ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ

3.1 Εισαγωγή

Θεωρούμε δύο μη μηδενικά διανύσματα $\boldsymbol{a}=(\alpha_1,\alpha_2)$ και $\boldsymbol{b}=(\beta_1,\beta_2)$ του επιπέδου. Γνωρίζουμε ότι, αν τα διανύσματα $\boldsymbol{a}$ και $\boldsymbol{b}$ είναι μη συγγραμμικά, τότε αληθεύει η συνεπαγωγή

$$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=0,\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}\Rightarrow\lambda=\mu=0\,,$$

ή ισοδύναμα, το ομογενές γραμμικό σύστημα

$$\lambda\alpha_1+\mu\beta_1=0$$

$$\lambda\alpha_2+\mu\beta_2=0$$

ως προς $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ έχει μοναδική λύση $(\lambda,\mu)=(0,0)$. Αναγκαία και ικανή συνθήκη για να αληθεύει η προηγούμενη πρόταση, όπως είναι γνωστό από τη στοιχειώδη άλγεβρα, είναι η

$$\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\neq 0\,.$$

Ομοίως, η σχέση

$$\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1=0$$

είναι αναγκαία και ικανή για να είναι τα διανύσματα $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ συγγραμμικά.

Επίσης, αν θεωρήσουμε τον 2×2 πίνακα

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix},$$

με απλή εφαρμογή του ορισμού του αντίστροφου πίνακα [Κεφάλαιο 2] διαπιστώνουμε ότι:

ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$.

Την παράσταση $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ θα ονομάσουμε ορίζουσα του πίνακα A και στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να ορίσουμε μία αντίστοιχη παράσταση των στοιχείων ενός $n\times n$ πίνακα $\mathrm{A}=\left(a_{ij}\right)$, η οποία θα γενικεύει τις παραπάνω σχέσεις. Θα εργαστούμε πάνω στο σώμα $\mathrm{K}=\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, αν και μπορούμε να εργαστούμε και πάνω σε έναν αντιμεταθετικό δακτύλιο. Πριν όμως περάσουμε στην αναζήτηση μιας τέτοιας παράστασης, πρέπει να παρεμβάλλουμε ορισμένες έννοιες που θα μας χρειαστούν στα επόμενα.

3.2 Η συμμετρική ομάδα S_n

Μετάθεση του συνόλου $\mathrm{T}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ είναι μία αμφιμονοσήμαντη και επί απεικόνιση

$$\sigma : \mathrm{T}_n \longrightarrow \mathrm{T}_n ,\ r \longrightarrow \sigma(r) \equiv j_r ,$$

η οποία συμβολίζεται με

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix} \text{ ή } \sigma = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}.$$

Οι δυνατές μεταθέσεις του T_2 είναι δύο, οι $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$, ενώ οι δυνατές μεταθέσεις του T_3 είναι $3! = 6$ και είναι οι εξής:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$
$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Χρησιμοποιώντας τη βασική αρχή της απαρίθμησης, είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι το πλήθος των μεταθέσεων του συνόλου $\mathrm{T}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ είναι $n!$. Επιπλέον το σύνολο των μεταθέσεων του συνόλου T_n, που συμβολίζεται με S_n**,** αποτελεί ομάδα με πράξη τη σύνθεση απεικονίσεων. Η ομάδα αυτή ονομάζεται **συμμετρική ομάδα** n **τάξης**. Για παράδειγμα, για $n = 4$, το ουδέτερο στοιχείο της ομάδας S_4 είναι η ταυτοτική απεικόνιση (μετάθεση) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, ενώ, αν

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ και } \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

είναι δύο στοιχεία της S_4, τότε έχουμε

$$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix},\ \tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ και } \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Κάθε ζεύγος (i, k) στοιχείων του συνόλου T_n που ικανοποιεί τις συνθήκες

$$i < k \text{ και } \sigma(i) > \sigma(k),$$

αποτελεί μία **αντιστροφή** της μετάθεσης σ. Αν ο συνολικός αριθμός των αντιστροφών μιας μετάθεσης σ είναι άρτιος, τότε η μετάθεση λέγεται **άρτια**, ενώ, όταν ο αριθμός αυτός είναι περιττός, η μετάθεση λέγεται **περιττή**. Το **πρόσημο** ή **δείκτρια** μιας μετάθεσης σ ορίζεται ως εξής:

$$\varepsilon(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{αν η } \sigma \text{ είναι άρτια} \\ -1, & \text{αν η } \sigma \text{ είναι περιττή.} \end{cases}$$

Για παράδειγμα, η μετάθεση $\sigma=(23514)$ του S_5 έχει τις αντιστροφές $(2,1)$, $(3,1)$, $(5,1)$, $(5,4)$ και είναι άρτια, ενώ η μετάθεση $\tau=(21534)$ του S_5 έχει τις αντιστροφές (2,1), (5,3), (5,4) και είναι περιττή. Άρα θα έχουμε $\varepsilon(\sigma)=1$ και $\varepsilon(\tau)=-1$.

3.3 Ο ορισμός της ορίζουσας

Θεωρούμε τον πίνακα $\mathrm{A}=\left(a_{ij}\right)\in \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$, και προσπαθούμε να ορίσουμε μία συνάρτηση των n^2 στοιχείων του ή των n στηλών του

$$\det : \mathrm{M}_n(\mathrm{K}) \to \mathrm{K},\ \ \mathrm{A}=(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\ldots,\tilde{a}_n)\to \det \mathrm{A}\,,$$

της οποίας η τιμή για $n=2$ να είναι $\det \mathrm{A}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$. Τη συνάρτηση αυτή την ονομάζουμε **ορίζουσα**. Εδώ συμβολίζουμε με $\tilde{a}_i$ την i-στήλη του πίνακα A και θεωρούμε τον πίνακα ως συνάρτηση των στηλών του, δηλαδή ταυτίζουμε το σύνολο $\mathrm{M}_n\left(\mathrm{K}\right)$ με το καρτεσιανό γινόμενο n συνόλων $\mathrm{M}_{n\times 1}\left(\mathrm{K}\right)$, που είναι οι πίνακες μιας στήλης πάνω στο σώμα K.

Αν υποθέσουμε ότι για $n=2$ είναι

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=\left(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2\right) \text{ και } \det \mathrm{A}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\,,$$

τότε είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι η συνάρτηση $\det : \mathrm{M}_2(\mathrm{K})\to \mathrm{K}$ ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

- $\det\left(\lambda\tilde{a}_1+\mu\tilde{a}_1',\tilde{a}_2\right)=\lambda\det\left(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2\right)+\mu\det\left(\tilde{a}_1',\tilde{a}_2\right)$,
- $\det\left(\tilde{a}_1,\lambda\tilde{a}_2+\mu\tilde{a}_2'\right)=\lambda\det\left(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2\right)+\mu\det\left(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2'\right)$,
- $\det\left(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2\right)=0,$ αν $\tilde{a}_1=\tilde{a}_2$.

Στα επόμενα κεφάλαια θα δούμε ότι μία συνάρτηση που ικανοποιεί τις δύο πρώτες ιδιότητες λέγεται **διγραμμική.**

Τα προηγούμενα μας υποκινούν, να απαιτήσουμε για τη συνάρτηση $\det$ να ικανοποιεί ανάλογες ιδιότητες με τις παραπάνω, για κάθε μία από τις μεταβλητές της $\tilde{a}_i$, $i=1,2,\ldots,n$ και ακόμη να μηδενίζεται, όταν δύο στήλες του πίνακα A ταυτίζονται.

Έτσι μπορούμε να θέσουμε τα δύο πρώτα αξιώματα για τη συνάρτηση

$$\det : \mathrm{M}_n(\mathrm{K}) \to \mathrm{K}, \mathrm{A}=(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\ldots,\tilde{a}_n)\to \det \mathrm{A}\,,$$

ως εξής:

(**i**) $\det\left(\tilde{a}_1,\ldots,\lambda\tilde{a}_i+\mu\tilde{a}_i',..,\tilde{a}_n\right)=\lambda\det\left(\tilde{a}_1,\ldots,\tilde{a}_i,..,\tilde{a}_n\right)+\mu\det\left(\tilde{a}_1,\ldots,\tilde{a}_i',..,\tilde{a}_n\right)$,
για κάθε $\lambda,\mu\in\mathrm{K}, i=1,2,\ldots,n.$

(**ii**) $\det \mathrm{A}=0$, *όταν δύο στήλες του πίνακα* A *ταυτίζονται.*

Μία συνάρτηση που ικανοποιεί την ιδιότητα **(i)** λέγεται **πολυγραμμική**. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι υπάρχουν συναρτήσεις που ικανοποιούν τα αξιώματα **(i)** και **(ii)**. Για τον προσδιορισμό τους είναι χρήσιμο να παρεμβάλλουμε μία πρόταση που αποτελεί και την πρώτη ιδιότητα των οριζουσών.

