ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ- ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΟΙ ΜΗΧΑΝΙΚΟΙ
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 1/2011-12

1. Στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^n$ ορίζουμε τις νόρμες:

$$\mathrm{N}_1(\mathbf{x}) := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2},$$

$$\mathrm{N}_2(\mathbf{x}) := |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|,$$

$$\mathrm{N}_3(\mathbf{x}) := \max_{1\le i\le n} |x_i|,$$

για κάθε $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Να αποδείξετε ότι , για κάθε $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, ισχύει:

$$\mathrm{N}_3(\mathbf{x}) \le \mathrm{N}_1(\mathbf{x}) \le \mathrm{N}_2(\mathbf{x}) \le n\mathrm{N}_3(\mathbf{x}).$$

Τι συμπεραίνετε για τις παραπάνω νόρμες του $\mathbb{R}^n$.

2. Έστω d_1 μία συνάρτηση απόστασης επί του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^n$. Να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \frac{d_1(\mathbf{x},\mathbf{y})}{1 + d_1(\mathbf{x},\mathbf{y})},$$

ορίζει μία απόσταση επί του $\mathbb{R}^n$.

3. Να εξετάσετε, αν υπάρχουν τα όρια των ακολουθιών:

$$\mathbf{x}_n = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \left(1 - \frac{3}{n}\right)^n\right), n = 1,2,3,\ldots, \qquad \mathbf{y}_n = \left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}, \frac{(-1)^n n}{2n+1}\right), n = 1,2,3,\ldots$$

4. Δίνεται το σύνολο

$$\mathrm{A} = \{(n,0) : n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

(α) Να αποδείξετε ότι όλα τα σημεία του Α είναι μεμονωμένα και να βρείτε το σύνορό του.

(β) Είναι το σύνολο Α συμπαγές, δηλαδή κλειστό και φραγμένο;

5. Να βρείτε και να παραστήσετε γεωμετρικά το πεδίο ορισμού D_f της συνάρτησης

$$f(x,y) = \ln\big(x\ln(y-x)\big).$$

Βρείτε το σύνορο ϑD_f του συνόλου D_f. Είναι το σύνολο D_f συνεκτικό, δηλαδή μπορεί να γραφεί ως ένωση δύο ανοικτών συνόλων που είναι ξένα μεταξύ τους;

6. Να περιγράψετε την επιφάνεια με αναλυτική εξίσωση :

$(\alpha)\; y - z = 0$ $\qquad$ $(\beta)\; (x-2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4$

$(\gamma)\; (2x+z)^2 - y - z = 4$ $\qquad$ $(\delta)\; y^2 + z^2 = 9$

$(\varepsilon)\; x^2 - y^2 - 2z(x-y) = 0$ $\qquad$ $(\sigma\tau)\; x^2 + y^2 - 2z(x-y) = 0$

$(\zeta)\; x^2 + 2y^2 - z = 0$ $\qquad$ $(\eta)\; (x-2)^2 + 4y^2 + 4z^2 = 4$

$(\theta)\; z = y^2 - x^2$ $\qquad$ $(\iota)\; x^2 + y^2 - z^2 = 1.$

7. Να βρεθεί η προβολή στο επίπεδο $xOy\,(z=0)$ των καμπύλων

$(\alpha)\, x^2+y^2+z^2=9,\, y-z=0$

$(\beta)\, x^2+y^2-2z=0,\, x-z=0.$

8. Να βρεθούν οι ισοσταθμικές καμπύλες (επιφάνειες) των συναρτήσεων

$(\alpha)\ f(x,y)=2-x+y$ $\qquad(\beta)\ f(x,y)=1-|x|-|y|$

$(\gamma)\ f(x,y)=\dfrac{y}{\sqrt{x}}$ $\qquad(\delta)\ f(x,y,z)=\dfrac{x^2+y^2}{4z}$

$(\varepsilon)\ f(x,y,z)=e^{x+y-z}$ $\qquad(\sigma\tau)\ f(x,y,z)=-x^2+y^2-z^2$

9. Το πεδίο ταχυτήτων ενός ρευστού δίνεται από το διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{v}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{-\alpha y}{x^2+y^2}\mathbf{i}+\dfrac{\alpha x}{x^2+y^2}\mathbf{j}, & \text{αν } x^2+y^2\ge\alpha^2,\alpha>0\\ \mathbf{0}, & \text{αν } x^2+y^2<\alpha^2\end{cases}$$

Να σχεδιάσετε τις ταχύτητες του ρευστού πάνω στα σημεία των κύκλων με εξισώσεις $(i)\, x^2+y^2=\alpha^2$ και $(ii)\ x^2+y^2=4\alpha^2$.

Τι συμπεραίνετε για την κίνηση του ρευστού ;

10. Να εξετάσετε ως προς την ύπαρξη τα παρακάτω όρια και να υπολογίσετε όσα υπάρχουν :

$(i)\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ $\quad(ii)\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$ $\quad(iii)\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$ $\quad(iv)\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^y$

$(v)\ \lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$ $\quad(vi)\ \lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\dfrac{xy}{x^2+y^2+z^2}$ $\quad(vii)\ \lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\dfrac{x^2-yz}{x^2+y^2+z^2}$

11. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις παρακάτω συναρτήσεις :

(i) $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x}{x^2+y^2}e^{-\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)^2}, & \text{αν } (x,y)\ne(0,0)\\ 0, & \text{αν } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(ii) $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x-y}{x+y}, & \text{αν } x+y\ne0\\ a, & \text{αν } x+y=0\end{cases}\quad \text{, όπου } a\in\mathbb{R}.$$

Παράδοση εργασίας: 25Απριλίου 2012