ΛΥΣΕΙΣ ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ 6 / 2010 -11
ΠΟΛΙΤΙΚΟΙ ΜΗΧΑΝΙΚΟΙ
Γραμμικές απεικονίσεις, Αλλαγή βάσης, Ιδιοτιμές, Ιδιοδιανύσματα

1. Έστω η γραμμική απεικόνιση $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με $T(1,1)=(2,0)$ και $T(0,1)=(-1,1)$.

(α) Βρείτε τον πίνακα της T, ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$,

(β) Να αποδείξετε ότι ορίζεται η απεικόνιση T^{-1} και να βρείτε τον πίνακά της ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$.

Λύση. (α) Έχουμε

$$T(1,1)=T(1,0)+T(0,1)=T(\mathbf{e_1})+T(\mathbf{e_2}) \; \textit{και} \; T(0,1)=T(\mathbf{e_2}),$$

έπεται ότι :

$$T(\mathbf{e_2})=T(0,1)=(-1,1) \text{ και } T(\mathbf{e_1})=T(1,1)-T(\mathbf{e_2})=(2,0)-(-1,1)=(3,-1).$$

Άρα είναι: $M_T=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$.

(β) Επειδή ο πίνακας $M_T=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος ($\det M_T = 2 \neq 0$), έχουμε:

$$y = M_T x \Leftrightarrow x = M_T^{-1} y,$$

οπότε ορίζεται η αντίστροφη απεικόνιση της T και έχει πίνακα τον M_T^{-1}.

2. Θεωρούμε την ευθεία $\varepsilon : x=t, y=2t, z=3t, t\in\mathbb{R}$ και την απεικόνιση $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ που απεικονίζει κάθε σημείο του $\mathbb{R}^3$ στην ορθή προβολή του πάνω στην ευθεία ε.

(i) Να βρεθεί ο τύπος της T.

(ii) Να αποδείξετε ότι η T είναι γραμμική και να βρείτε τον πίνακά της ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$.

(iii) Να βρείτε μία βάση του πυρήνα της T. Είναι η T $1-1$;

(iv) Τι παριστάνει γεωμετρικά ο πυρήνας της T;

Λύση. Το επίπεδο Π που περνάει από το σημείο $M(\alpha,\beta,\gamma)$ και είναι κάθετο προς την ευθεία ε έχει εξίσωση

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r_M})\cdot\mathbf{n}=0 \Leftrightarrow ((x,y,z)-(\alpha,\beta,\gamma))\cdot(1,2,3)=0 \Leftrightarrow x+2y+3z-\alpha-2\beta-3\gamma=0.$$

Το σημείο $M_0(\alpha_0,\beta_0,\gamma_0)$ είναι η τομή του επιπέδου Π με την ευθεία ε, οπότε για την εύρεσή του επιλύουμε το σύστημα

$$\left\{\begin{array}{c} x=t, y=2t, z=3t \\ x+2y+3z-\alpha-2\beta-3\gamma=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=t, y=2t, z=3t \\ t=\dfrac{\alpha+2\beta+3\gamma}{14} \end{array}\right\}$$

Άρα είναι

$$T(\alpha,\beta,\gamma)=\left(\frac{\alpha+2\beta+3\gamma}{14},\frac{2\alpha+4\beta+6\gamma}{14},\frac{3\alpha+6\beta+9\gamma}{14}\right).$$

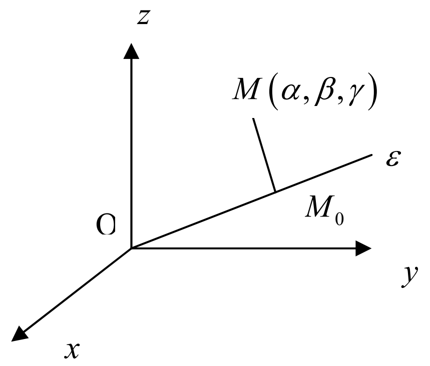
(ii) Η γραμμικότητα της T προκύπτει με απλή εφαρμογή του ορισμού. Επιπλέον έχουμε

$$T(1,0,0)=\left(\frac{1}{14},\frac{2}{14},\frac{3}{14}\right),$$

$$T(0,1,0)=\left(\frac{2}{14},\frac{4}{14},\frac{6}{14}\right)$$

$$T(0,0,1)=\left(\frac{3}{14},\frac{6}{14},\frac{9}{14}\right),$$

οπότε θα έχουμε:



Σχήμα 1

$$M_T(\mathbf{e})=\begin{bmatrix} 1/14 & 2/14 & 3/14 \\ 2/14 & 4/14 & 6/14 \\ 3/14 & 6/14 & 9/14 \end{bmatrix}=\frac{1}{14}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}.$$

(iii)

$$\begin{aligned}\ker T &= \{(x,y,z):T(x,y,z)=(0,0,0)\}\\ &=\{(x,y,z):x+2y+3z=0,2x+4y+6z=0,3x+6y+9z=0\}\\ &=\{(x,y,z):x+2y+3z=0\}=\{(x,y,z):x=-2y-3z\}\\ &=\{(-2y-3z,y,z):y,z\in\mathbb{R}\}=\{y(-2,1,0)+z(-3,0,1):y,z\in\mathbb{R}\}\\ &=[(-2,1,0),(-3,0,1)]\end{aligned}$$

Επειδή τα διανύσματα $(-2,1,0)$, $(-3,0,1)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, αυτά αποτελούν βάση του $\ker T$. Άρα είναι $\dim\ker T=2$, οπότε $\ker T\neq\{(0,0,0)\}$ και η T δεν είναι 1-1.

(iv) Ο πυρήνας της T είναι το επίπεδο με εξίσωση $x+2y+3z=0$ που περνάει από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετο προς την ευθεία ε.

3. *Η γραμμική απεικόνιση* $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ *απεικονίζει κάθε* $\mathbf{r}=\mathbf{OM}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}\equiv(x,y)$ *στο διάνυσμα* $f(\mathbf{r})=\mathbf{OM}'=x'\mathbf{i}+y'\mathbf{j}\equiv(x',y')$, *έτσι ώστε να ισχύουν:*

$$|\mathbf{OM}'|=k|\mathbf{OM}| \quad \text{και} \quad \widehat{(\mathbf{OM},\mathbf{OM}')}=\theta \quad \text{(σύνθεση στροφής – ομοιοθεσίας).}$$

(α) *Να βρείτε τον πίνακά της ως προς την κανονική βάση του* $\mathbb{R}^2$ *και τον τύπο της.*

(β) *Να αποδείξετε ότι η απεικόνιση* f *είναι σύνθεση στροφής και ομοιοθεσίας*

Λύση (α) Σύμφωνα με την υπόθεση έχουμε:

$$f(\mathbf{i})=(k\cos\theta,k\sin\theta),k>0 \quad \text{και} \quad f(\mathbf{j})=(-k\sin\theta,k\cos\theta),$$

οπότε είναι:

$$M_f[\mathbf{i},\mathbf{j}]=k\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}.$$

Ο τύπος της απεικόνισης είναι:

$$f(\mathbf{r})=k\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}kx\cos\theta-ky\sin\theta\\ kx\sin\theta+ky\cos\theta\end{bmatrix}$$

Ισοδύναμα, μπορούμε να γράψουμε:

$$f(\mathbf{r}) = (kx\cos\theta - ky\sin\theta, kx\sin\theta + ky\cos\theta).$$

(β) Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι:

$$M_f[\mathbf{i},\mathbf{j}] = k\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}k & 0\\ 0 & k\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix},$$

δηλαδή είναι γινόμενο πίνακα ομοιοθεσίας με τον πίνακα στροφής.

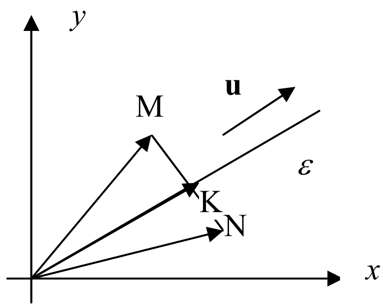
4. Η απεικόνιση $\mathrm{P}_\varepsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ απεικονίζει κάθε σημείο $M(x,y)$ του $\mathbb{R}^2$ στην προβολή του πάνω στην ευθεία

$\varepsilon : \mathbf{r} = t\mathbf{u}, t \in \mathbb{R}$ και $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \neq \mathbf{0}$.

Αν $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ είναι το διάνυσμα θέσης του σημείου $M(x,y)$, τότε :

(α) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{P}_\varepsilon(\mathbf{r}) = \left(\dfrac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{u}}{\mathbf{u}^2}\right)\mathbf{u}$.