Πρόταση 3.3.1 *Αν κάνουμε μία μετάθεση* σ *των στηλών του πίνακα* $\mathrm{A}=(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\ldots,\tilde{a}_n)$ *τότε η ορίζουσα του πίνακα που προκύπτει ισούται με την ορίζουσα του* A *πολλαπλασιασμένη επί το πρόσημο της μετάθεσης* σ, *δηλαδή ισχύει η ισότητα*

$$\det\left(\tilde{a}_{\sigma(1)},\tilde{a}_{\sigma(2)},\ldots,\tilde{a}_{\sigma(n)}\right)=\varepsilon(\sigma)\det\left(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\ldots,\tilde{a}_n\right).$$

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η αντιμετάθεση δύο στηλών $\tilde{a}_i,\tilde{a}_j$ του πίνακα A, αλλάζει το πρόσημο της ορίζουσάς του. Θεωρώντας σταθερές όλες τις άλλες στήλες του A, εκτός των $\tilde{a}_i,\tilde{a}_j$, γράφουμε $\det \mathrm{A}=d\left(\tilde{a}_i,\tilde{a}_j\right)$ και λόγω των αξιωμάτων **(i)** και **(ii)** έχουμε:

$$0=d\left(\tilde{a}_i+\tilde{a}_j,\tilde{a}_i+\tilde{a}_j\right)=d\left(\tilde{a}_i,\tilde{a}_i\right)+d\left(\tilde{a}_j,\tilde{a}_j\right)+d\left(\tilde{a}_i,\tilde{a}_j\right)+d\left(\tilde{a}_j,\tilde{a}_i\right)$$

$$\Leftrightarrow 0=d\left(\tilde{a}_i,\tilde{a}_j\right)+d\left(\tilde{a}_j,\tilde{a}_i\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad d\left(\tilde{a}_i,\tilde{a}_j\right)=-d\left(\tilde{a}_j,\tilde{a}_i\right).$$

□

Μοναδικότητα και ύπαρξη της συνάρτησης ορίζουσας

Κάθε στήλη του πίνακα $\mathrm{A}=\left(a_{ij}\right)\in\mathrm{M}_n\left(\mathrm{K}\right)$ γράφεται ως

$$\tilde{a}_k=\sum_{i=1}^{n}a_{ik}\tilde{e}_i,\ k=1,2,\ldots n,$$

όπου $\tilde{e}_i$ είναι η $i-$στήλη του μοναδιαίου $n\times n$ πίνακα I_n. Τότε , λόγω του αξιώματος **(i)**, λαμβάνουμε

$$\det \mathrm{A}=\det\left(\sum_{i_1=1}^{n}a_{i_1 1}\tilde{e}_{i_1},\sum_{i_2=1}^{n}a_{i_2 2}\tilde{e}_{i_2},\ldots,\sum_{i_n=1}^{n}a_{i_n n}\tilde{e}_{i_n}\right)$$

$$= \sum_{i_1,i_2,\dots,i_n=1}^{n} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n} \det\left(\tilde{e}_{i_1}, \tilde{e}_{i_2}, \dots, \tilde{e}_{i_n}\right). \qquad (1)$$

Όμως, λόγω της πρότασης 3.3.1, ισχύει ότι

$$\det\left(\tilde{e}_{i_1}, \tilde{e}_{i_2}, \dots, \tilde{e}_{i_n}\right) = \varepsilon\left(i_1 i_2 \dots i_n\right) \det\left(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_n\right). \qquad (2)$$

Επιπλέον, λόγω του αξιώματος **(ii)**, έχουμε

$$\det\left(\tilde{e}_{i_1}, \tilde{e}_{i_2}, \dots, \tilde{e}_{i_n}\right) = 0, \text{ αν } \left(i_1 i_2 \dots i_n\right) \notin S_n, \qquad (3)$$

δηλαδή όταν δύο τουλάχιστον από τα $i_1, i_2, \dots, i_n$ ταυτίζονται.

Επομένως, λόγω των (2) και (3) η σχέση (1) γίνεται

$$\det \mathrm{A} = \sum_{(i_1 i_2 \dots i_n) \in S_n} \varepsilon\left(i_1 i_2 \dots i_n\right) a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n} \det\left(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_n\right)$$

$$\Leftrightarrow \det \mathrm{A} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon\left(\sigma\right) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n} \det\left(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_n\right) \qquad (4)$$

Είναι πλέον φανερό ότι για να έχουμε τη συνάρτηση της ορίζουσας ως συνάρτηση μόνο των στοιχείων του πίνακα A, πρέπει να θεωρήσουμε την τιμή της $\det\left(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_n\right)$ σταθερή και ανεξάρτητη του n. Λαμβάνοντας υπόψη, ότι για $n = 2$ και για τον μοναδιαίο πίνακα I_2 η παράσταση $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ γίνεται ίση με 1, είναι λογικό να επιβάλλουμε ως τρίτο αξίωμα το ακόλουθο

(iii) $\det \mathrm{I}_n = 1,$ *για κάθε* $n = 1, 2, 3, \dots,$

από το οποίο η ισότητα (4) γίνεται

$$\det \mathrm{A} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon\left(\sigma\right) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n} \qquad (5)$$

Έτσι καταλήγουμε στο συμπέρασμα:

Αν υπάρχει συνάρτηση $\det : \mathrm{M}_n(\mathrm{K}) \to \mathrm{K}, \mathrm{A} = (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) \to \det \mathrm{A}$, *που ικανοποιεί τα αξιώματα* **(i), (ii)** *και* **(iii)** *που θέσαμε, τότε αυτή θα ορίζεται μονοσήμαντα λόγω της σχέσης (5). Επίσης η σχέση (5) μας υποδεικνύει πώς πρέπει να ορίσουμε τη ζητούμενη συνάρτηση det. Δεν έχουμε παρά να θεωρήσουμε την ισότητα (5) ως ορισμό της συνάρτησης det και να αποδείξουμε στη συνέχεια ότι αυτή ικανοποιεί τα αξιώματα* **(i), (ii)** *και* **(iii).**

Πράγματι, έχουμε:

(i) Κάθε όρος του αθροίσματος (5) περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο από κάθε γραμμή και στήλη του πίνακα A. Έτσι κάθε όρος είναι γραμμικός ως προς τις στήλες του A, οπότε και το άθροισμα όλων των όρων θα είναι γραμμικό ως προς τις στήλες του πίνακα A.

(ii) Έστω ότι $\tilde{a}_1 = \tilde{a}_2$. Τότε για το τυχαίο όρο του αθροίσματος (5), έστω τον $\varepsilon\left(i_1 i_2 i_3 ... i_n\right) a_{i_1 1} a_{i_2 2} a_{i_3 3} ... a_{i_n n}$, υπάρχει μέσα στο άθροισμα και ο όρος $\varepsilon\left(i_2 i_1 i_3 ... i_n\right) a_{i_2 1} a_{i_1 2} a_{i_3} ... a_{i_n n}$, οπότε λόγω του ότι ισχύουν

$$a_{i_1 1} = a_{i_1 2},\ a_{i_2 1} = a_{i_2 2} \text{ (αφού } \tilde{a}_1 = \tilde{a}_2 \text{)}$$

$$\text{και} \quad \varepsilon\left(i_2 i_1 i_3 ... i_n\right) = -\varepsilon\left(i_1 i_2 i_3 ... i_n\right),$$

οι παραπάνω όροι είναι αντίθετοι. Έτσι, ανά δύο οι όροι του αθροίσματος (5) έχουν άθροισμα 0, οπότε θα είναι και

$$\det\left(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, ..., \tilde{a}_n\right) = 0.$$

Όμοια εργαζόμαστε για κάθε άλλη περίπτωση με $\tilde{a}_i = \tilde{a}_j$.

(iii) Επειδή είναι

$$\mathrm{I}_n = \left(\delta_{ij}\right), \text{ όπου } \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν } i = j \\ 0, & \text{αν } i \neq j \end{cases}$$

η σχέση (5) δίνει

$$\det \mathrm{I}_n = \delta_{11}\delta_{22} \cdots \delta_{nn} = 1, \text{ για κάθε } n = 1, 2, \dots .$$

Επομένως η σχέση (5) ορίζει τη συνάρτηση ορίζουσας που ζητούσαμε και συνοψίζοντας όλα τα προηγούμενα έχουμε:

Θεώρημα 3.3.1 *Η συνάρτηση*

$$\det : \mathrm{M}_n(\mathrm{K}) \to \mathrm{K}, \mathrm{A} = (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, ..., \tilde{a}_n) \to \det \mathrm{A},$$

που ικανοποιεί τα αξιώματα:

(i) $\det\left(\tilde{a}_1, ..., \lambda\tilde{a}_i + \mu\tilde{a}_i', .., \tilde{a}_n\right) = \lambda \det\left(\tilde{a}_1, ..., \tilde{a}_i, .., \tilde{a}_n\right) + \mu \det\left(\tilde{a}_1, ..., \tilde{a}_i', .., \tilde{a}_n\right)$, *για κάθε* $\lambda, \mu \in \mathrm{K}, i = 1, 2, ..., n$,

(ii) $\det \mathrm{A} = 0$*, όταν δύο στήλες του πίνακα* A *ταυτίζονται,*

(iii) $\det \mathrm{I}_n = 1,$ *για κάθε* $n = 1, 2, 3, ...$,

είναι μοναδική και έχει τύπο

$$\det \mathrm{A} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon\left(\sigma\right) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} ... a_{\sigma(n)n}.$$

Ειδικές περιπτώσεις

- Για $n=1$, είναι : $\det\left(a_{11}\right)=a_{11}$.
- Για $n=2$, είναι :
$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \sum_{\sigma\in S_2} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} = +a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \; .$$
- Για $n=3$, είναι :
$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \sum_{\sigma\in S_3} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} a_{\sigma(3)3}$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} \; .$$

Παρατηρήσεις

(i) *Σημειώνουμε ακόμη ότι η ορίζουσα* $\det \mathrm{A}$ *συμβολίζεται και με* $\left|\mathrm{A}\right|$.

