

ΛΥΣΕΙΣ ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ 4/ΠΟΛΙΤΙΚΟΙ /2009-10

1.(α) Τα διανύσματα $\overrightarrow{AB} = (-1, -2, -2)$, $\overrightarrow{AG} = (1, -2, -3)$ είναι μη συγγραμμικά και παράλληλα προς το επίπεδο Π , ενώ το σημείο $A(1, 2, 3)$ με διάνυσμα θέσης $\vec{r}_A = (1, 2, 3)$ είναι σημείο του επιπέδου. Άρα η εξίσωση του επιπέδου είναι:

$$(\vec{r} - \vec{r}_A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow 2x - 5y + 4z - 4 = 0.$$

(β) Το διάνυσμα $\vec{n} = (1, -1, 3)$ είναι κάθετο προς το επίπεδο Π (αφού είναι $\vec{n} \perp Q$).

Άρα η εξίσωση του επιπέδου είναι:

$$(\vec{r} - \vec{r}_A) \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow (x-1, y, z-2) \cdot (1, -1, 3) = 0 \Leftrightarrow x - y + 3z - 7 = 0$$

(γ) Η ευθεία ε έχει παράλληλο διάνυσμα

$$\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k},$$

το οποίο είναι κάθετο προς το επίπεδο Π . Επιπλέον το $A(3, -1, 2) \in \Pi$.

Άρα η εξίσωση του επιπέδου Π είναι :

$$(\vec{r} - \vec{r}_A) \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow (x-1, y+1, z-2) \cdot (1, 4, 3) = 0 \Leftrightarrow x + 4y + 3z - 5 = 0.$$

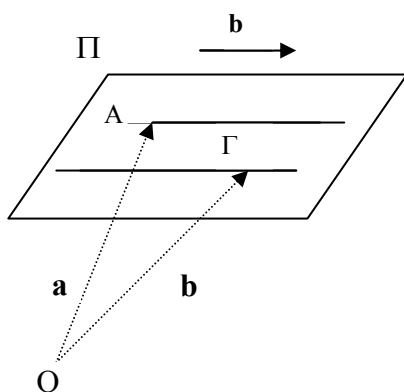
2.(α) Το επίπεδο Π περιέχει το σημείο A με διάνυσμα θέσης $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ και έχει παράλληλα διανύσματα τα $\vec{b}$, $\overrightarrow{GA} = \vec{a} - \vec{c}$, που είναι μη συγγραμμικά για $\vec{a} - \vec{c} \neq \vec{0}$.

Άρα η εξίσωση του επιπέδου είναι (δες σχήμα 1)

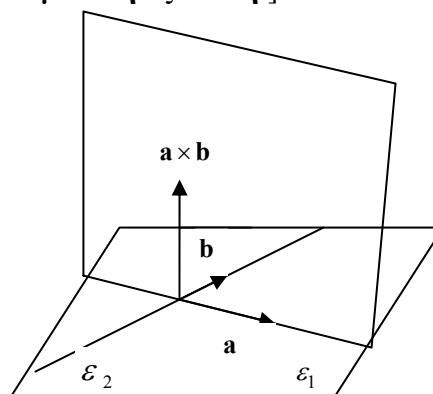
$$\vec{r} = \vec{a} + \lambda \vec{b} + \mu(\vec{a} - \vec{c}), \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad [\text{διανυσματική παραμετρική εξίσωση}]$$

$$\text{ή } (\vec{r} - \vec{a}, \vec{b}, \vec{a} - \vec{c}) = 0$$

[διανυσματική εξίσωση]



Σχήμα 1



Σχήμα 2

(β) Τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ είναι παράλληλα προς το επίπεδο Π και ακόμη η αρχή των αξόνων $O(0, 0, 0)$ ανήκει στο Π (σχήμα 2). Άρα η εξίσωση του επιπέδου Π είναι :

$$\vec{r} = \vec{0} + \lambda \vec{a} + \mu(\vec{a} \times \vec{b}), \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \text{ή } (\vec{r}, \vec{a}, \vec{a} \times \vec{b}) = 0.$$

