

## ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ- ΠΟΛΙΤΙΚΟΙ ΜΗΧΑΝΙΚΟΙ ΦΥΛΛΑΔΙΟ 1/2011-12

1. Στον Ευκλείδειο χώρο  $\mathbb{R}^n$  ορίζουμε τις νόρμες:

$$N_1(\mathbf{x}) := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2},$$

$$N_2(\mathbf{x}) := |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|,$$

$$N_3(\mathbf{x}) := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|,$$

για κάθε  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ .

Να αποδείξετε ότι, για κάθε  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , ισχύει:

$$N_3(\mathbf{x}) \leq N_1(\mathbf{x}) \leq N_2(\mathbf{x}) \leq nN_3(\mathbf{x}).$$

Τι συμπεραίνετε για τις παραπάνω νόρμες του  $\mathbb{R}^n$ .

2. Έστω  $d_1$  μία συνάρτηση απόστασης επί του Ευκλείδειου χώρου  $\mathbb{R}^n$ . Να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \frac{d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{1 + d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})},$$

ορίζει μία απόσταση επί του  $\mathbb{R}^n$ .

3. Να εξετάσετε, αν υπάρχουν τα όρια των ακολουθιών:

$$\mathbf{x}_n = \left( \frac{1}{\sqrt{n}}, \left(1 - \frac{3}{n}\right)^n \right), n = 1, 2, 3, \dots, \quad \mathbf{y}_n = \left( \frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}, \frac{(-1)^n n}{2n+1} \right), n = 1, 2, 3, \dots$$

4. Δίνεται το σύνολο

$$A = \{(n, 0) : n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

(α) Να αποδείξετε ότι όλα τα σημεία του  $A$  είναι μεμονωμένα και να βρείτε το σύνορό του.

(β) Είναι το σύνολο  $A$  συμπαγές, δηλαδή κλειστό και φραγμένο;

5. Να βρείτε και να παραστήσετε γεωμετρικά το πεδίο ορισμού  $D_f$  της συνάρτησης

$$f(x, y) = \ln(x \ln(y - x)).$$

Βρείτε το σύνορο  $\partial D_f$  του συνόλου  $D_f$ . Είναι το σύνολο  $D_f$  συνεκτικό, δηλαδή μπορεί να γραφεί ως ένωση δύο ανοικτών συνόλων που είναι ξένα μεταξύ τους;

6. Να περιγράψετε την επιφάνεια με αναλυτική εξίσωση :

(α)  $y - z = 0$

(β)  $(x - 2)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 4$

(γ)  $(2x + z)^2 - y - z = 4$

(δ)  $y^2 + z^2 = 9$

(ε)  $x^2 - y^2 - 2z(x - y) = 0$

(στ)  $x^2 + y^2 - 2z(x - y) = 0$

(ζ)  $x^2 + 2y^2 - z = 0$

(η)  $(x - 2)^2 + 4y^2 + 4z^2 = 4$

(θ)  $z = y^2 - x^2$

(ι)  $x^2 + y^2 - z^2 = 1.$

7. Να βρεθεί η προβολή στο επίπεδο  $xOy$  ( $z = 0$ ) των καμπύλων

$$(\alpha) x^2 + y^2 + z^2 = 9, y - z = 0$$

$$(\beta) x^2 + y^2 - 2z = 0, x - z = 0.$$

8. Να βρεθούν οι ισοσταθμικές καμπύλες (επιφάνειες) των συναρτήσεων

$$(\alpha) f(x, y) = 2 - x + y \quad (\beta) f(x, y) = 1 - |x| - |y|$$

$$(\gamma) f(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x}} \quad (\delta) f(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{4z}$$

$$(\epsilon) f(x, y, z) = e^{x+y-z} \quad (\sigma\tau) f(x, y, z) = -x^2 + y^2 - z^2$$

9. Το πεδίο ταχυτήτων ενός ρευστού δίνεται από το διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{v}(x, y) = \begin{cases} \frac{-\alpha y}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{\alpha x}{x^2 + y^2} \mathbf{j}, & \text{αν } x^2 + y^2 \geq \alpha^2, \alpha > 0 \\ \mathbf{0}, & \text{αν } x^2 + y^2 < \alpha^2 \end{cases}$$

Να σχεδιάσετε τις ταχύτητες του ρευστού πάνω στα σημεία των κύκλων με εξισώσεις (i)  $x^2 + y^2 = \alpha^2$  και (ii)  $x^2 + y^2 = 4\alpha^2$ .

Τι συμπεραίνετε για την κίνηση του ρευστού ;

10. Να εξετάσετε ως προς την ύπαρξη τα παρακάτω όρια και να υπολογίσετε όσα υπάρχουν :

$$(i) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \quad (ii) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} \quad (iii) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}} \quad (iv) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^y$$

$$(v) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} \quad (vi) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2 + z^2} \quad (vii) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^2 - yz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

11. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις παρακάτω συναρτήσεις :

$$(i) f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x}{x^2 + y^2} e^{-\left(\frac{2x}{x^2 + y^2}\right)^2}, & \text{αν } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{αν } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$(ii) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x - y}{x + y}, & \text{αν } x + y \neq 0 \\ a, & \text{αν } x + y = 0 \end{cases}, \text{ όπου } a \in \mathbb{R}.$$

**Παράδοση εργασίας: 23 Απριλίου 2012**