

**+ ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ-ΦΥΛΛΑΔΙΟ**  
**2(ΑΝΑΛΥΣΗ)**  
**ΜΕΘΟΔΟΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ**

	<b>ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ</b>	<b>ΜΕΘΟΔΟΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ</b>
<b>1.</b>	$\int f(g(x))g'(x)dx$	Αντικατάσταση: $u = g(x), du = g'(x)dx$
<b>2.</b>	$\int f(x)g'(x)dx$	Ολοκλήρωση κατά παράγοντες $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$ Εφαρμόζεται σε κάθε περίπτωση της μορφής $\int P(x)g(x)dx$ , όπου $P(x)$ πολυώνυμο και $g(x) \in \{e^{ax}, \cos bx, \sin bx, \ln x, \tan^{-1}x, \sin^{-1}x, \text{κλπ.}\}$
<b>3.</b>	$\int f(x)g^{(n)}(x)dx$	Ολοκλήρωση κατά παράγοντες $\int f(x)g^{(n)}(x)dx = f(x)g^{(n-1)}(x) - \int f'(x)g^{(n-1)}(x)dx$
<b>4.</b>	$\int R(\sin x, \cos x)dx$	Γενική αντικατάσταση: $t = \tan \frac{x}{2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ . Αν $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ , τότε θέτουμε $t = \cos x$ Αν $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ , τότε θέτουμε $t = \sin x$ Αν $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ , τότε θέτουμε $t = \tan x$
<b>5.</b>	$\int \sin ax \sin bx dx$ $\int \sin ax \cos bx dx$ $\int \cos ax \cos bx dx$	$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2} [\cos(a-b)x - \cos(a+b)x]$ $\sin ax \cos bx = \frac{1}{2} [\sin(a-b)x + \sin(a+b)x]$ $\cos ax \cos bx = \frac{1}{2} [\cos(a-b)x + \cos(a+b)x]$
<b>6.</b>	$\int \sin^m x \cos^n x dx$ $m, n \in \mathbb{Z}$	Αν $m$ περιττός θετικός ακέραιος, τότε : $t = \cos x$ Αν $n$ περιττός θετικός ακέραιος, τότε : $t = \sin x$ Αν $m+n$ άρτιος αρνητικός ακέραιος, τότε: $t = \tan x$ Αν $m, n$ άρτιοι μη αρνητικοί ακέραιοι, τότε: $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ .
<b>7.</b>	$\int R(e^{ax})dx$	Αντικατάσταση: $t = e^{ax}$ .
<b>8.</b>	$\int R(\sinh x, \cosh x)dx$	Αντικατάσταση: $t = \tanh x, dx = \frac{2dt}{1-t^2}$ $\sinh x = \frac{2t}{1-t^2}, \cosh x = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \tanh x = \frac{2t}{1+t^2}$ .