3. Το $\vec{a}$ είναι το διάνυσμα θέσης ενός σημείου της ευθείας ε , ενώ το $\vec{\eta}$ είναι ένα παράλληλο διάνυσμα προς την ευθεία ε . Θέτοντας $x=0$ στις εξισώσεις των Π_1, Π_2 αναζητούμε το σημείο της τομής των επιπέδων Π_1, Π_2 που βρίσκεται στο επίπεδο $yOz (x=0)$. Έχουμε το σύστημα

$$\{y+z=1, -3y-z=-1\} \Leftrightarrow y=0, z=1,$$

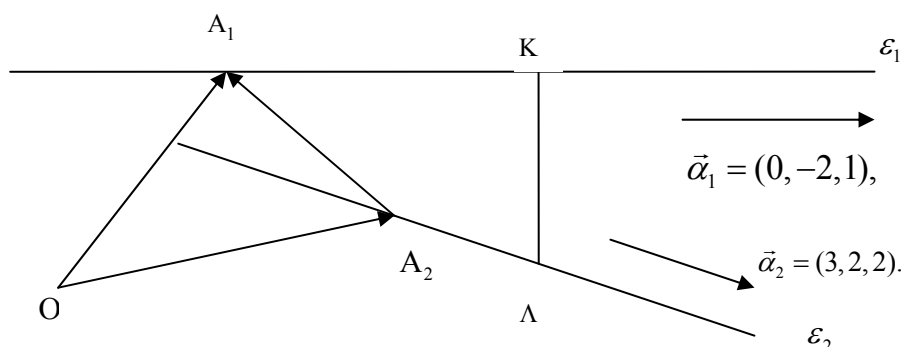
οπότε το σημείο $A(0,0,1) \in \Pi$. Το σημείο A δεν είναι μοναδικό, αφού το σύστημα των εξισώσεων των δύο επιπέδων έχει άπειρες λύσεις.

Επιπλέον το διάνυσμα $\vec{\eta} = \vec{\eta}_1 \times \vec{\eta}_2$, όπου $\vec{\eta}_1(1,1,1) \perp \Pi_1$ και $\vec{\eta}_2(4,-3,-1) \perp \Pi_2$, είναι παράλληλο προς την ευθεία ε . Είναι δηλαδή $\vec{\eta} = (2,5,-7) \parallel \varepsilon$, αλλά και κάθε διάνυσμα $\lambda\vec{\eta}, \lambda \in \mathbb{R}^*$ είναι παράλληλο προς την ευθεία ε .

4. Η ευθεία ε_1 περνάει από το σημείο $A_1(3,10,0)$ και έχει παράλληλο διάνυσμα το $\vec{a}_1 = (0,-2,1)$, ενώ η ευθεία ε_2 περνάει από το σημείο $A_2(-2,-1,-1)$ και έχει παράλληλο διάνυσμα το $\vec{a}_2 = (3,2,2)$. Τότε $\overrightarrow{A_2A_1} = (5,11,1)$ και επιπλέον έχουμε

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2 \text{ ασύμβατες} \Leftrightarrow \overrightarrow{A_2A_1}, \vec{a}_1, \vec{a}_2 \text{ μη συνεπίπεδα} \Leftrightarrow (\overrightarrow{A_2A_1}, \vec{a}_1, \vec{a}_2) \neq 0,$$

$$\text{που ισχύει, αφού } (\overrightarrow{A_2A_1}, \vec{a}_1, \vec{a}_2) = \begin{vmatrix} 5 & 11 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 9 \neq 0.$$



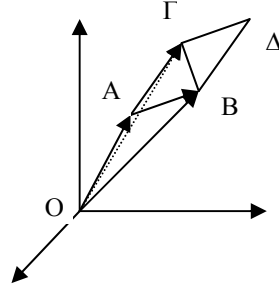
Σχήμα 3

Το τυχόν σημείο K της ε_1 έχει συντεταγμένες $(3, -2t+10, t), t \in \mathbb{R}$, το τυχόν σημείο Λ της ε_2 έχει συντεταγμένες $(3s-1, 2s-1, 2s-1), s \in \mathbb{R}$, ενώ το τυχόν διάνυσμα με άκρα πάνω στις ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ έχει συντεταγμένες $(3s-5, 2s+2t-11, 2s-t-1)$. Ζητάμε τα K, Λ που ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{K\Lambda} \perp \varepsilon_1 \\ \overrightarrow{K\Lambda} \perp \varepsilon_2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{K\Lambda} \cdot \vec{a}_1 = 0 \\ \overrightarrow{K\Lambda} \cdot \vec{a}_2 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -5t - 2s = -21 \\ 2t + 17s = 39 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} t = 31/9 \\ s = 17/9 \end{array} \right\},$$

