ΦΥΛΛΑΔΙΟ 1/ ΣΕΜΦΕ/Διανυσματικά γινόμενα
Γραμμική Άλγεβρα- 1^{o} Εξάμηνο/2011-12

1. Να αποδείξετε ότι για τα διανύσματα $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ ισχύουν :

(i) $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ και $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} \Rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{c}$

(ii) $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$

(iii) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})\mathbf{a}$

(iv) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{b} \times \mathbf{c}, \mathbf{c} \times \mathbf{a}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})^2$

2. Αν τα διανύσματα $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ είναι μη συνεπίπεδα, να αποδείξετε ότι και τα διανύσματα $\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{b} \times \mathbf{c}, \mathbf{c} \times \mathbf{a}$ είναι μη συνεπίπεδα.

3. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε διανύσματα $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ ισχύει η ισότητα:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) .$$

4. Αν $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ είναι δύο μη συγγραμμικά μοναδιαία διανύσματα, να προσδιορίσετε το διάνυσμα $\mathbf{u}$ που ικανοποιεί την εξίσωση

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{u})\mathbf{b} + 4\mathbf{a} = 2\mathbf{u}$$

5. Τα σημεία Α, Β, Γ και Δ έχουν διανύσματα θέσης ως προς το καρτεσιανό σύστημα αναφοράς $Oxyz$, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ και $\mathbf{d}$, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

$$\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma, \Delta \text{ συνεπίπεδα} \Leftrightarrow (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) - (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) + (\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{a}) - (\mathbf{d}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0 .$$

6. Τα σημεία Α, Β και Γ έχουν διανύσματα θέσης ως προς το καρτεσιανό σύστημα αναφοράς $Oxyz$, $\mathbf{a}, \mathbf{b},$ και $\mathbf{c}$, αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι:

$$\mathrm{E}(\mathrm{AB}\Gamma) = \frac{1}{2}\left|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{c} \times \mathbf{a})\right| .$$

7. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\mathbf{x} + \mathbf{x} \times \mathbf{a} = \mathbf{b}$, όπου $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ είναι γνωστά διανύσματα, έχει μοναδική λύση ως προς $\mathbf{x}$, η οποία και να βρεθεί.

8. Αν το διάνυσμα $\mathbf{w}$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{w}\times\mathbf{a})+\mathbf{w}=\mathbf{b},$$

όπου $\mathbf{a},\mathbf{b}$ είναι γνωστά διανύσματα, τότε:

(i) να αποδείξετε ότι $\mathbf{a}\cdot\mathbf{w}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ και $\mathbf{w}\times\mathbf{a}=\left(\dfrac{1}{1+|\mathbf{a}|^2}\right)(\mathbf{b}\times\mathbf{a})$,

(ii) να προσδιορίσετε τη λύση της εξίσωσης.

9. Έστω $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{r}\in\mathbf{\Delta}^3$, $\mathbf{a},\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$ και $t\in\mathbb{R}$. Να προσδιορίσετε την τιμή του t για την οποία έχει λύση ως προς $\mathbf{r}$ η εξίσωση

$$\mathbf{a}\times\mathbf{r}=\mathbf{a}+t\mathbf{b}$$

και στη συνέχεια να προσδιορίσετε τη λύση της εξίσωσης.

10 Αν $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ και $\mathbf{d}$ είναι διανύσματα του $\mathbf{\Delta}^3$, να αποδείξετε ότι:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=(\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{d})\mathbf{b}-(\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d})\mathbf{a}=(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{d})\mathbf{c}-(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})\mathbf{d}$$

11. Έστω $\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3\},\{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3\}$ δύο βάσεις του Δ^3 , όπου Δ^3 είναι ο Διανυσματικός χώρος των ελεύθερων διανυσμάτων του χώρου).
Οι βάσεις αυτές λέγονται **αμοιβαίες**, αν

$$\mathbf{a}_\mathrm{i}\cdot\mathbf{b}_\mathrm{j}=\delta_{\mathrm{ij}}=\begin{cases}1, \text{ αν } \mathrm{i}=\mathrm{j}\\ 0, \text{ αν } \mathrm{i}\neq\mathrm{j}\end{cases}\qquad \mathrm{i},\mathrm{j}=1,2,3.$$

Να αποδείξετε ότι οι βάσεις αυτές είναι αμοιβαίες, αν και μόνον αν, ισχύει:

$$\mathbf{b}_1=\frac{1}{\mathrm{V}}(\mathbf{a}_2\times\mathbf{a}_3),\mathbf{b}_2=\frac{1}{\mathrm{V}}(\mathbf{a}_3\times\mathbf{a}_1),\mathbf{b}_3=\frac{1}{\mathrm{V}}(\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2),\text{όπου } \mathrm{V}=(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3).$$

12. Αν $\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3\},\{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3\}$ είναι δύο αμοιβαίες βάσεις, να αποδείξετε ότι:

(i) $\mathrm{V}'=(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3)=1/\mathrm{V}$, όπου $\mathrm{V}=(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3)$

(ii) Το τυχόν διάνυσμα $\mathbf{r}$ γράφεται :

$$\mathbf{r}=(\mathbf{r}\cdot\mathbf{b}_1)\mathbf{a}_1+(\mathbf{r}\cdot\mathbf{b}_2)\mathbf{a}_2+(\mathbf{r}\cdot\mathbf{b}_3)\mathbf{a}_3\ .$$

Παράδοση φυλλαδίου 1: Μέχρι 21 Νοεμβρίου 2011