(ii) *Τα 6 γινόμενα που σχηματίζονται στον υπολογισμό της ορίζουσας ενός πίνακα* 3×3 *σχηματίζονται εύκολα με τα πρόσημά τους με το μνημονικό* ***κανόνα του Sarrus:***

$$\left|\begin{array}{ccccccccccc}
 & a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & & a_{11} & & a_{12} & \\
 & & \ddots & & \ddots\cdot\cdot\iddots & & \ddots\cdot\cdot\iddots & & \iddots & & \\
 & a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{21} & & a_{22} & \\
 & & \ddots\cdot\cdot\iddots & & \ddots\cdot\cdot\iddots & & \ddots\cdot\cdot\iddots & & \ddots & & \\
 & a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{31} & & a_{32} & \\
 -\iddots & & -\iddots & & -\iddots & & \ddots+ & & \ddots+ & & \ddots+
\end{array}\right| =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} \; .$$

3.4 Ιδιότητες της συνάρτησης ορίζουσας

1. *Αν κάνουμε μία μετάθεση* σ *των στηλών του πίνακα* $\mathrm{A}=(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\ldots,\tilde{a}_n)$, *τότε η ορίζουσα του πίνακα που προκύπτει, ισούται με την ορίζουσα του* A *πολλαπλασιασμένη επί το πρόσημο της μετάθεσης* σ, *δηλαδή ισχύει η ισότητα*
$$\det(\tilde{a}_{\sigma(1)},\tilde{a}_{\sigma(2)},\ldots,\tilde{a}_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)\det(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\ldots,\tilde{a}_n) \; .$$

Απόδειξη
Είναι η πρόταση 3.3.1 που αποδείξαμε στην προηγούμενη παράγραφο. □

Από την ιδιότητα αυτή προκύπτει ως ιδιαίτερη περίπτωση :

1α *Αν αντιμεταθέσουμε δύο στήλες του πίνακα* A*, τότε ο πίνακας που προκύπτει έχει ορίζουσα αντίθετη από την ορίζουσα του πίνακα* A*.*

2. *Αν μία στήλη ενός πίνακα* $\mathrm{A} = (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, ..., \tilde{a}_n)$ *πολλαπλασιαστεί επί* $\lambda \in \mathrm{K}$*, τότε η ορίζουσα του πίνακα που προκύπτει ισούται με* $\lambda \det \mathrm{A}$*, δηλαδή ισχύει ότι*

$$\det\left(\tilde{a}_1, ..., \lambda\tilde{a}_i, ..., \tilde{a}_n\right) = \lambda \det\left(\tilde{a}_1, ..., \tilde{a}_i, ..., \tilde{a}_n\right).$$

Απόδειξη. Είναι άμεση εφαρμογή του αξιώματος **(i).** □

3. *Η ορίζουσα ενός πίνακα δεν μεταβάλλεται, αν αντικαταστήσουμε μία στήλη του με το άθροισμα αυτής συν κάποιο πολλαπλάσιο μιας άλλης στήλης του, δηλαδή έχουμε:*

$$\det\left(\tilde{a}_1, ..., \tilde{a}_i, ..., \tilde{a}_j, .., \tilde{a}_n\right) = \det\left(\tilde{a}_1, ..., \tilde{a}_i + \lambda\tilde{a}_j, .., \tilde{a}_j, ..., \tilde{a}_n\right).$$

Απόδειξη

$$\begin{aligned}&\det\left(\tilde{a}_1, ..., \tilde{a}_i + \lambda\tilde{a}_j, .., \tilde{a}_j, ..., \tilde{a}_n\right)\\ &= \det\left(\tilde{a}_1, ..., \tilde{a}_i, ..., \tilde{a}_j, .., \tilde{a}_n\right) + \lambda \det\left(\tilde{a}_1, ..., \tilde{a}_j, ..., \tilde{a}_j, .., \tilde{a}_n\right). \qquad \square\\ &= \det\left(\tilde{a}_1, ..., \tilde{a}_i, ..., \tilde{a}_j, .., \tilde{a}_n\right) = \det \mathrm{A}.\end{aligned}$$

4. *Η ορίζουσα του ανάστροφου πίνακα* A^T *ενός πίνακα* A*, ισούται με την ορίζουσα του πίνακα* A*, δηλαδή έχουμε:*

$$\det\left(\mathrm{A}^T\right) = \det \mathrm{A}.$$

Απόδειξη

Επειδή είναι $\mathrm{A}^T = \left(\beta_{ij}\right) = \left(a_{ji}\right)$ θα έχουμε

$$\det\left(\mathrm{A}^T\right) = \sum_{(i_1 i_2 ... i_n) \in S_n} \varepsilon\left(i_1 i_2 ... i_n\right) \beta_{i_1 1} \beta_{i_2 2} ... \beta_{i_n n} = \sum_{(i_1 i_2 ... i_n) \in S_n} \varepsilon\left(i_1 i_2 ... i_n\right) a_{1 i_1} a_{2 i_2} ... a_{n i_n}.$$

Αν μεταθέσουμε τους παράγοντες του τυχαίου όρου του αθροίσματος (5), έστω $\varepsilon\left(i_1 i_2 ... i_n\right) a_{i_1 1} a_{i_2 2} ... a_{i_n n}$, έτσι ώστε οι δείκτες να πάρουν τη φυσική τους διάταξη, τότε ο όρος αυτός θα γίνει $\varepsilon\left(j_1 j_2 ... j_n\right) a_{1 j_1} a_{2 j_2} ... a_{n j_n}$, όπου

$\left(j_1 j_2 ... j_n\right)$ είναι η αντίστροφη μετάθεση της $\left(i_1 i_2 ... i_n\right)$, οπότε

$$\left(j_1 j_2 ... j_n\right) \in S_n \quad \text{και} \quad \varepsilon\left(j_1 j_2 ... j_n\right) = \varepsilon\left(i_1 i_2 ... i_n\right).$$

Άρα ο τυχαίος όρος του αθροίσματος (5) είναι και όρος του αθροίσματος που ορίζει την $\det\left(\mathrm{A}^T\right)$ και αφού το πλήθος των όρων των δύο αθροισμάτων είναι το ίδιο, δηλαδή $n!$, είναι φανερό ότι

$$\det\left(\mathrm{A}^T\right) = \det \mathrm{A}. \qquad \square$$

Παρατήρηση 1. *Βάσει της τελευταίας ιδιότητας, όλες οι ιδιότητες της ορίζουσας που αναφέρονται στις στήλες του πίνακα* A*, ισχύουν και για τις γραμμές του.*

5. *Για κάθε* $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{M}_n\left(\mathrm{K}\right)$ *ισχύει ότι*

$$\det\left(\mathrm{AB}\right) = \left(\det \mathrm{A}\right)\left(\det \mathrm{B}\right).$$

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι $\mathrm{A} = \left(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, ..., \tilde{a}_n\right)$, $\mathrm{B} = \left(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, ..., \tilde{b}_n\right)$. Αν με $\underset{\sim}{a}_1, \underset{\sim}{a}_2, .. \underset{\sim}{a}_n$ συμβολίσουμε τις γραμμές του πίνακα A, τότε η j- στήλη του πίνακα AB γράφεται

$$\mathrm{A}\tilde{b}_j = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{a}_1 \\ \underset{\sim}{a}_2 \\ \vdots \\ \underset{\sim}{a}_n \end{bmatrix} \tilde{b}_j = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{a}_1 \tilde{b}_j \\ \underset{\sim}{a}_2 \tilde{b}_j \\ \vdots \\ \underset{\sim}{a}_n \tilde{b}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} b_{1j} + a_{12} b_{2j} + ... + a_{1n} b_{nj} \\ a_{21} b_{1j} + a_{22} b_{2j} + ... + a_{2n} b_{nj} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} b_{1j} + a_{n2} b_{2j} + ... + a_{nn} b_{nj} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} \tilde{a}_i .$$

Άρα έχουμε

$$\begin{aligned} \det\left(\mathrm{AB}\right) &= \det\left(\sum_{i_1=1}^{n} b_{i_1 1} \tilde{a}_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{n} b_{i_2 2} \tilde{a}_{i_2}, ..., \sum_{i_n=1}^{n} b_{i_n n} \tilde{a}_{i_n}\right) \\ &= \sum_{i_1, i_2, ..., i_n = 1}^{n} b_{i_1 1} b_{i_2 2} \cdots b_{i_n n} \det\left(\tilde{a}_{i_1}, \tilde{a}_{i_2}, ..., \tilde{a}_{i_n}\right) \\ &= \sum_{(i_1, i_2, ..., i_n) \in S_n}^{n} b_{i_1 1} b_{i_2 2} \cdots b_{i_n n} \varepsilon\left(i_1 i_2 ... i_n\right) \det\left(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, ..., \tilde{a}_n\right) \\ &= \det\left(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, ..., \tilde{a}_n\right) \sum_{(i_1, i_2, ..., i_n) \in S_n}^{n} \varepsilon\left(i_1 i_2 ... i_n\right) b_{i_1 1} b_{i_2 2} \cdots b_{i_n n} \\ &= \left(\det \mathrm{A}\right)\left(\det \mathrm{B}\right). \end{aligned} \qquad \square$$

6. *Αν* $A=\left(a_{ij}\right)\in M_n\left(K\right)$ *με* $a_{ij}=0$, *για* $i>j$ *ή για* $i<j$, *δηλαδή, αν ο πίνακας* A *είναι τριγωνικός άνω ή τριγωνικός κάτω ή διαγώνιος, τότε*

$$\det A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι

$$\det A = \sum_{(i_1 i_2 \dots i_n)\in S_n} \varepsilon\left(i_1 i_2 \dots i_n\right) a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n}.$$

Με σκοπό να βρούμε τους μη μηδενικούς όρους του παραπάνω αθροίσματος στην περίπτωση που για $i>j$ είναι $a_{ij}=0$, παρατηρούμε τα εξής:

Επειδή $a_{i_1 1}=0$ για $i_1>1$, θα πρέπει $a_{i_1 1}=a_{11}$, δηλαδή $i_1=1$. Επίσης από $a_{i_2 2}=0$, για $i_2>2$, οπότε θα πρέπει $a_{i_2 2}=a_{12}$ ή a_{22}, δηλαδή $i_2=1$ ή 2.