οπότε θα είναι $K(3, 28/9, 31/9), \Lambda(33/9, 25/9, 25/9)$ και $d_{\min} = |\overrightarrow{K\Lambda}| = 1$

$$\begin{aligned}
 5.(\alpha) \quad E(AB\Gamma) &= \frac{1}{2} E(AB\Delta\Gamma) = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{A\Gamma}| \\
 &= \frac{1}{2} |(\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})| \\
 &= \frac{1}{2} |\vec{b} \times \vec{c} - \vec{a} \times \vec{c} - \vec{b} \times \vec{a}| \\
 &= \frac{1}{2} |\vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b}|.
 \end{aligned}$$



(β) Το επίπεδο Π τέμνει τους άξονες $x'x, y'y, z'z$ στα σημεία $A(\alpha, 0, 0), B(0, -2\alpha, 0)$ και $\Gamma(0, 0, -3\alpha)$, αντιστοίχως. Έτσι έχουμε $\overrightarrow{AB} = (-\alpha, -2\alpha, 0), \overrightarrow{A\Gamma} = (-\alpha, 0, -3\alpha)$ και

$$E(AB\Gamma) = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{A\Gamma}| = \frac{1}{2} |6\alpha^2 \vec{i} + 3\alpha^2 \vec{j} + 2\alpha^2 \vec{k}| = \frac{7\alpha^2}{2}.$$

6. Γράφουμε

$$\varepsilon_1: \frac{x-10}{1} = \frac{y}{-1}, z=3 \text{ και}$$

$$\varepsilon_2: \frac{x-2}{3} = \frac{y}{1}, z=0$$

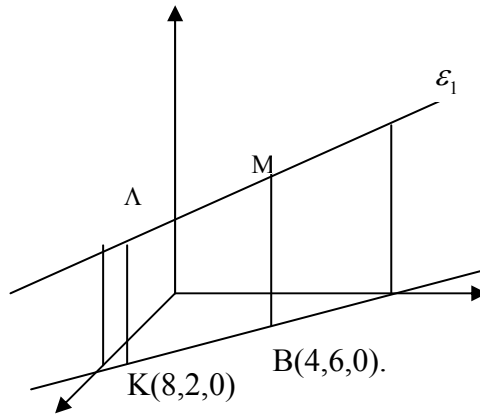
Έστω $A_2(2, 0, 0) \in \varepsilon_2$. Η $\varepsilon_3 \parallel \varepsilon_1$ που περνάει από το A_2 έχει εξισώσεις:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y}{-1}, z=0.$$

Το επίπεδο Π έχει εξίσωση $z=0$. Θεωρούμε $M(4, 6, 3) \in \varepsilon_1$ και φέρουμε ευθεία $\varepsilon_4 \perp \Pi$.

Η ε_4 έχει εξισώσεις $x=4, y=6$ και τέμνει το Π στο σημείο $B(4, 6, 0)$.

Η ευθεία η κάθετη από το B προς την ε_2 έχει εξισώσεις $\frac{x-4}{1} = \frac{y-6}{-1}, z=0$ και τέμνει την ε_2 στο σημείο $K(8, 2, 0)$. Η $KL \perp \varepsilon_1, L \in \varepsilon_1$ έχει εξισώσεις $x=8, y=2$ και είναι $L(8, 2, 3)$.



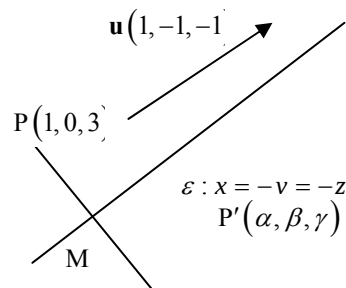
Σχήμα 5

7. Έστω $P'(\alpha, \beta, \gamma)$ το συμμετρικό του P ως προς την ε . Τότε το μέσον M του PP' ανήκει στην ευθεία ε , οπότε το σημείο $M(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma+3}{2})$ ικανοποιεί τις εξισώσεις της ευθείας ε , δηλαδή

$$\frac{\alpha+1}{2} = \frac{-\beta}{2} = \frac{\gamma+3}{2} \quad (1).$$

Επιπλέον $\overrightarrow{PP'} = (\alpha-1, \beta, \gamma-3) \perp \vec{u}(1, -1, -1)$, όπου το διάνυσμα $\vec{u}$ είναι παράλληλο προς την ευθεία ε , οπότε θα ισχύει:

$$(\alpha-1) \cdot 1 + \beta \cdot (-1) + (\gamma-3) \cdot (-1) = 0 \Leftrightarrow \alpha - \beta - \gamma = -2 \quad (2)$$



Σχήμα 6

Από (1) και (2) έχουμε: $\alpha = -\frac{7}{3}, \beta = \frac{4}{3}, \gamma = -\frac{5}{3}$.

