

**ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ- ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΟΙ ΜΗΧΑΝΙΚΟΙ**  
**ΦΥΛΛΑΔΙΟ 2/2012**

1. Έστω  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ,  $t \in I = [a, b]$  είναι μία διανυσματική συνάρτηση  $C^\infty$  -τάξης και  $r = r(t) = \|\mathbf{r}(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}$ .  
Να αποδείξετε ότι:
- (α)  $\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{r} \mathbf{r} \right) = \frac{1}{r} \frac{d\mathbf{r}}{dt} - \frac{r'(t)}{r^2} \mathbf{r}$ ,  $t \in I$       (β)  $\frac{d}{dt} \left( \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = \mathbf{r} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$ ,  $t \in I$ .
- (γ) Αν  $\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{0}$ , για κάθε  $t \in I$ , τότε το  $\mathbf{r}(t)$  έχει σταθερή διεύθυνση για κάθε  $t \in I$ .
- (δ)  $\frac{d}{dt} (\mathbf{r}(t), \mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t)) = \mathbf{r}(t) \cdot (\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}'''(t))$ ,  $t \in I$ .
2. Αν  $\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  είναι παραγωγίσιμες διανυσματικές συναρτήσεις μεταβλητής  $t$ , να αποδείξετε ότι:
- $$\frac{d}{dt} \{ \mathbf{f}(t) \times (\mathbf{g}(t) \times \mathbf{h}(t)) \} = \{ \mathbf{f}'(t) \times (\mathbf{g}(t) \times \mathbf{h}(t)) \} + \{ \mathbf{f}(t) \times (\mathbf{g}'(t) \times \mathbf{h}(t)) \} + \{ \mathbf{f}(t) \times (\mathbf{g}(t) \times \mathbf{h}'(t)) \}$$
3. Έστω  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (\cos \omega t) \mathbf{a} + (\sin \omega t) \mathbf{b}$ ,  $t \in I \subseteq \mathbb{R}$  όπου  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  σταθερά διανύσματα. Να αποδείξετε ότι:
- (α)  $\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \omega (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ .      (β)  $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \omega^2 \mathbf{r} = \mathbf{0}$ .
4. Έστω η φυσική παραμετρική καμπύλη  $\gamma: \mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ ,  $s \in [0, \ell(\gamma)]$ , όπου  $\ell(\gamma)$  το μήκος της καμπύλης  $\gamma$ ,  $C^3$  - τάξης. Χρησιμοποιώντας το τρίεδρο και τους τύπους του Frenet, να αποδείξετε ότι:
- (α)  $\mathbf{r}'''(s) = -k^2 \mathbf{T} + k'(s) \mathbf{N} + k\sigma \mathbf{B}$ ,      (β)  $\mathbf{r}''(s) \times \mathbf{r}'''(s) = k^2 \sigma \mathbf{T} + k^3 \mathbf{B}$ ,
- (γ)  $\sigma = \frac{(\mathbf{r}'(s), \mathbf{r}''(s), \mathbf{r}'''(s))}{\|\mathbf{r}''(s)\|^2}$  (τύπος υπολογισμού στρέψης)
5. Έστω η παραμετρική καμπύλη  $\gamma: \mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$ ,  $C^3$  -τάξης.  
Να αποδείξετε ότι:
- (α)  $\mathbf{r}'(t) = \left( \frac{ds}{dt} \right) \mathbf{T}$       (β)  $\mathbf{r}''(t) = \frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{T} + k \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 \mathbf{N}$ ,
- (γ)  $\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = k \left( \frac{ds}{dt} \right)^3 \mathbf{B}$ ,      (δ)  $\mathbf{B} = \frac{\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)}{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}$ .
- (ε)  $k = k(t) = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}$       (στ)  $\sigma = \sigma(t) = \frac{(\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t), \mathbf{r}'''(t))}{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|^2}$
- ( Τύποι υπολογισμού καμπυλότητας και στρέψης για την  $C^3$  -τάξης καμπύλη  $\gamma: \mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$ ).

6. (α) Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής, ανά μονάδα μήκους, της συνάρτησης  $f(x, y, z) = x^3 - 2y^2 - 4z$ , στο σημείο  $P(1, 0, 2)$ , ως προς την κατεύθυνση  $\mathbf{u} = \frac{1}{3}(1, 2, -2)$ .

(β) Ομοίως για τη συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2 y}{x^2 + y^2}, & \text{αν } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{αν } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

στο σημείο  $O(0, 0)$ , ως προς την κατεύθυνση που ορίζει το διάνυσμα  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ ,  $\|\mathbf{u}\| = 1$ .

7. Να βρείτε τις κατευθύνσεις  $\mathbf{u}, \|\mathbf{u}\| = 1$  ως προς τις οποίες ορίζεται η παράγωγος

$$D_{\mathbf{u}}f(0, 0), \text{ αν είναι } f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{αν } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{αν } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

8. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x, y) = (\cos x)^{y^2}$ ,  $(x, y) \in A = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times \mathbb{R}$ .

(α) Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι:  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$  στο  $A$ .

(β) Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης  $f$ , ανά μονάδα μήκους, ως προς την κατεύθυνση  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ ,  $\|\mathbf{u}\| = 1$ , στα σημεία των αξόνων  $x'x$  και  $y'y$  που ανήκουν στο  $A$ , ισούται με 0.

9. Δίνεται η  $C^2$ -τάξης συνάρτηση  $f(x, y, z)$  με  $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta, z = z$  με  $\rho > 0, \theta \in [0, 2\pi), z \in \mathbb{R}$  (κυλινδρικές συντεταγμένες). Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

(Λαπλασιανή της  $f$  σε κυλινδρικές συντεταγμένες).

10. Δίνεται η  $C^2$ -τάξης συνάρτηση  $f(x, y, z)$  με

$$x = \rho \cos \theta \sin \phi, y = \rho \sin \theta \sin \phi, z = \rho \cos \phi \quad \text{με } \rho > 0, \theta \in [0, 2\pi), \phi \in [0, \pi]$$

(σφαιρικές συντεταγμένες). Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho^2 \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \sin \phi \frac{\partial f}{\partial \phi} \right).$$

(Λαπλασιανή της  $f$  σε σφαιρικές συντεταγμένες)

11. Η συνάρτηση  $f(x, y)$  είναι  $C^2$ -τάξης στο  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  και ομογενής βαθμού  $m$ , δηλαδή, για κάθε  $(x, y) \in A$  και  $t \in \mathbb{R}$  με  $(tx, ty) \in \mathbb{R}^2$  ισχύει

$$f(tx, ty) = t^m f(x, y).$$

Να αποδείξετε ότι:

$$(a) \quad x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = mf$$

$$(b) \quad x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = m(m-1)f.$$

12. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x, y) = g(u(x, y), v(x, y))$ , όπου  $g$  διαφορίσιμη

συνάρτηση  $C^2$ -τάξης και  $u = u(x, y) = x - \frac{1}{3}y$ ,  $v = v(x, y) = x + \frac{1}{2}y$ .

(a) Να εκφράσετε τις μερικές παραγώγους  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$  συναρτήσει των μερικών

παραγώγων  $\frac{\partial g}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial g}{\partial v}$ .

(b) Πως μετασχηματίζεται η εξίσωση:  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - 6 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (2x + y)^2$ ,

ως προς τις μεταβλητές  $u, v$ ;

13. Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης  $\mathbf{F}(x, y) = (x^3 - y^3, xy^2)$  στο σημείο  $(x_0, y_0) = (2, 1)$ .

**Παράδοση εργασίας: 30 Μαΐου 2012**