ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ- ΠΟΛΙΤΙΚΟΙ ΜΗΧΑΝΙΚΟΙ
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 2/2012

1. Έστω $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$, $t\in I=[a,b]$ είναι μία διανυσματική συνάρτηση C^{∞} −τάξης και $r=r(t)=\|\mathbf{r}(t)\|=\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}$.
Να αποδείξετε ότι:
(α) $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{r}\mathbf{r}\right)=\dfrac{1}{r}\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}-\dfrac{r'(t)}{r^2}\mathbf{r}$, $t\in I$ **(β)** $\dfrac{d}{dt}\left(\mathbf{r}\times\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}\right)=\mathbf{r}\times\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$**,** $t\in I$.
(γ) Αν $\mathbf{r}\times\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{0}$, για κάθε $t\in I$, τότε το $\mathbf{r}(t)$ έχει σταθερή διεύθυνση για κάθε $t\in I$.
(δ) $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{r}(t),\mathbf{r}'(t),\mathbf{r}''(t))=\mathbf{r}(t)\cdot(\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}'''(t))$, $t\in I$.

2. Αν $\mathbf{f},\mathbf{g},\mathbf{h}: I\to\mathbb{R}^3$ είναι παραγωγίσιμες διανυσματικές συναρτήσεις μεταβλητής t, να αποδείξετε ότι:
$$\frac{d}{dt}\{\mathbf{f}(t)\times(\mathbf{g}(t)\times\mathbf{h}(t))\}=\{\mathbf{f}'(t)\times(\mathbf{g}(t)\times\mathbf{h}(t))\}+\{\mathbf{f}(t)\times(\mathbf{g}'(t)\times\mathbf{h}(t))\}+\{\mathbf{f}(t)\times(\mathbf{g}(t)\times\mathbf{h}'(t))\}$$

3. Έστω $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)=(\cos\omega t)\mathbf{a}+(\sin\omega t)\mathbf{b}, t\in I\subseteq\mathbb{R}$ όπου $\mathbf{a},\mathbf{b}$ σταθερά διανύσματα. Να αποδείξετε ότι:
(α) $\mathbf{r}\times\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}=\omega(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$. **(β)** $\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}+\omega^2\mathbf{r}=\mathbf{0}$.

4. Έστω η φυσική παραμετρική καμπύλη $\gamma:\mathbf{r}=\mathbf{r}(s), s\in[0,\ell(\gamma)]$, όπου $\ell(\gamma)$ το μήκος της καμπύλης γ, C^3 − τάξης. Χρησιμοποιώντας το τρίεδρο και τους τύπους του Frenet , να αποδείξετε ότι:
(α) $\mathbf{r}'''(s)=-k^2\mathbf{T}+k'(s)\mathbf{N}+k\sigma\mathbf{B}$, **(β)** $\mathbf{r}''(s)\times\mathbf{r}'''(s)=k^2\sigma\mathbf{T}+k^3\mathbf{B}$,
(γ) $\sigma=\dfrac{(\mathbf{r}'(s),\mathbf{r}''(s),\mathbf{r}'''(s))}{\|\mathbf{r}''(s)\|^2}$ (**τύπος υπολογισμού στρέψης**)

5. Έστω η παραμετρική καμπύλη $\gamma:\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$, C^3 −τάξης.
Να αποδείξετε ότι:
(α) $\mathbf{r}'(t)=\left(\dfrac{ds}{dt}\right)\mathbf{T}$ **(β)** $\mathbf{r}''(t)=\dfrac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T}+k\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2\mathbf{N}$,
(γ) $\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)=k\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^3\mathbf{B}$**,** **(δ)** $\mathbf{B}=\dfrac{r'(t)\times r''(t)}{\|r'(t)\times r''(t)\|}$.
(ε) $k=k(t)=\dfrac{\|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}$ **(στ)** $\sigma=\sigma(t)=\dfrac{(\mathbf{r}'(t),\mathbf{r}''(t),\mathbf{r}'''(t))}{\|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)\|^2}$

(Τύποι υπολογισμού καμπυλότητας και στρέψης για την C^3 −τάξης καμπύλη $\gamma:\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$).

