21.11.2007

(Μάθημα 10ο)

(10.1)

Υπακολουθία Ακολουθιών.

* **Ορισμός**: Έστω $(a_n)_n$ ακολουθία πραγματικών αριθμών. Έστω $M = \{k_1 < k_2 < \dots < k_n < \dots\}$ άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{N}$. Η ακολουθία $(b_n)_n$ με $b_1 = a_{k_1}$, $b_2 = a_{k_2}$, … $b_k = a_{k_k}$, καλείται υπακολουθία της $(a_n)_n$ και συμβολίζεται με $(a_{k_n})_n$ ή $(a_n)_{n\in M}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Έστω $(a_n)_n$ με $a_n = (-1)^n$. Τότε η ακολουθία $(a_{2n})_n$ είναι η σταθερή ακολουθία $a_{2n} = (-1)^{2n} = 1$ $\forall n \in M$ και η υπακολουθία $(a_{2n-1})_n$ — " —
$a_{2n} = (-1)^{2n-1} = -1$, $\forall n \in M$.

2. Έστω $(a_n)_n$ ακολουθία $n_0 \in \mathbb{N}$. Τότε η ακολουθία $(a_n)_{n \geq n_0} = a_{n_0}, a_{n_0+1}, \dots$ είναι υπακολουθία της $(a_n)_n$. (εδώ το M είναι το σύνολο $M = \{n_0 < n_0+1 < n_0+2 < \dots\}$

▶ Άσκηση: Βρείτε μια ακολουθία $(a_n)_n$ με $a_{2n} \to 0$ και $a_{2n-1} \to 1$.

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{αν } n \text{ άρτιος} \\ 1, & \text{αν } n \text{ περιττός} \end{cases}$$

* ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Έστω $d \in \mathbb{N}$ και $F = \{x_0, x_1, \dots, x_{d-1}\}$ υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με d στοιχεία

Ορίζουμε $a_n = \begin{cases} x_0, & \text{αν } n = kd + 0 \\ x_1, & \text{αν } n = k \cdot d + 1 \\ x_{d-1}, & \text{αν } n = kd + (d-1). \end{cases}$

($a_n = x_i$ αν $n = kd + i$, $i = 0, \dots, d-1$

▶ Άσκηση***: Βρείτε ακολουθία $(a_n)_n$ ώστε το σύνολο
$L = \{x \in \mathbb{R} : \text{Υπάρχει υπακολουθία της } (a_n)_n \text{ που συγκλίνει στο } x\}$.
να είναι το σύνολο $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$

$\left[\begin{array}{l} \mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i ? \\ M_i \cap M_j = \emptyset \\ \# M_i = \infty \end{array}\right]$

Έστω $P = \{2, 3, 5, 7, \dots\}$.

Το σύνολο των πρώτων

$$P = \{\underset{2}{\underset{\parallel}{p_1}} < \underset{3}{\underset{\parallel}{p_2}} < \underset{5}{\underset{\parallel}{p_3}} < \dots < p_n < \dots\}.$$

$M_1 = \{p_1, p_1^2, p_1^3, \dots\}$. $M_0 = \mathbb{N} \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$.

$M_2 = \{p_1, p_2^2, p_3^3, \dots\}$

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{αν } n \in M_1 \\ 1/2 & \text{αν } n \in M_2 \\ 1/3 & \text{αν } n \in M_3 \\ 1/4 & \text{αν } n \in M_4 \\ \vdots \\ 1/k & \text{αν } n \in M_k \\ 0 & \text{αν } n \in M_0 \end{cases}$$