9.	$\int \frac{\kappa x + \lambda}{x^2 + px + q} dx,$ $p^2 - 4q < 0$	Αντικατάσταση: $x + \frac{p}{2} = t$ .
10.	$I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^n},$ $n = 2, 3, \dots$	Αναγωγικός τύπος $I_n = \frac{x}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}} + \left(\frac{2n-3}{2n-2}\right) I_{n-1}, n = 2, 3, \dots$ $I_1 = \int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1}x + c$
11.	$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx, \text{ όπου}$ $Q(x) = (x-x_1)^\kappa (x-x_2)^\lambda \dots$ $\dots (x^2 + px + q)^\mu \dots$ με $p^2 - 4q < 0$ και $P(x)$ πολυώνυμο με $\deg P(x) < \deg Q(x)$ .	Ανάλυση της $\frac{P(x)}{Q(x)}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων: $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \dots + \frac{A_\kappa}{(x-x_1)^\kappa} + \dots$ $\frac{B_1}{x-x_2} + \frac{B_2}{(x-x_2)^2} + \dots + \frac{B_\lambda}{(x-x_2)^\lambda} + \dots$ $\frac{\Gamma_1 x + \Delta_1}{x^2 + px + q} + \frac{\Gamma_2 x + \Delta_2}{(x^2 + px + q)^2} + \dots + \frac{\Gamma_\mu + \Delta_\mu}{(x^2 + px + q)^\mu} + \dots$
12.	$\int R(x, x^{\frac{m}{n}}, \dots, x^{\frac{r}{s}}) dx,$ όπου $R$ ρητή συνάρτηση των μεταβλητών της.	Αντικατάσταση: $x = t^k$ , όπου $k$ είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των παρανομαστών των κλασμάτων $\frac{m}{n}, \dots, \frac{r}{s}$ .
13.	$\int R \left( x, \left( \frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{1}{n}} \right) dx, \text{ όπου}$ $R \text{ είναι ρητή συνάρτηση των μεταβλητών της.}$	Αντικατάσταση: $\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$
14.	$\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx,$ όπου $R$ ρητή συνάρτηση των μεταβλητών της.	Αντικατάσταση $x = a \sin \theta, \theta \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \Leftrightarrow \theta = \sin^{-1} \frac{x}{a}$
15.	$\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx, \text{ όπου}$ $R \text{ ρητή συνάρτηση των μεταβλητών της.}$	Αντικατάσταση $x = a \tan \theta, \theta \in \left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \Leftrightarrow \theta = \tan^{-1} \frac{x}{a}$
16.	$\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx, \text{ όπου}$ $R \text{ ρητή συνάρτηση των μεταβλητών της και } x \geq a$	Αντικατάσταση $x = \frac{a}{\cos \theta}, \theta \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right) \Leftrightarrow \theta = \cos^{-1} \frac{a}{x}, x \in [a, +\infty)$

**ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΟΡΙΣΤΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ  
ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

**1. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα**

(α)  $\int \frac{6x^3 + x^2 - 2x + 1}{2x - 1} dx$

(β)  $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$

(γ)  $\int \sin^2 5x dx$

(δ)  $\int \cos x \cos 3x \cos 5x dx$

(ε)  $\int \frac{dx}{x^2 + x + 1}$

(στ)  $\int \frac{dx}{\sqrt{5 - x^2 - 4x}}$

**2. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα**

(α)  $\int x^2 \cos 3x dx$

(β)  $\int \sin^{-1} x dx$

(γ)  $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{x}} dx, x > 0$

(δ)  $\int \cos(\ln x) dx$

(ε)  $\int e^{2x} \cos 3x dx$

(στ)  $\int \ln(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) dx$

(ζ)  $\int e^x \cosh x dx$

**3. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα**

(α)  $\int \frac{x dx}{x^3 + 1}$

(β)  $\int \frac{x^3 + 1}{x(x-1)^3} dx$

**4. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα**

(α)  $\int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x(1 + \sqrt[3]{x})} dx$

(β)  $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}, \left( \begin{array}{c} \text{Υπόδειξη} \\ \sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5} = (x-1)(x+2)\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}} \end{array} \right)$

**5. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα**

(α)  $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x} dx$

(β)  $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx$

(γ)  $\int \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx$

(δ)  $\int \frac{dx}{\cos^4 x \sin^2 x}$

**6. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα**

(α)  $\int \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x^2} dx$

(β)  $\int \sqrt{(x^2 - 1)^3} dx$

(γ)  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} - 1}$

7. Να αποδείξετε τους παρακάτω αναγωγικούς τύπους:

$$(\alpha) I_n \equiv \int x^n \cos x dx = x^n \sin x + nx^{n-1} \cos x - n(n-1)I_{n-2}$$

$$(\beta) I_n \equiv \int \sin^n x dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$$(\gamma) I_n \equiv \int (\ln x)^n dx = x(\ln x)^n - nI_{n-1}$$

$$(\delta) I_{m,n} \equiv \int x^m (\ln x)^n dx = \frac{x^{m+1} (\ln x)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1} I_{m,n-1}$$

8. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$(\alpha) \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 13} \qquad (\beta) \int \frac{x+3}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx$$

$$(\gamma) \int \frac{2+6x}{(3+2x-x^2)^2} dx, |x-1| < 2$$