡΟΤΑΣΗ: Αν $(a_n)_n$ συγκλίνουσα τότε $(a_n)_n$ φραγμένη. Δεν ισχύει όμως το αντίστροφο (π.χ. $a_n=(-1)^n$)

Απόδειξη της πρότασης:

Έστω $a=\lim a_n$

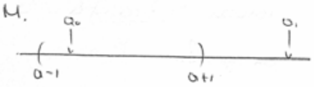
Για $\varepsilon=1$, υπάρχει n_0 ώστε $\forall\, n\geq n_0$, $|a_n-a|<1 \Leftrightarrow a-1<a_n<a+1 \quad \forall\, n\geq n_0$.

Έστω $m=\min\{a_1,a_2,\dots,a_{n_0-1},a-1\}$ και $M=\max\{a_1,a_2,\dots,a_{n_0-1},a+1\}$

Τότε $m\leq a_n\leq M \quad \forall\, n\in\mathbb{N}$.

Πράγματι, έστω $n\in\mathbb{N}$. Αν $n\geq n_0 \Rightarrow m\leq a-1<a_n<a+1\leq M \Rightarrow m\leq a_n\leq M$

Αν $n<n_0 \Rightarrow m\leq a_n\leq M$.



Θέτουμε $\gamma_n=a_n\cdot b_n$. Θα δείξω ότι αν $a_n\to a$ $b_n\to b$ της $\gamma_n\to a\cdot b$. Παρατηρούμε το εξής:

$$|\gamma_n-a\cdot b|=|a_nb_n-a\cdot b|=|a_nb_n-a_nb+a_nb-a\cdot b|=|a_n(b_n-b)+(a_n-a)b|$$
$$\leq|a_n||b_n-b|+|a_n-a||b|$$
$$\leq M\,|b_n-b|+|a_n-a|\,|b|$$

όπου M άνω φράγμα των $|a_n|_n$.

[*Άσκηση: Να δείξετε ότι $(a_n)_n$ φραγμένη $\Leftrightarrow$ $|a_n|_n$ φραγμένη]