(β) Να προσδιορίσετε , βάσει του ορισμού, τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα της γραμμικής απεικόνισης P_ε.



Σχήμα 2

Λύση

(α) Είναι $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{OM} = \boldsymbol{OK} + \boldsymbol{KM}, \boldsymbol{OK} = \lambda\boldsymbol{u}$, οπότε

$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{u} = \lambda|\boldsymbol{u}|^2 + \boldsymbol{KM}\cdot\boldsymbol{u} \Rightarrow \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{u} = \lambda|\boldsymbol{u}|^2$, αφού $\boldsymbol{KM} \perp \boldsymbol{u}$. Άρα είναι

$$\lambda = \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{u}|^2} \text{ και } P_\varepsilon(\boldsymbol{r}) = \lambda\boldsymbol{r} = \left(\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{u}|^2}\right)\boldsymbol{u}.$$

(β) $P_\varepsilon(\boldsymbol{r}) = \lambda\boldsymbol{r} \Leftrightarrow \left(\dfrac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{u}|^2}\right)\boldsymbol{u} - \lambda\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$. (1)

Αν είναι $\boldsymbol{r},\boldsymbol{u}$ συγγραμμικά $\Leftrightarrow \boldsymbol{r} = \mu\boldsymbol{u}, \mu \in \mathbb{R}^*$, τότε η (1)γίνεται:

$$(\mu - \lambda\mu)\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \lambda = 1, \text{ αφού είναι } \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0} \text{ και } \mu \neq 0.$$

Άρα ο $\lambda = 1$ είναι ιδιοτιμή και το $\boldsymbol{r} = \mu\boldsymbol{u}$ είναι ιδιοδιάνυσμα της P_ε.

Αν τα $\boldsymbol{r},\boldsymbol{u}$ είναι μη συγγραμμικά, τότε από την (1) προκύπτει ότι :

$$\frac{\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{u}|^2} = \mathbf{0} \text{ και } \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ και } \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{u} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ και } \boldsymbol{r} \perp \boldsymbol{u}.$$

5. Η απεικόνιση $S_\varepsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ απεικονίζει κάθε σημείο $M(x,y)$ του $\mathbb{R}^2$ στο συμμετρικό του ως προς την ευθεία $\varepsilon : t\mathbf{u}, t \in \mathbb{R}, \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$. Αν $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ είναι το διάνυσμα θέσης του σημείου $M(x,y)$, τότε :

(α) Να αποδείξετε ότι $S_\varepsilon(\mathbf{r}) = -\mathbf{r} + 2\left(\dfrac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{u}}{\mathbf{u}^2}\right)\mathbf{u}$.

(β) Να προσδιορίσετε , βάσει του ορισμού, τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα της γραμμικής απεικόνισης S_ε.

Λύση

(α) Έχουμε $\boldsymbol{S}_{\varepsilon}(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{r}=2\boldsymbol{P}_{\varepsilon}(\boldsymbol{r}) \Rightarrow S_{\varepsilon}(r)=-r+2\left(\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{u}|^2}\right)\boldsymbol{u}$.

(β) $\boldsymbol{S}_{\varepsilon}(\boldsymbol{r})=\lambda r \Leftrightarrow -(1+\lambda)\boldsymbol{r}+2\left(\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{u}|^2}\right)\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$ (2)

- Αν $\boldsymbol{r}=\mu\boldsymbol{u},\mu\neq 0$, τότε : $(2)\Leftrightarrow[-(1+\lambda)\mu+\mu]\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\lambda=0$.

Άρα ο $\lambda=0$ είναι ιδιοτιμή και το $\boldsymbol{r}=\mu\boldsymbol{u},\mu\neq 0$ είναι ιδιοδιάνυσμα της S_{ε}

- Αν $\boldsymbol{r},\boldsymbol{u}$ μη συγγραμμικά, τότε $(2)\Leftrightarrow 1+\lambda=0 \;\; \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{u}=0 \Leftrightarrow \lambda=1, \boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{u}$.

6. Η απεικόνιση $\Pi_{\pi}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ απεικονίζει κάθε σημείο $M(x,y,z)$ του $\mathbb{R}^3$ στην προβολή του πάνω στο επίπεδο $\pi:\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}=0,\mathbf{n}\neq\mathbf{0}$. Αν $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ είναι το διάνυσμα θέσης του σημείου $M(x,y,z)$, τότε :

(α) Να αποδείξετε ότι $\Pi_{\pi}(\mathbf{r})=\mathbf{r}-\left(\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{\mathbf{n}^2}\right)\mathbf{n}$.