Αν είναι $i_2=1$, τότε $\varepsilon\left(i_1 i_2 i_3 \dots i_n\right)=\varepsilon\left(11 i_3 \dots i_n\right)=0$, οπότε θα είναι $i_2=2$.

Εργαζόμενοι ομοίως βρίσκουμε ότι η μοναδική περίπτωση, για να βρούμε ένα μη μηδενικό όρο στο άθροισμα που ορίζει τη $\det A$, είναι να πάρουμε $i_3=3,\dots,i_n=n$, οπότε

$$\det A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Αν $a_{ij}=0$ για $i<j$, τότε θεωρούμε τον πίνακα A^T για τον οποίο ισχύει

$$\det A = \det\left(A^T\right) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$ □

3.5 Ανάπτυγμα ορίζουσας κατά Laplace

Από τη σχέση (5) βλέπουμε ότι η ορίζουσα $\det A$ είναι πολυώνυμο n βαθμού ως προς τα n^2 στοιχεία a_{ij} του πίνακα A. Θεωρούμε σταθερό το στοιχείο a_{ij} και υποθέτουμε ότι ο συντελεστής του στο άθροισμα (5) είναι ο A_{ij}, όπου A_{ij} είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $n-1$ ως προς τα στοιχεία του πίνακα A που δεν ανήκουν στην i-γραμμή και στη j-στήλη.

Ο αριθμός A_{ij} λέγεται **αλγεβρικό συμπλήρωμα ή συμπαράγοντας (cofactor)** του στοιχείου a_{ij}.

Επιπλέον, βασιζόμενοι στο γεγονός ότι κάθε όρος του αθροίσματος (5) περιέχει ένα ακριβώς στοιχείο από κάθε γραμμή και στήλη, με απλή παρατήρηση μπορούμε να έχουμε

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} \qquad (6)$$

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}, \qquad (7)$$

που είναι το ανάπτυγμα της ορίζουσας του πίνακα A ως προς την i-γραμμή και ως προς τη j-στήλη, αντίστοιχα.

Υπολογισμός των αλγεβρικών συμπληρωμάτων

Υπολογίζουμε πρώτα το A_{11}. Είναι $\mathrm{A}_{11} = \sum \varepsilon\left(1 i_2 \ldots i_n\right) a_{i_2 2} a_{i_3 3} \ldots a_{i_n n}$, όπου οι μεταθέσεις $\left(i_2 i_3 \ldots i_n\right)$ μεταβάλλονται στο σύνολο των μεταθέσεων του συνόλου $\{2,3,\ldots,n\}$. Άρα A_{11} είναι η $(n-1)-$τάξης ορίζουσα του πίνακα που προκύπτει από τον πίνακα A, αν του απαλείψουμε την πρώτη γραμμή και την πρώτη στήλη.

Για τον υπολογισμό του A_{ij}, παρατηρούμε ότι το στοιχείο a_{ij} μπορεί να πάρει τη θέση του a_{11} μετά από $i-1$ εναλλαγές γραμμών και $j-1$ εναλλαγές στηλών. Αλλά τότε η ορίζουσα του πίνακα που προκύπτει ισούται με

$$(-1)^{i+j-2} \det \mathrm{A} = (-1)^{i+j} \det \mathrm{A}$$

και το αλγεβρικό συμπλήρωμα του a_{ij} είναι η ορίζουσα του πίνακα που απομένει, αν, από τον πίνακα που προκύπτει μετά τις εναλλαγές, απαλείψουμε την πρώτη γραμμή και την πρώτη στήλη, δηλαδή την $i-$γραμμή και τη $j-$στήλη του πίνακα A. Αν συμβολίσουμε την ορίζουσα αυτή με M_{ij}, τότε

$$\mathrm{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \mathrm{M}_{ij}.$$

Οι ορίζουσες M_{ij} λέγονται **ελάσσονες ορίζουσες (minors)** της ορίζουσας του πίνακα A.

Ορισμός 3.5.1 ***Συμπληρωματικός (adjoint) πίνακας*** *του* $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ *λέγεται ο πίνακας*

$$adj\mathrm{A} = \left(\mathrm{A}_{ij}\right)^T = \left(\mathrm{A}_{ji}\right),$$

όπου A_{ij} *είναι το αλγεβρικό συμπλήρωμα του στοιχείου* a_{ij} *του πίνακα* A, $i, j = 1,2,\ldots,n$, *δηλαδή είναι*

$$adj\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{21} & \cdots & \mathrm{A}_{n1} \\ \mathrm{A}_{12} & \mathrm{A}_{22} & \cdots & \mathrm{A}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ \mathrm{A}_{1n} & \mathrm{A}_{2n} & \cdots & \mathrm{A}_{nn} \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα 1. Να υπολογιστεί η ορίζουσα του πίνακα

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

(α) ως προς τα στοιχεία της δεύτερης γραμμής,
(β) ως προς τα στοιχεία της τρίτης στήλης.

Λύση. (α) Έχουμε

$$|\mathrm{A}|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=(-1)^{2+1}(-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}+(-1)^{2+2}\cdot 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}+0\cdot \mathrm{A}_{23}$$

$$=-3-3+0=-6.$$

(β) $$|\mathrm{A}|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=(-1)^{1+3}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}+0\cdot \mathrm{A}_{23}+(-1)^{3+3}\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$=-1+0-5=-6.$$

3.6 Υπολογισμός του αντίστροφου πίνακα

Όπως γνωρίζουμε, ο αντίστροφος πίνακας A^{-1} ενός πίνακα $\mathrm{A}\in \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$, αν υπάρχει, ορίζεται από τις ισότητες $\mathrm{A}\mathrm{A}^{-1}=\mathrm{A}^{-1}\mathrm{A}=\mathrm{I}_n$.

Θεώρημα 3.6.1 *Αν* $\mathrm{A}\in \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ *και* $adj\mathrm{A}$ *είναι ο συμπληρωματικός πίνακας του* A*, τότε θα ισχύει:*

$$\mathrm{A}\left(adj\mathrm{A}\right)=\left(adj\mathrm{A}\right)\mathrm{A}=\left(\det \mathrm{A}\right)\mathrm{I}_n .$$

Απόδειξη

Παρατηρούμε ότι η κύρια διαγώνιος του γινομένου $\mathrm{A}\left(adj\mathrm{A}\right)$ έχει στοιχεία

$$a_{i1}\mathrm{A}_{i1}+a_{i2}\mathrm{A}_{i2}+\ldots+a_{in}\mathrm{A}_{in}=\det \mathrm{A},\text{ για κάθε } i=1,2,\ldots,n,$$

ενώ τα στοιχεία c_{ij} με $i\neq j$, του γινομένου $\mathrm{A}\left(adj\mathrm{A}\right)$ είναι

$$c_{ij}=a_{i1}\mathrm{A}_{j1}+a_{i2}\mathrm{A}_{j2}+\ldots+a_{in}\mathrm{A}_{jn},$$

δηλαδή, είναι το ανάπτυγμα ως προς τη $j-$γραμμή της ορίζουσας ενός πίνακα που προκύπτει από τον A, αν αντικαταστήσουμε τη $j-$γραμμή του με την $i-$γραμμή του. Αλλά τότε ο πίνακας αυτός έχει δύο γραμμές ταυτιζόμενες, οπότε η ορίζουσά του είναι 0.

Άρα είναι $c_{ij}=0$, για κάθε $i\neq j$ και έτσι έχουμε:

$$\mathrm{A}\left(adj\mathrm{A}\right) = diag\left(\det \mathrm{A}, \det \mathrm{A}, ..., \det \mathrm{A}\right) = \left(\det \mathrm{A}\right)\mathrm{I}_n .$$

Όμοια βρίσκουμε ότι: $\left(adj\mathrm{A}\right)\mathrm{A} = \left(\det \mathrm{A}\right)\mathrm{I}_n$. □

Θεώρημα 3.6.2 *Ο αντίστροφος ενός πίνακα $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ υπάρχει, αν, και μόνον αν, η ορίζουσά του είναι διάφορη από το μηδέν, δηλαδή ισχύει:*

$$\mathrm{A} \ \textbf{αντιστρέψιμος} \ \Leftrightarrow \ \det \mathrm{A} \neq 0 .$$

Επιπλέον, αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε

$$\mathrm{A}^{-1} = \left(\frac{1}{\det \mathrm{A}}\right) adj\mathrm{A} .$$

Απόδειξη

Αν $\det \mathrm{A} \neq 0$, τότε από το θεώρημα 3.5.1 έχουμε

$$\mathrm{A}\left(\frac{1}{\det \mathrm{A}} adj\mathrm{A}\right) = \left(\frac{1}{\det \mathrm{A}} adj\mathrm{A}\right)\mathrm{A} = \mathrm{I}_n ,$$