6. **(α)** Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής, ανά μονάδα μήκους, της συνάρτησης $f(x,y,z)=x^3-2y^2-4z$, στο σημείο $\mathrm{P}(1,0,2)$, ως προς την κατεύθυνση $\mathbf{u}=\frac{1}{3}(1,2,-2)$.

(β) Ομοίως για τη συνάρτηση

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^2y}{x^2+y^2}, & \text{αν}\,(x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{αν}\,(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

στο σημείο $\mathrm{O}(0,0)$, ως προς την κατεύθυνση που ορίζει το διάνυσμα $\mathbf{u}=(u_1,u_2)$, $\|\mathbf{u}\|=1$.

7. Να βρείτε τις κατευθύνσεις $\mathbf{u}, \|\mathbf{u}\|=1$ ως προς τις οποίες ορίζεται η παράγωγος $D_{\mathbf{u}}g(0,0)$, αν είναι $g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{αν}\,(x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{αν}\,(x,y)=(0,0)\end{cases}$

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x,y)=(\cos x)^{y^2}$, $(x,y)\in \mathrm{A}=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\times\mathbb{R}$.

(α) Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι: $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ στο Α.

(β) Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης f, ανά μονάδα μήκους, ως προς την κατεύθυνση $\mathbf{u}=(u_1,u_2)$, $\|\mathbf{u}\|=1$, στα σημεία των αξόνων $x'x$ και $y'y$ που ανήκουν στο Α, ισούται με 0.

9. Δίνεται η C^2-τάξης συνάρτηση $f(x,y,z)$ με $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta, z=z$ με $\rho>0,\theta\in[0,2\pi)$, $z\in\mathbb{R}$ (**κυλινδρικές συντεταγμένες**). Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

(Λαπλασιανή της f σε κυλινδρικές συντεταγμένες).

10. Δίνεται η C^2-τάξης συνάρτηση $f(x,y,z)$ με

$$x=\rho\cos\theta\sin\phi, y=\rho\sin\theta\sin\phi, z=\rho\cos\phi \quad \text{με} \quad \rho>0,\theta\in[0,2\pi), \phi\in[0,\pi]$$

(**σφαιρικές συντεταγμένες**). Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)+\frac{1}{\rho^2\sin^2\phi}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}+\frac{1}{\rho^2\sin^2\phi}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\sin\phi\frac{\partial f}{\partial \phi}\right).$$

(Λαπλασιανή της f σε σφαιρικές συντεταγμένες

11. Η συνάρτηση $f(x,y)$ είναι C^2-τάξης στο $\mathrm{A}\subseteq\mathbb{R}^2$ και ομογενής βαθμού m, δηλαδή, για κάθε $(x,y)\in\mathrm{A}$ και $t\in\mathbb{R}$ με $(tx,ty)\in\mathbb{R}^2$ ισχύει

$$f\left(tx,ty\right)=t^m f\left(x,y\right).$$

Να αποδείξετε ότι:

(α) $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}=mf$

(β) $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=m\left(m-1\right)f$.

12. Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x,y\right)=g\left(u\left(x,y\right),v\left(x,y\right)\right)$, όπου g διαφορίσιμη συνάρτηση C^2 – τάξης και

$$u=u\left(x,y\right)=x-\frac{1}{3}y,\ v=v\left(x,y\right)=x+\frac{1}{2}y.$$

(α) Να εκφράσετε τις μερικές παραγώγους $\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}$ συναρτήσει των μερικών παραγώγων $\dfrac{\partial g}{\partial u},\dfrac{\partial g}{\partial v}$.

(β) Πως μετασχηματίζεται η εξίσωση: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}-6\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\left(2x+y\right)^2$, ως προς τις μεταβλητές u,v ;

13. Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης $\mathbf{F}\left(x,y\right)=\left(x^3-y^3,xy^2\right)$ στο σημείο $\left(x_0,y_0\right)=\left(2,1\right)$.

Παράδοση εργασίας: 30 Μαΐου 2012