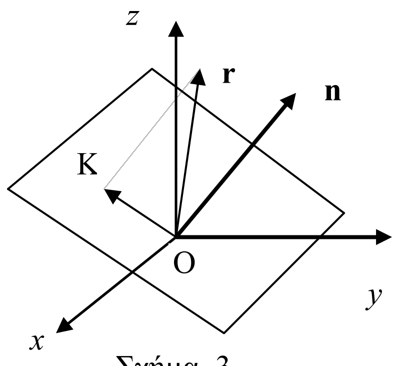
(β) Να προσδιορίσετε , βάσει του ορισμού, τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα της γραμμικής απεικόνισης Π_{π} .

Λύση

(α) $\boldsymbol{\Pi}_{\varepsilon}(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{KM}=\boldsymbol{r},$ όπου $\boldsymbol{KM}=\alpha\boldsymbol{n},\alpha\in\mathbb{R}$. Άρα $\boldsymbol{\Pi}_{\varepsilon}(\boldsymbol{r})+\alpha\boldsymbol{n}=\boldsymbol{r},$ οπότε

$\boldsymbol{\Pi}_{\varepsilon}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}+\alpha|\boldsymbol{n}|^2=\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}$. Άρα είναι $\alpha=\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|^2}$

και $\boldsymbol{\Pi}_{\varepsilon}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{r}-\left(\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|^2}\right)\boldsymbol{n}$.



Σχήμα 3

(β)

$\boldsymbol{\Pi}_{\varepsilon}(\boldsymbol{r})=\lambda\boldsymbol{r}\Leftrightarrow(1-\lambda)\boldsymbol{r}-\left(\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|^2}\right)\boldsymbol{n}=\boldsymbol{0}$ (3)

- Αν $\boldsymbol{r}=\mu\boldsymbol{n},\mu\neq 0,$ τότε:
  $(3)\Leftrightarrow[(\lambda-1)\mu+\mu]\boldsymbol{n}=\boldsymbol{0}\Rightarrow\lambda=0$
- Αν $\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}$ μη συγγραμμικά, τότε από την (3) έπεται ότι $\lambda=1$ και $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}=0$.

7. Να προσδιορίσετε τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματά τους των πινάκων:

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix},\ \mathrm{B}=\begin{bmatrix}-2&-3&-3\\-1&0&-1\\5&5&6\end{bmatrix},\ \Gamma=\begin{bmatrix}1&1&-1\\4&1&1\\5&-2&4\end{bmatrix}.$$

Να βρείτε ποιοι από τους πίνακες A, B και Γ διαγωνοποιούνται.

Λύση.

Έχουμε: $|\mathrm{A}-\lambda\mathrm{I}|=0\Leftrightarrow(1-\lambda)[(1-\lambda)^2-1]=0\Leftrightarrow\lambda=1$ ή $\lambda=0$ ή $\lambda=2$, με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα

$$x_1 = (1,0,-1), x_2 = (0,1,0), x_3 = (1,0,1).$$

$$\left|\mathrm{B} - \lambda \mathrm{I}\right| = 0 \Leftrightarrow -(\lambda-1)^2(\lambda-2) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 (\text{διπλή}) \text{ ή } \lambda=2 ,$$

με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $x_1 = (1,0,-1), x_2 = (0,1,-1)$ και $x_3 = (3,1,-5)$.

$$\left|\Gamma - \lambda \mathrm{I}\right| = 0 \Leftrightarrow -(\lambda-2)^3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \, (\text{τριπλή}),$$

με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $x = (0,1,1)$.

Σχετικά με το ερώτημα, αν διαγωνοποιούνται οι πίνακες Α, Β και Γ, έχουμε τα εξής: Οι πίνακες Α και Β διαγωνοποιούνται, ενώ ο Γ όχι.

Ισχύουν:

$$P^{-1}AP = diag(1,0,2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ και}$$

$$P^{-1}BP = diag(1,1,2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \text{ με } \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -5 \end{bmatrix},$$

ενώ ο πίνακας Γ δεν διαγωνοποιείται, αφού συνολικά αντιστοιχεί σε αυτόν ένα γραμμικώς ανεξάρτητο ιδιοδιάνυσμα .