

ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ / ΦΥΛΛΑΔΙΟ 4
ΒΑΘΜΟΣ ΠΙΝΑΚΑ- ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

1. Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & \kappa - 1 & 1 \\ 0 & \lambda & \kappa + 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(α) Να προσδιορίσετε τις τιμές του ζεύγους $(\kappa, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ για τις οποίες ο πίνακας A έχει βαθμό 2.

(β) Για τις τιμές των κ και λ που θα βρείτε να προσδιορίσετε τις λύσεις του ομογενούς συστήματος

$$AX = O,$$

$$\text{όπου } X = [x \quad y \quad z]^T \text{ και } O = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T.$$

2. (α) Αν X, Y είναι πραγματικοί μη μηδενικοί πίνακες τύπου $n \times 1$, να αποδείξετε ότι ο πίνακας XY^T είναι βαθμού 1.

(β) Δίνεται ο πίνακας $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ με $a_{ij} = i + j$, για κάθε $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Να βρείτε το βαθμό του A .

3. Για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$, να λύσετε το σύστημα

$$x - 2y + z + w = a$$

$$x - y + 2z - w = 2 \quad (\Sigma)$$

$$2x - 3y + 3z = 2a + 1$$

4. Προσδιορίστε το σύνολο των λύσεων E_a του συστήματος (Σ) , για $a \in \mathbb{R}$.

$$(a-1)x + (a-1)y = 1-a$$

$$ay + az = 2(a-1) \quad (\Sigma)$$

$$(a^2 - a)x + (a^2 - a)z = 0$$

Προσδιορίστε το σύνολο των λύσεων E_a του συστήματος (Σ) , για $a \in \mathbb{R}$.

5. Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, να λύσετε το σύστημα :

$$2x + 2y - z = 0$$

$$-2x - (\lambda + 2)y + (\lambda + 1)z = 0$$

$$4x + (4 - 3\lambda)y + (3\lambda - 2)z = 0 \quad (\Sigma)$$

$$\lambda(\lambda + 1)x + \lambda^2 y = 0$$

6. Έστω $AX = B$ (1), ένα $m \times n$ γραμμικό σύστημα. Αν είναι

$$\Lambda = \{X \in M_{n \times 1} = \Pi_{n \times 1} : AX=B\}$$

το σύνολο των λύσεων του (1),

$$\Lambda_0 = \{X \in M_{n \times 1} = \Pi_{n \times 1} : AX=O\}$$

είναι το σύνολο των λύσεων του αντιστοίχου ομογενούς και $\xi \in \Lambda$ είναι μία λύση του (1), να αποδείξετε ότι :

$$\Lambda = \{\xi + \xi_0 : \xi_0 \in \Lambda_0\} = \xi + \Lambda_0.$$

7. Δίνεται το σύστημα

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x+5y+5z+6w=\alpha \\ x+3y+4z+4w=\beta \\ -3x-5y \quad -4w=\gamma \\ x+2y+z+2w=\delta \end{array} \right. \quad (\Sigma)$$

(I) Να βρεθούν οι αναγκαίες και ικανές συνθήκες για τα $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε το (Σ) να είναι συμβιβαστό.

(II) Για $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (0, 0, 0, 0)$, να λύσετε το σύστημα (Σ) .

8. Να αποδείξετε ότι ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμος και να βρείτε τον αντίστροφό του.

9. Για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων $a, b \in \mathbb{R}$, να λύσετε το σύστημα:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \\ ax + by + z = 1 \end{array} \right.$$