(5.2)

Ορισμοί :

① Ένα σύνολο B καλείται **πεπερασμένο** αν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ και $f = \{1, \dots, n\} \to B \to$ 1-1 και επί

② Αν το B δεν είναι πεπερασμένο, τότε καλείται **άπειρο**

Σύνολα $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ είναι $\boxed{\text{άπειρα}}$.

$$\left.\begin{array}{l} A, B \text{ πεπερασμένα} \\ A \subsetneq B \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \exists\, f : A \xrightarrow{1-1} B \ (\text{όχι επί}) \\ \text{και } \nexists\, g : B \xrightarrow{1-1} A \end{array}$$

- ΕΡΩΤΗΣΗ : Αν A, B άπειρα σύνολα και $A \subsetneq B$ τότε συμβαίνει το παραπάνω ή όχι;

δηλαδή $\exists\, g : B \to A$ 1-1 ή όχι;

⇨ Γενικότερα μπορεί να συμβεί $A \subsetneq B$ και $\exists\, g : A \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} B$

▫ Δεν υπάρχει $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ επί

- ΕΡΩΤΗΣΗ : Υπάρχει ή δεν υπάρχει $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ (1-1) και) επί

↳ Υπάρχει

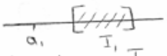
$$|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}| \subsetneq |\mathbb{R}|$$

(τα άπειρα των $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}$ είναι ίσα και $\subsetneq$ από $\mathbb{R}$).

— Θεώρημα

↳ Δεν υπάρχει απεικόνιση $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ επί, ισοδύναμα το $\mathbb{R}$ δεν γράφεται υπό τη μορφή ακολουθίας $a_1, a_2, a_3, \dots$

Απόδειξη:

Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι $\mathbb{R} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$. Επιλέγουμε I_1 κλειστό και φραγμένο διάστημα του $\mathbb{R}$ με $a_1 \notin I_1$  . Εύκολα (χωρίζουμε το I_1 στα τρία αν χρειάζεται). Βρίσκουμε κλειστό φραγμένο διάστημα I_2 με $I_2 \subseteq I_1$ και $a_2 \notin I_2$. Όμοια για τον a_3 βρίσκουμε $I_3 \subseteq I_2 \subseteq I_1$ κλειστό φραγμένο διάστημα με $a_3 \notin I_3$. Άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ βρίσκουμε διάστημα κλειστό φραγμένο I_n με τις εξής ιδιότητες: (1) $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \dots \supseteq I_n \supseteq \dots$

(2) $a_n \notin I_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Από την αρχή του κιβωτισμού υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ με $x \in I_n$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Επειδή $x \in \mathbb{R} = \{a_1, a_2, \dots\}$ έπεται ότι για κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$ $x = a_{n_0}$

Όμως τότε $x = a_{n_0}$ και $x \in I_n$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x = a_{n_0}$ και $x \in I_{n_0} \Rightarrow a_{n_0} \in I_{n_0}$

Άτοπο