οπότε υπάρχει ο αντίστροφος του πίνακα A και ισχύει ότι

$$\mathrm{A}^{-1} = \left(\frac{1}{\det \mathrm{A}}\right) adj\mathrm{A} .$$

Αντίστροφα, αν υπάρχει ο A^{-1}, τότε ισχύει $\mathrm{A}\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{A} = \mathrm{I}_n$ και

$$1 = \det \mathrm{I}_n = \left(\det \mathrm{A}\right)\left(\det \mathrm{A}^{-1}\right),$$

οπότε θα ισχύει ότι $\det \mathrm{A} \neq 0$ και μάλιστα είναι

$$\det \mathrm{A}^{-1} = \left(\det \mathrm{A}\right)^{-1} .$$ □

Παράδειγμα 1. Να υπολογιστεί ο αντίστροφος του πίνακα

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Λύση. Επειδή είναι

$$\det \mathrm{A} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 ,$$

υπάρχει ο αντίστροφος του A και είναι ο πίνακας

$$A^{-1} = \left(\frac{1}{\det A}\right) adj A = \left(\frac{1}{\det A}\right)\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

αφού, όπως εύκολα υπολογίζουμε, είναι

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0, A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2, A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1, A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1, A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1, A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0, A_{33} = -1.$$

3. 7 Γραμμικά συστήματα - Ο κανόνας του Cramer

Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα

$$AX = B, \qquad (\Sigma)$$

που μελετήσαμε στο κεφάλαιο 2. Εδώ υποθέτουμε ότι ο $\nu \times \nu$ πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, δηλαδή ισχύει ότι $\det A \neq 0$. Ένα τέτοιο σύστημα λέγεται **σύστημα Cramer** και έχει μοναδική λύση, σύμφωνα με το θεώρημα που ακολουθεί:

Θεώρημα 3.7.1 (Κανόνας του Cramer)
Το γραμμικό σύστημα

$$AX = B, \qquad \mathbf{(\Sigma)}$$

όπου ο A *είναι* $\nu \times \nu$ *αντιστρέψιμος πίνακας, έχει μοναδική λύση*

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\nu \end{bmatrix}, \quad \mu\varepsilon \quad x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, \; i = 1, 2, \ldots, \nu,$$

όπου ο πίνακας A_i *προκύπτει από τον πίνακα* A *με αντικατάσταση της* $i-$ *στήλης του με τη στήλη* B *των σταθερών όρων.*

Απόδειξη. Επειδή ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, υπάρχει ο πίνακας A^{-1} και έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathrm{AX}=\mathrm{B} &\Leftrightarrow \mathrm{A}^{-1}\left(\mathrm{AX}\right)=\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B} \\ &\Leftrightarrow \left(\mathrm{A}^{-1}\mathrm{A}\right)\mathrm{X}=\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B} \\ &\Leftrightarrow \mathrm{I}_\nu \mathrm{X}=\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B} \\ &\Leftrightarrow \mathrm{X}=\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}, \end{aligned}$$

οπότε το σύστημα έχει μοναδική λύση, η οποία δίνεται από την ισότητα

$$\mathrm{X}=\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}\,.$$

Για να βρούμε την αναλυτική μορφή της λύσης, χρησιμοποιούμε την ισότητα $\mathrm{A}^{-1}=\left(\dfrac{1}{\det \mathrm{A}}\right) adj\mathrm{A}$ που δίνει τον αντίστροφο του πίνακα A και έχουμε:

$$\mathrm{X}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\nu \end{bmatrix}=\frac{1}{\det \mathrm{A}}\begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{21} & \cdots & \mathrm{A}_{\nu 1} \\ \mathrm{A}_{12} & \mathrm{A}_{22} & \cdots & \mathrm{A}_{\nu 2} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ \mathrm{A}_{1\nu} & \mathrm{A}_{2\nu} & \cdots & \mathrm{A}_{\nu\nu} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_\nu \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x_i=\frac{1}{\det \mathrm{A}}\left(\mathrm{A}_{1i}\beta_1+\mathrm{A}_{2i}\beta_2+\ldots+\mathrm{A}_{\nu i}\beta_\nu\right),\ i=1,2,\ldots,\nu$$

$$x_i=\frac{\det \mathrm{A}_i}{\det \mathrm{A}},\ i=1,2,\ldots,\nu\,,$$

όπου ο πίνακας A_i έχει προκύψει από τον πίνακα A με αντικατάσταση της $i-$ στήλης του με τη στήλη B των σταθερών όρων, είναι δηλαδή

$$\mathrm{A}_i=\left(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\ldots,\tilde{a}_{i-1},\mathrm{B},\tilde{a}_{i+1},\ldots,\tilde{a}_\nu\right),\ i=1,2,\ldots,\nu\,.$$

Παρατηρήσεις

- *Ο κανόνας του Cramer χρησιμοποιείται μόνο για γραμμικά συστήματα με τετραγωνικό πίνακα και μάλιστα αντιστρέψιμο, ενώ η μέθοδος απαλοιφής του Gauss χρησιμοποιείται σε οποιοδήποτε γραμμικό σύστημα.*
- *Η εργασία για την εύρεση των αγνώστων x_i με τον κανόνα του Cramer είναι ιδιαίτερα επίπονη για μεγάλες τιμές του ν. Στη περίπτωση αυτή είναι προτιμότερη η χρήση της μεθόδου απαλοιφής του Gauss. Στα θετικά του κανόνα του Cramer είναι ότι δίνει θεωρητικά τη μορφή της λύσης για τον πίνακα X των αγνώστων και για κάθε άγνωστο x_i ως πηλίκο οριζουσών.*

Παράδειγμα 1. Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{Bmatrix} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ x+y+az=1 \end{Bmatrix},\ a\in\mathbb{R}.$$

Λύση. Τα σύστημα γράφεται ως ισότητα πινάκων στη μορφή

$$\mathrm{AX}=\mathrm{B} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Έχουμε

$$\det \mathrm{A}=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+2 & a+2 & a+2 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=(a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=(a+2)(a-1)^2$$

και $\det \mathrm{A}=0 \Leftrightarrow a=1$ ή $a=-2$, οπότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $a\in\mathbb{R}-\{-2,1\}$, τότε είναι $\det \mathrm{A}\neq 0$ και έχουμε σύστημα Cramer που έχει μοναδική λύση

$$(x,y,z)=\left(\frac{\det \mathrm{A}_1}{\det \mathrm{A}},\frac{\det \mathrm{A}_2}{\det \mathrm{A}},\frac{\det \mathrm{A}_3}{\det \mathrm{A}}\right)=\left(\frac{1}{a+2},\frac{1}{a+2},\frac{1}{a+2}\right),$$

  αφού είναι

$$\det \mathrm{A}_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=(a-1)^2,\ \det \mathrm{A}_2=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=(a-1)^2$$

$$\text{και } \det \mathrm{A}_3=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(a-1)^2.$$

- Αν $a=1$, τότε $\det \mathrm{A}=0$ και το δεδομένο σύστημα γίνεται:

$$x+y+z=1 \Leftrightarrow$$

$$z=1-x-y,\ \ x,y\in\mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$(x,y,z)=(\kappa,\lambda,1-\kappa-\lambda),\ \kappa,\lambda\in\mathbb{R},$$

  δηλαδή το σύστημα έχει διπαραμετρική απειρία λύσεων.

- Αν $a=-2$, τότε $\det \mathrm{A}=0$ και το δεδομένο σύστημα γίνεται:

$$\begin{Bmatrix} -2x+y+z=1 \\ x-2y+z=1 \\ x+y-2z=1 \end{Bmatrix},$$

από το οποίο με πρόσθεση των τριών εξισώσεων κατά μέλη έχουμε την εξίσωση $0x+0y+0z=3$, η οποία είναι αδύνατη, οπότε και το σύστημα είναι αδύνατο.

3.8 Μέθοδοι υπολογισμού οριζουσών

Για την ορίζουσα ενός $n\times n$ πίνακα με $n=2$ ή $n=3$ μπορούν εύκολα να χρησιμοποιηθούν η σχέση (5) του ορισμού, αλλά και οι σχέσεις (6) και (7), δηλαδή του αναπτύγματος της ορίζουσας ως προς τα στοιχεία μιας γραμμής ή μιας στήλης του και κατά προτίμηση αυτής που παρουσιάζει τα περισσότερα μηδενικά.

Όμως για $n\geq 4$ ο υπολογισμός της ορίζουσας ενός $n\times n$ πίνακα είναι αρκετά δύσκολο να πραγματοποιηθεί με κάποιον από τους παραπάνω τύπους και γίνεται ακόμη δυσκολότερος, όσο μεγαλώνει το n. Για αυτό το λόγο θα περιγράψουμε στη συνέχεια μερικές μεθόδους που διευκολύνουν τον υπολογισμό της ορίζουσας ενός $n\times n$ πίνακα.

(i) Μέθοδος εξαγωγής γραμμικών παραγόντων

Θεωρούμε την ορίζουσα του πίνακα A ως πολυώνυμο $D=D(x,y,...)$ μιας ή περισσοτέρων ανεξάρτητων μεταβλητών και με εφαρμογή των ιδιοτήτων των οριζουσών ή βρίσκοντας κάποιες τιμές των ανεξάρτητων μεταβλητών που μηδενίζουν την ορίζουσα του A, προσδιορίζουμε γραμμικούς παράγοντες των ανεξάρτητων μεταβλητών που διαιρούν το πολυώνυμο $D(x,y,...)$ και είναι πρώτοι μεταξύ τους. Τότε και το γινόμενο αυτών των παραγόντων θα διαιρεί το πολυώνυμο $D(x,y,...)$ και στη συνέχεια συγκρίνοντας κάποιους όρους της ορίζουσας με αντίστοιχους όρους του γινομένου των γραμμικών παραγόντων προσδιορίζουμε το πηλίκο της διαίρεσης του $D(x,y,...)$ με το παραπάνω γινόμενο.