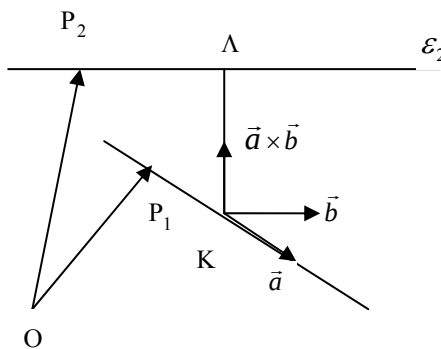
8. (i) $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ συνεπίπεδες $\Leftrightarrow \overrightarrow{P_2P_1}, \vec{a}, \vec{b}$ συνεπίπεδα $\Leftrightarrow (\overrightarrow{P_2P_1}, \vec{a}, \vec{b}) = 0$
 $\Leftrightarrow (\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{a}, \vec{b}) = 0$.

(ii) Η προβολή του $\overrightarrow{P_2P_1}$ πάνω στο διάνυσμα $\vec{a} \times \vec{b}$ είναι το διάνυσμα $\overrightarrow{\Lambda K}$, οπότε

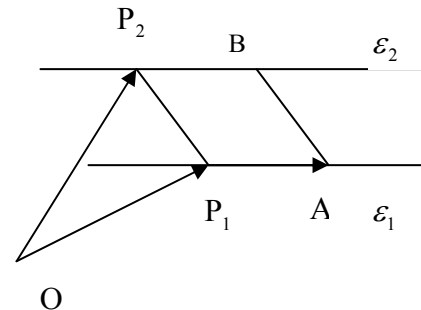
$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \overrightarrow{P_2P_1} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \overrightarrow{\Lambda K} \Leftrightarrow (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \pm |\vec{a} \times \vec{b}| |\overrightarrow{\Lambda K}|$$

$$\Leftrightarrow |(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{a}, \vec{b})| = |\vec{a} \times \vec{b}| |\overrightarrow{\Lambda K}| \Leftrightarrow d = |\overrightarrow{\Lambda K}| = \frac{|(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{a}, \vec{b})|}{|\vec{a} \times \vec{b}|}.$$

(Είναι $|\vec{a} \times \vec{b}| \neq 0$, αφού οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι ασύμβατες.)



Σχήμα 7



Σχήμα 8

(iii) Είναι $d = |\overrightarrow{K\Lambda}|$, όπου $K\Lambda \perp \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$. Θεωρούμε επί της ε_1 σημείο A τέτοιο, ώστε $\overrightarrow{P_1A} = \vec{a}$ και σχηματίζουμε το παραλληλόγραμμο P_2P_1AB . Τότε έχουμε

$$E(P_2P_1AB) = |\overrightarrow{P_1A}| \cdot |\overrightarrow{K\Lambda}| = |\vec{a}| d \Leftrightarrow d = \frac{|(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{a}|}{|\vec{a}|}.$$

9. Θεωρούμε σημείο $B \in \varepsilon$ τέτοιο ώστε $\overrightarrow{AB} = \vec{u} \parallel \varepsilon$. Επίσης θεωρούμε το παραλληλόγραμμο MABN. Τότε $E(MABN) = d(M, \varepsilon) |\vec{u}|$ και

$$E(MABN) = |\overrightarrow{AM} \times \vec{u}| = |(\vec{r}_M - \vec{a}) \times \vec{u}|,$$

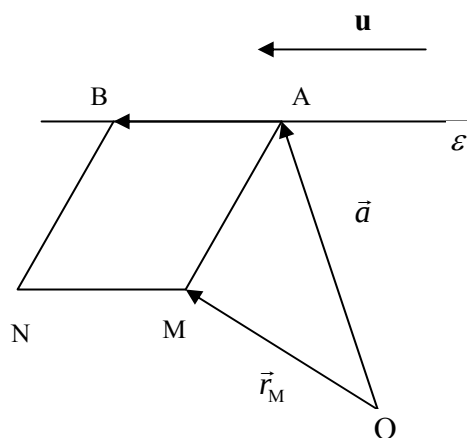
$$\text{οπότε } d(M, \varepsilon) = \frac{|(\vec{r}_M - \vec{a}) \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}.$$

Εφαρμογή: Είναι

$$\vec{r}_M = (1, 2, -1), \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1, 2, 2),$$

$$\vec{r}_M - \vec{a} = (-1, 3, -5), (\vec{r}_M - \vec{a}) \times \vec{u} = 11\vec{i} - 3\vec{j} - 5\vec{k}$$

$$\text{και } d(M, \varepsilon) = \frac{\sqrt{155}}{3}.$$



Σχήμα 9