

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 1
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Διανυσματικά γινόμενα
Γραμμική Άλγεβρα- 1^ο Εξάμηνο 2010-11

1. Να αποδείξετε ότι για τα διανύσματα $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ ισχύουν :

(i) $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ και $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} \Rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{c}$

(ii) $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$

(iii) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})\mathbf{a}$

(iv) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{b} \times \mathbf{c}, \mathbf{c} \times \mathbf{a}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})^2$

2. Αν τα διανύσματα $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ είναι μη συνεπίπεδα, να αποδείξετε ότι και τα διανύσματα $\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{b} \times \mathbf{c}, \mathbf{c} \times \mathbf{a}$ είναι μη συνεπίπεδα.

3. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε διανύσματα $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ ισχύει η ισότητα:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}).$$

4. Αν \mathbf{a}, \mathbf{b} είναι δύο μη συγγραμμικά μοναδιαία διανύσματα, να προσδιορίσετε το διάνυσμα \mathbf{u} που ικανοποιεί την εξίσωση

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{u})\mathbf{b} + 4\mathbf{a} = 2\mathbf{u}$$

5. Τα σημεία A, B, Γ και Δ έχουν διανύσματα θέσης ως προς το καρτεσιανό σύστημα αναφοράς Oxyz, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ και \mathbf{d} , αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

$$A, B, \Gamma, \Delta \text{ συνεπίπεδα} \Leftrightarrow (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) - (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) + (\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{a}) - (\mathbf{d}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0.$$

6. Τα σημεία A, B και Γ έχουν διανύσματα θέσης ως προς το καρτεσιανό σύστημα αναφοράς Oxyz, \mathbf{a}, \mathbf{b} , και \mathbf{c} , αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ είναι:

$$E(\text{AB}\Gamma) = \frac{1}{2} |(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{c} \times \mathbf{a})|.$$

7. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\mathbf{x} + \mathbf{x} \times \mathbf{a} = \mathbf{b}$, όπου \mathbf{a}, \mathbf{b} είναι γνωστά διανύσματα, έχει μοναδική λύση ως προς \mathbf{x} , η οποία και να βρεθεί.

8. Αν το διάνυσμα \mathbf{w} ικανοποιεί την εξίσωση

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{a}) + \mathbf{w} = \mathbf{b},$$

όπου \mathbf{a}, \mathbf{b} είναι γνωστά διανύσματα, τότε:

(i) Να αποδείξετε ότι:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \text{ και } \mathbf{w} \times \mathbf{a} = \left(\frac{1}{1 + |\mathbf{a}|^2} \right) (\mathbf{b} \times \mathbf{a}).$$

(ii) Να προσδιορίσετε τη λύση της εξίσωσης.

9. Έστω $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{r} \in \Delta^3$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ και $t \in \mathbb{R}$. Να προσδιορίσετε την τιμή του t για την οποία έχει λύση ως προς \mathbf{r} η εξίσωση

$$\mathbf{a} \times \mathbf{r} = \mathbf{a} + t\mathbf{b}$$

και στη συνέχεια να προσδιορίσετε τη λύση της εξίσωσης.

10. Αν $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ και \mathbf{d} είναι διανύσματα του Δ^3 , να αποδείξετε ότι:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d})\mathbf{b} - (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})\mathbf{a} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d})\mathbf{c} - (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})\mathbf{d}$$

11. Έστω $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}, \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ δύο βάσεις του Δ^3 , όπου Δ^3 είναι ο διανυσματικός χώρος των ελεύθερων διανυσμάτων του χώρου.

Οι βάσεις αυτές λέγονται **αμοιβαίες**, αν

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν } i = j \\ 0, & \text{αν } i \neq j \end{cases} \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Να αποδείξετε ότι οι βάσεις αυτές είναι αμοιβαίες, αν και μόνον αν, ισχύει:

$$\mathbf{b}_1 = \frac{1}{V}(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3), \mathbf{b}_2 = \frac{1}{V}(\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1), \mathbf{b}_3 = \frac{1}{V}(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2), \text{ όπου } V = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3).$$

12. Αν $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}, \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ είναι δύο αμοιβαίες βάσεις, να αποδείξετε ότι:

(i) $V' = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = \frac{1}{V}$, όπου $V = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$

(ii) Το τυχόν διάνυσμα \mathbf{r} γράφεται :

$$\mathbf{r} = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{b}_1)\mathbf{a}_1 + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{b}_2)\mathbf{a}_2 + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{b}_3)\mathbf{a}_3 .$$

Παράδοση φυλλαδίου 1: Μέχρι 8 Νοεμβρίου 2010