Παράδειγμα 1. Να υπολογίσετε την **ορίζουσα του Vandermonde**

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1^{n-1} & x_1^{n-2} & \cdots & x_1 & 1 \\ x_2^{n-1} & x_2^{n-2} & \cdots & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^{n-1} & x_n^{n-2} & \cdots & x_n & 1 \end{vmatrix}.$$

Λύση. Θεωρούμε την D_n ως πολυώνυμο της ανεξάρτητης μεταβλητής x_1, δηλαδή $D_n=D_n(x_1)$. Παρατηρούμε ότι για $x_1=x_2, x_1=x_3,...,x_1=x_n$ η ορίζουσα έχει δύο γραμμές ταυτιζόμενες, οπότε θα ισούται με μηδέν, δηλαδή θα έχουμε

$$D_n(x_2)=D_n(x_3)=...=D_n(x_n)=0.$$

Άρα το πολυώνυμο $D_n = D_n(x_1)$ διαιρείται από τα γραμμικά πολυώνυμα $x_1 - x_2, x_1 - x_3, ..., x_1 - x_n$ που είναι πρώτα μεταξύ τους, οπότε έχουμε

$$D_n = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\cdots(x_1 - x_n)Q(x_2, x_3, ..., x_n). \tag{1}$$

Αναπτύσσοντας την D_n ως προς τα στοιχεία της πρώτης γραμμής, παρατηρούμε ότι αυτή είναι πολυώνυμο ως προς x_1 βαθμού $n-1$ και ο συντελεστής του x_1^{n-1} είναι η ορίζουσα του Vandermonde D_{n-1} ως προς $x_2, x_3, ..., x_n$. Αλλά και το γινόμενο $(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\cdots(x_1 - x_n)$ είναι βαθμού $n-1$ ως προς x_1, ενώ ο συντελεστής του x_1^{n-1} είναι ίσος με 1. Επομένως, από την ισότητα (1) θα έχουμε $Q(x_2, x_3, ..., x_n) = D_{n-1}$, οπότε η ισότητα αυτή γίνεται:

$$D_n = D_{n-1}(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\cdots(x_1 - x_n). \tag{2}$$

Εργαζόμενοι ομοίως για την $D_i, i = n-1, n-2, ..., 2$ λαμβάνουμε

$$D_{n-1} = D_{n-2}(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)\cdots(x_2 - x_n), \tag{3}$$

....

$$D_3 = D_2(x_{n-2} - x_n)(x_{n-1} - x_n), \tag{4}$$

$$D_2 = D_1(x_{n-1} - x_n) = (x_{n-1} - x_n). \tag{5}$$

Με πολλαπλασιασμό των σχέσεων (2)-(5) κατά μέλη λαμβάνουμε

$$\boxed{\begin{gathered} D_n = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)...(x_1 - x_n)(x_2 - x_3)\cdots(x_2 - x_n)...(x_{n-1} - x_n) \\ \Leftrightarrow \quad D_n = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j). \end{gathered}}$$

Παράδειγμα 2. Να υπολογίσετε την ορίζουσα

$$D = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}.$$

Λύση. Αφαιρώντας τη δεύτερη στήλη από την πρώτη και την τέταρτη από την τρίτη, λαμβάνουμε:

$$D = D(x, y) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 1 \\ x & 1-x & 0 & 1 \\ 0 & 1 & y & 1 \\ 0 & 1 & y & 1-y \end{vmatrix} = xy \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1-x & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} = xyD_1(x, y).$$

Παρατηρούμε ακόμη ότι η ορίζουσα $D_1(x,y)$ μηδενίζεται για $x=0$ και $y=0$. Επομένως το γινόμενο xy είναι παράγοντας της $D_1(x,y)$, η οποία μπορεί να γραφεί

$$D_1(x,y)=xyQ(x,y). \tag{6}$$

Επειδή η $D_1(x,y)$ είναι πρωτοβάθμια ως προς xy και περιέχει τον όρο xy με συντελεστή $+1$, από τη σχέση (6) προκύπτει ότι $Q(x,y)=1$, οπότε τελικά θα είναι $D=x^2y^2$.

(ii) Μέθοδος αναγωγής σε τριγωνική μορφή

Με εφαρμογή των ιδιοτήτων των οριζουσών προσπαθούμε να φέρουμε τη δεδομένη ορίζουσα σε τριγωνική μορφή, οπότε αυτή θα ισούται με το γινόμενο των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου της ορίζουσας που προκύπτει.

Παράδειγμα 3. Να υπολογίσετε την ορίζουσα του $n\times n$ πίνακα με

$$a_{ij}=|i-j|.$$

Λύση. Ο πίνακας Α είναι ο

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Αφαιρώντας από κάθε γραμμή την προηγούμενή της, λαμβάνουμε

$$\det\mathrm{A}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & -1 \end{vmatrix}.$$

Αν τώρα προσθέσουμε την τελευταία στήλη σε κάθε μία από τις προηγούμενες βρίσκουμε

$$\det\mathrm{A}=\begin{vmatrix} n-1 & n & n+1 & \cdots & n-1 \\ 0 & -2 & -2 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & -2 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}=\left(-1\right)^{n-1}(n-1)2^{n-2}.$$

(iii) Μέθοδος των αναδρομικών σχέσεων

Πολλές φορές όταν αναπτύσσουμε μία ορίζουσα D_n ως προς τα στοιχεία μιας γραμμής ή στήλης της, οι ελάσσονες ορίζουσες που εμφανίζονται έχουν την ίδια μορφή με τη δεδομένη ορίζουσα. Στη περίπτωση αυτή το ανάπτυγμα της ορίζουσας οδηγεί σε μία αναδρομική σχέση της γενικής μορφής

$$D_n = p_1 D_{n-1} + p_2 D_{n-2} + \ldots + p_k D_{n-k}, \tag{7}$$

όπου $p_1, p_2, \ldots, p_k$ είναι σταθερές και $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.

Από την (7) είναι γενικά δύσκολος ο υπολογισμός του γενικού όρου D_n.

Όμως, ειδικά για $k \in \{1, 2\}$, ο υπολογισμός του D_n είναι αρκετά πιο εύκολος.

Για $k = 1$, η σχέση (7) γίνεται

$$D_n = p_1 D_{n-1}, n > 1,$$

οπότε η ακολουθία D_n είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο p_1 και έχουμε

$$D_n = p_1^{n-1} D_1,\ n > 1,$$

όπου η D_1 είναι ορίζουσα πίνακα 1×1 και ισούται με το μοναδικό του στοιχείο.

Για $k = 2$ η (7) γίνεται

$$D_n = pD_{n-1} + qD_{n-2},\ n > 2. \tag{8}$$

Σύμφωνα με τη θεωρία των εξισώσεων διαφορών, αν α, β είναι οι ρίζες της **χαρακτηριστικής εξίσωσης**

$$t^2 - pt - q = 0, \tag{9}$$

θα έχουμε $p = \alpha + \beta,\ q = -\alpha\beta$ και η σχέση (8) γράφεται ως

$$D_n - \beta D_{n-1} = \alpha\left(D_{n-1} - \beta D_{n-2}\right), \tag{10}$$

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta\left(D_{n-1} - \alpha D_{n-2}\right). \tag{11}$$

Διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις:

I. $p^2 + 4q \neq 0$**, οπότε θα είναι** $\alpha \neq \beta$**.**

Τότε οι ακολουθίες $D_n - \beta D_{n-1}$ και $D_n - \alpha D_{n-1}$ είναι γεωμετρικές πρόοδοι με λόγο α και β, αντίστοιχα, οπότε θα έχουμε

$$D_n - \beta D_{n-1} = \alpha^{n-2}\left(D_2 - \beta D_1\right), \tag{12}$$

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta^{n-2}\left(D_2 - \alpha D_1\right). \tag{13}$$

Από τις (12) και (13) απαλείφοντας την D_{n-1}, λαμβάνουμε

$$D_n = c_1\alpha^n + c_2\beta^n, \quad \text{όπου } c_1 = \frac{D_2 - \beta D_1}{\alpha(\alpha-\beta)}, \; c_2 = -\frac{D_2 - \alpha D_1}{\beta(\alpha-\beta)}. \qquad (14)$$

Στη πράξη δίνουμε απ' ευθείας το γενικό όρο D_n στη μορφή (14) και υπολογίζουμε τα c_1, c_2 από τις ***«αρχικές συνθήκες»*** :

$$c_1\alpha + c_2\beta = D_1,$$
$$c_1\alpha^2 + c_2\beta^2 = D_2.$$

II. $p^2 + 4q = 0$**, οπότε θα είναι** $\alpha = \beta$**.**

Τότε οι (10) και (11) γράφονται

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \alpha\left(D_{n-1} - \alpha D_{n-2}\right), n > 2$$

και η ακολουθία $D_n - \alpha D_{n-1}$ είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο α, οπότε

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \left(D_2 - \alpha D_1\right)\alpha^{n-2} \quad , \quad n > 2$$
$$\Leftrightarrow D_n = \alpha D_{n-1} + \left(D_2 - \alpha D_1\right)\alpha^{n-2}, n > 2. \qquad (15)$$

Η σχέση (15) ισχύει για κάθε $n > 2$, οπότε, αν θέσουμε όπου n το $n-1$, έχουμε

$$D_{n-1} = \alpha D_{n-2} + \left(D_2 - \alpha D_1\right)\alpha^{n-3}, n > 2,$$

μέσω της οποίας η σχέση (15) γίνεται

$$D_n = \alpha^2 D_{n-2} + 2\left(D_2 - \alpha D_1\right)\alpha^{n-2}, n > 2.$$

Με επανάληψη της παραπάνω διαδικασίας λαμβάνουμε

$$D_n = D_1\alpha^{n-1} + (n-1)\left(D_2 - \alpha D_1\right)\alpha^{n-2}, n > 2 \Leftrightarrow$$

$$D_n = \alpha^{n-1}\left[D_1 + \left(\frac{n-1}{\alpha}\right)\left(D_2 - \alpha D_1\right)\right].$$

Στη πράξη δίνουμε απ' ευθείας το γενικό όρο στη μορφή

$$D_n = (c_1 + c_2 n)\alpha^n, \; n \in \mathbb{N}^*$$

και υπολογίζουμε τις παραμέτρους c_1, c_2 από τις ***«αρχικές συνθήκες»***

$$(c_1 + c_2)\alpha = D_1$$
$$(c_1 + 2c_2)\alpha^2 = D_2.$$

Παρατήρηση

Στη περίπτωση που είναι $p, q \in \mathbb{Z}$ *και* $p^2 + 4q < 0$ *γράφουμε τις συζυγείς μιγαδικές ρίζες τις χαρακτηριστικής εξίσωσης (9) σε πολική μορφή*

$$\alpha = \rho\left(\cos\theta + i\sin\theta\right), \; \beta = \rho\left(\cos\theta - i\sin\theta\right),$$

οπότε χρησιμοποιώντας τον τύπο του De Moirve και τη σχέση (14) καταλήγουμε στη σχέση

$$D_n = A\rho^n \cos\left(n\theta + B\right),\ n \in \mathbb{N}^*,$$

όπου A, B είναι σταθερές που υπολογίζονται από τις τιμές των D_1 και D_2.

Περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τις αναδρομικές σχέσεις και γενικότερα για τις εξισώσεις διαφορών, μπορεί κάποιος να βρει στο βιβλίο:
«Introduction to Difference Equations», Samuel Goldberg, Dover, (1986).

Παράδειγμα 4. Να υπολογίσετε την ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα $\mathrm{A} = \left(a_{ij}\right)$, αν για κάθε $i, j = 1, 2, \ldots, n$ έχουμε:

$$a_{ij} = \begin{cases} 7, & \text{αν } i = j \\ 5, & \text{αν } j = i+1 \\ 2, & \text{αν } i = j+1 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Λύση. Σύμφωνα με τα δεδομένα έχουμε

$$D_n = \det \mathrm{A} = \begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 7 \end{vmatrix}.$$

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα ως προς τα στοιχεία της πρώτης στήλης, λαμβάνουμε

$$D_n = 7D_{n-1} - 10D_{n-2},\ n > 2.$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $t^2 - 7t + 10 = 0$ και έχει ρίζες $\alpha = 5$, $\beta = 2$, οπότε ο γενικός όρος της ακολουθίας D_n θα είναι

$$D_n = c_1 5^n + c_2 2^n,\ n \in \mathbb{N}^*$$

με

$$\left\{5c_1 + 2c_2 = 7, 25c_1 + 4c_2 = 39\right\}.$$

Άρα θα είναι

$$c_1 = \frac{5}{3},\ c_2 = -\frac{2}{3} \quad \text{και} \quad D_n = \det \mathrm{A} = \frac{1}{3}\left(5^{n+1} - 2^{n+1}\right).$$

(iv) Μέθοδος ανάλυσης σε άθροισμα οριζουσών

Πολλές φορές μία ορίζουσα υπολογίζεται εύκολα, όταν αναλυθεί σε άθροισμα οριζουσών της ιδίας τάξης ως προς τις γραμμές ή τις στήλες της, σύμφωνα με το αξίωμα της διγραμμικότητας .

Παράδειγμα 5. Να υπολογίσετε την ορίζουσα

$$D_n = \begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x+a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix}.$$

Λύση. Αν γράψουμε κάθε στοιχείο εκτός της κυρίας διαγωνίου στη μορφή a_i+0, τότε η ορίζουσα D_n γίνεται

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & a_2 & x+a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ 0 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x+a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix}.$$

Επαναλαμβάνουμε στη συνέχεια την ίδια ανάλυση σε κάθε μία από τις δύο παραπάνω ορίζουσες αλλά και στις ορίζουσες που προκύπτουν. Οι περισσότερες από τις ορίζουσες που προκύπτουν έχουν δύο στήλες ανάλογες, οπότε είναι μηδενικές, εκτός από τις ακόλουθες:

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix} = x^n, \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & x & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ a_1 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix} = a_1 x^{n-1}, \ldots, \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & a_n \\ 0 & x & 0 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = a_n x^{n-1}.$$

Άρα έχουμε:

$$D_n = x^n + \left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right) x^{n-1}.$$

(v) Μέθοδος αλλαγής των στοιχείων της ορίζουσας

Πολλές φορές, αν προσθέσουμε σε όλα τα στοιχεία μιας ορίζουσας τον ίδιο αριθμό, η ορίζουσα που προκύπτει υπολογίζεται ευκολότερα. Η σχέση της ορίζουσας του πίνακα που προκύπτει με την ορίζουσα του αρχικού πίνακα δίνεται από το θεώρημα που ακολουθεί.

Θεώρημα 3.8.1 *Αν* $\mathrm{A}=\left(a_{ij}\right)\in \mathrm{M}_n\left(\mathrm{K}\right)$ *και* $\mathrm{B}=\left(a_{ij}+x\right)\in \mathrm{M}_n\left(\mathrm{K}\right)$, *τότε*

$$\det \mathrm{B}=\det \mathrm{A}+x\left(\sum_{i,j=1}^{n}\mathrm{A}_{ij}\right),$$

όπου A_{ij} *είναι τα αλγεβρικά συμπληρώματα των στοιχείων* a_{ij} *του* A.

Απόδειξη. Η $\det \mathrm{B}$ αναλύεται σε άθροισμα οριζουσών, από τις οποίες, όσες έχουν δύο τουλάχιστον στήλες με όλα τα στοιχεία τους ίσα με x, είναι μηδενικές, ενώ όσες έχουν μία στήλη με όλα τα στοιχεία της ίσα με x, όταν αναπτυχθούν ως προς τα στοιχεία αυτής της στήλης, έχουν τελικά άθροισμα

$$x\left(\sum_{i,j=1}^{n}\mathrm{A}_{ij}\right).$$

Επιπλέον, μία από τις ορίζουσες του αθροίσματος είναι και η $\det \mathrm{A}$, οπότε είναι φανερή η ζητούμενη σχέση. □

Παράδειγμα 6. Να υπολογίσετε την ορίζουσα

$$D_n=\det \mathrm{B}=\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b & b\\ b & a & \cdots & b & b\\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots & \vdots\\ b & b & \cdots & a & b\\ b & b & \cdots & b & a\end{vmatrix}.$$

Λύση. Αν θεωρήσουμε τον πίνακα $\mathrm{A}=diag\left(a-b,a-b,...,a-b\right)=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$, τότε θα είναι $\mathrm{B}=\left(a_{ij}+b\right)$. Επιπλέον έχουμε $\det \mathrm{A}=\left(a-b\right)^n$, ενώ τα αλγεβρικά συμπληρώματα των στοιχείων του πίνακα A είναι

$$\mathrm{A}_{ij}=\begin{cases} n\left(a-b\right)^{n-1}, & \text{αν } i=j,\\ 0\quad , & \text{αν } i\neq j.\end{cases}$$

Επομένως, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα θα έχουμε

$$D_n=\left(a-b\right)^n+bn\left(a-b\right)^{n-1}=\left(a-b\right)^{n-1}[a+(n-1)b].$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να αποδείξετε ότι:

$$\begin{vmatrix} a & b-c & c+b \\ a+c & b & c-a \\ a-b & b+a & c \end{vmatrix} = (a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

2. Να λύσετε την εξίσωση

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & b & c \\ a & b & x & c \\ a & b & c & x \end{vmatrix} = 0.$$

3. Να υπολογίσετε την ορίζουσα του πίνακα $\mathrm{A} = \left(a_{ij}\right) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, αν είναι

$$a_{ij} = \begin{cases} x, \text{ αν } i = j, \\ a, \text{ αν } i \neq j. \end{cases}$$

4. Να υπολογίσετε την ορίζουσα των $(n+1)\times(n+1)$ πινάκων

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x & 1 \\ a_2 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & x \end{bmatrix}, \quad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ b_1 & b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-2} & b_{n-1} \\ b_2 & b_1 & b_0 & \cdots & b_{n-3} & b_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_0 & 1 \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_1 & b_0 \end{bmatrix},$$

όπου $b_j = b_0 + jd$, για κάθε $j = 1,2,\ldots,n$ και $b_0, d \in \mathbb{R}$ σταθεροί.

5. Να υπολογίσετε την ορίζουσα των $n\times n$ πινάκων

$$\mathrm{A} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ -x & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x & x \end{vmatrix}, \mathrm{B} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ -x_1 & x_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -x_2 & x_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x_{n-1} & x_n \end{vmatrix}$$

6. Να υπολογίσετε την ορίζουσα του $n\times n$ πίνακα $\mathrm{A}=\left(a_{ij}\right)$ σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

(i) $a_{ij}=\begin{cases} i, & \text{αν } i=j \\ n, & \text{αν } i\neq j \end{cases}$ **(ii)** $a_{ij}=\min\left(i,j\right)$ **(iii)** $a_{ij}=\max\left(i,j\right)$,

(iv) $a_{ij}=\begin{cases} 0, & \text{αν } i=j \\ 1, & \text{αν } i\neq j \end{cases}$, **(v)** $a_{ij}=\begin{cases} (-1)^{|i-j|}, & \text{αν } i=j \\ 2, & \text{αν } i\neq j \end{cases}$.

7. Έστω $D_n=\det\mathrm{A}$, όπου $\mathrm{A}=\left(a_{ij}\right)\in\mathrm{M}_n\left(\mathbb{R}\right)$ με $a_{ij}=\begin{cases} x, & \text{αν } i=j \\ a, & \text{αν } i<j \\ -a, & \text{αν } i>j \end{cases}$.

Να αποδείξετε ότι:

(i) $D_n=2xD_{n-1}-\left(x^2-a^2\right)D_{n-2}$, $n>2$, **(ii)** $D_n=\dfrac{1}{2}\left[\left(x+a\right)^n+\left(x-a\right)^n\right]$.

8. Να υπολογίσετε την ορίζουσα του $n\times n$ πίνακα

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} 1+y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1 & 1+y_2 & \cdots & y_n \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ y_1 & y_2 & \cdots & 1+y_n \end{bmatrix}.$$

9. Αν $D_n=\det\mathrm{A}$, όπου $\mathrm{A}=\left(a_{ij}\right)\in\mathrm{M}_n\left(\mathbb{R}\right)$ με $a_{ij}=\begin{cases} x_i & \text{, αν } i=j \\ j-i, & \text{αν } |i-j|=1 \\ a, & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$,

να αποδείξετε ότι :

$$D_1=x_1,\quad D_2=x_1x_2+1 \quad \text{και} \quad D_n=x_nD_{n-1}+D_{n-2}, n>2.$$

10. Έστω η συμμετρική ομάδα S_n τάξης n και η απεικόνιση

$$\varphi: S_n \ni \sigma \to \varphi(\sigma)=\mathrm{E}_{\sigma(1)1}+\mathrm{E}_{\sigma(2)2}+\ldots+\mathrm{E}_{\sigma(n)n}\in\mathrm{M}_n\left(\mathbb{R}\right),$$

όπου E_{ij} είναι ο πίνακας που έχει το $ij-$ στοιχείο του ίσο με 1 και τα υπόλοιπα στοιχεία του ίσα με 0.

(i) Χρησιμοποιώντας τις ισότητες $\mathrm{E}_{ij}\mathrm{E}_{lk}=\begin{cases} \mathrm{E}_{ik}, & \text{αν } j=l \\ \mathrm{O}, & \text{αν } j\neq l \end{cases}$, να αποδείξετε ότι: $\varphi(\sigma)\varphi(\tau)=\varphi(\tau\circ\sigma)$.

(ii) Να αποδείξετε ότι: $\det\varphi(\sigma)=\varepsilon(\sigma)=\begin{cases} 1, & \text{αν } \sigma \text{ άρτια} \\ -1, & \text{αν } \sigma \text{ περιττή} \end{cases}$.

11. Για τους $n\times n$ πίνακες A και B, να αποδείξετε ότι:

(i) $adj(\mathrm{AB})=(adj\mathrm{B})(adj\mathrm{A})$ **(ii)** $\det(adj\mathrm{A})=(\det\mathrm{A})^{n-1}$

(iii) $adj(adj\mathrm{A})=(\det\mathrm{A})^{n-2}\mathrm{A}$ **(iv)** $\det[adj(adj\mathrm{A})]=(\det\mathrm{A})^{(n-1)^2}$.

12. Αν $\mathrm{A}\in\mathrm{M}_m(\mathrm{K}),\mathrm{D}\in\mathrm{M}_n(\mathrm{K}),\mathrm{B}\in\mathrm{M}_{m\times n}$ και O είναι ο $n\times m$ μηδενικός πίνακας, να αποδείξετε ότι ο πίνακας $\mathrm{M}=\begin{bmatrix}\mathrm{A} & \mathrm{B}\\ \mathrm{O} & \mathrm{D}\end{bmatrix}$:

(i) έχει ορίζουσα $\det\mathrm{M}=(\det\mathrm{A})(\det\mathrm{D})$

(ii) είναι αντιστρέψιμος, αν, και μόνον αν, οι πίνακες A και D είναι αντιστρέψιμοι και ο αντίστροφός του είναι

$$\begin{pmatrix}\mathrm{A} & \mathrm{B}\\ \mathrm{O} & \mathrm{D}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\mathrm{A}^{-1} & -\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}\mathrm{D}^{-1}\\ \mathrm{O} & \mathrm{D}^{-1}\end{pmatrix}.$$

13. Αν είναι $\mathrm{A}\in\mathrm{M}_m(\mathrm{K}),\mathrm{B}\in\mathrm{M}_{m\times n}(\mathrm{K}),\mathrm{C}\in\mathrm{M}_{n\times m}(\mathrm{K}),\mathrm{D}\in\mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ και θεωρήσουμε τον πίνακα $\mathrm{M}=\begin{pmatrix}\mathrm{A} & \mathrm{B}\\ \mathrm{C} & \mathrm{D}\end{pmatrix}$, να αποδείξετε ότι:

(i) $\det\mathrm{M}=\det\mathrm{A}\det\left(\mathrm{D}\text{-}\mathrm{C}\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}\right)$, αν A αντιστρέψιμος,

(ii) $\det\mathrm{M}=\det D\det\left(\mathrm{A}\text{-}\mathrm{B}\mathrm{D}^{-1}\mathrm{C}\right)$, αν D αντιστρέψιμος.

Ύστερα, αν ο M είναι αντιστρέψιμος, να βρεθεί ο αντίστροφός του.

Υπόδειξη: *Να γραφεί ο πίνακας* M *στη μορφή* $\begin{pmatrix}\mathrm{A} & \mathrm{O}\\ \mathrm{C} & \mathrm{I}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathrm{I} & \mathrm{P}\\ \mathrm{O} & \mathrm{Q}\end{pmatrix}$, *όπου* P *και* Q *είναι κατάλληλοι πίνακες.*

14. Έστω $\mathrm{A}\in\mathrm{M}_n(\mathrm{K})$, $\mathrm{B}\in\mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ και ο πίνακας $\mathrm{M}=\begin{pmatrix}\mathrm{A} & \mathrm{B}\\ \mathrm{B} & \mathrm{A}\end{pmatrix}$.

Να αποδείξετε ότι: $\det\mathrm{M}=\det(\mathrm{A}-\mathrm{B})\det(\mathrm{A}+\mathrm{B})$.

15. Θεωρούμε τον $n\times n$ πίνακα $\mathrm{A}=\left(a_{ij}(t)\right)$. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{d}{dt}(\det\mathrm{A})=\sum_{k=1}^{n}\det\mathrm{A}_k\ ,$$

όπου ο πίνακας A_k προκύπτει από τον A με αντικατάσταση της k-στήλης $\tilde{a}_k(t)$, από την παράγωγό της $\tilde{a}'_k(t) = \left[a'_{1k}(t) \quad \cdots \quad a'_{nk}(t)\right]^T$.

16. Με το θεώρημα του Rolle ή διαφορετικά, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\begin{vmatrix} f'(x) & f(a) & f(b) \\ g'(x) & g(a) & g(b) \\ h'(x) & h(a) & h(b) \end{vmatrix} = 0,$$

όπου $a \neq b$ και $f(x), g(x), h(x)$ είναι πραγματικές συναρτήσεις C^1-τάξης, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (a,b).

17. Στις διαφορικές εξισώσεις η **ορίζουσα του Wronski** χρησιμοποιείται για τον έλεγχο της γραμμικής ανεξαρτησίας των λύσεων των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων. Το όνομα αυτό της δόθηκε προς τιμή του Πολωνού Μαθηματικού Wronski (1788-1853).

Αν $y_i = y_i(x), x \in [a,b], i = 1,2,\ldots,n$ είναι πραγματικές συναρτήσεις που έχουν παράγωγο τουλάχιστον $(n-1)$-τάξης στο $[a,b]$, τότε η ορίζουσα Wronski αυτών ορίζεται από

$$W\left(y_1, y_2, \ldots, y_n\right) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) & \cdots & y'_n(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}, x \in [a,b].$$

Αποδεικνύεται, ότι οι συναρτήσεις $y_i = y_i(x), x \in [a,b], i = 1,2,\ldots,n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες, αν $W\left(y_1, y_2, \ldots, y_n\right) \neq 0,$ για κάθε $x \in [a,b]$.

Εφαρμογή. *Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητες:*

(i) $y_1(x) = e^x, y_2(x) = \cos x, y_3(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}$,

(ii) $y_i(x) = e^{k_i x}, i = 1,2,\ldots,n, x \in \mathbb{R}$ *και* $k_i \in \mathbb{R}$ *διαφορετικά ανά δύο.*

18. Οι πίνακες $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{M}_n\left(\mathbb{R}\right)$ είναι τέτοιοι, ώστε $\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 = \mathrm{AB}$ και ο πίνακας $\mathrm{AB} - \mathrm{BA}$ να είναι αντιστρέψιμος. Να αποδείξετε ότι ο n διαιρείται με το 3.