ΦΥΛΛΑΔΙΟ 1
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
Διανυσματικά γινόμενα
Γραμμική Άλγεβρα- 1ο Εξάμηνο 2010-11

1. Να αποδείξετε ότι για τα διανύσματα $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ ισχύουν :

(i) $\mathbf{a}\neq\mathbf{0},\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$ και $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{a}\times\mathbf{c}\Rightarrow\mathbf{b}=\mathbf{c}$

(ii) $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{0}\Rightarrow\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{b}\times\mathbf{c}=\mathbf{c}\times\mathbf{a}$

(iii) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{a}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})\mathbf{a}$

(iv) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b},\mathbf{b}\times\mathbf{c},\mathbf{c}\times\mathbf{a})=(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})^2$

2. Αν τα διανύσματα $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ είναι μη συνεπίπεδα, να αποδείξετε ότι και τα διανύσματα $\mathbf{a}\times\mathbf{b},\mathbf{b}\times\mathbf{c},\mathbf{c}\times\mathbf{a}$ είναι μη συνεπίπεδα.

3. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε διανύσματα $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}$ ισχύει η ισότητα:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}).$$

4. Αν $\mathbf{a},\mathbf{b}$ είναι δύο μη συγγραμμικά μοναδιαία διανύσματα, να προσδιορίσετε το διάνυσμα $\mathbf{u}$ που ικανοποιεί την εξίσωση

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{u})\mathbf{b}+4\mathbf{a}=2\mathbf{u}$$

5. Τα σημεία Α, Β, Γ και Δ έχουν διανύσματα θέσης ως προς το καρτεσιανό σύστημα αναφοράς $Oxyz$, $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ και $\mathbf{d}$, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

$$\mathrm{A},\mathrm{B},\Gamma,\Delta \text{ συνεπίπεδα} \Leftrightarrow (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})-(\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d})+(\mathbf{c},\mathbf{d},\mathbf{a})-(\mathbf{d},\mathbf{a},\mathbf{b})=0.$$

6. Τα σημεία Α, Β και Γ έχουν διανύσματα θέσης ως προς το καρτεσιανό σύστημα αναφοράς $Oxyz$, $\mathbf{a},\mathbf{b},$ και $\mathbf{c}$, αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι:

$$\mathrm{E}(\mathrm{AB}\Gamma)=\frac{1}{2}\left|(\mathbf{a}\times\mathbf{b})+(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\right|.$$

7. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\mathbf{x}+\mathbf{x}\times\mathbf{a}=\mathbf{b}$, όπου $\mathbf{a},\mathbf{b}$ είναι γνωστά διανύσματα, έχει μοναδική λύση ως προς $\mathbf{x}$, η οποία και να βρεθεί.

8. Αν το διάνυσμα $\mathbf{w}$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{w}\times\mathbf{a})+\mathbf{w}=\mathbf{b},$$

όπου $\mathbf{a},\mathbf{b}$ είναι γνωστά διανύσματα, τότε:

(i) Να αποδείξετε ότι:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{w}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \text{ και } \mathbf{w}\times\mathbf{a}=\left(\frac{1}{1+|\mathbf{a}|^2}\right)(\mathbf{b}\times\mathbf{a}).$$

(ii) Να προσδιορίσετε τη λύση της εξίσωσης.

9. Έστω $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{r}\in\boldsymbol{\Delta}^3$, $\mathbf{a},\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$ και $t\in\mathbb{R}$. Να προσδιορίσετε την τιμή του t για την οποία έχει λύση ως προς $\mathbf{r}$ η εξίσωση

$$\mathbf{a}\times\mathbf{r}=\mathbf{a}+t\mathbf{b}$$

και στη συνέχεια να προσδιορίσετε τη λύση της εξίσωσης.

10 Αν $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ και $\mathbf{d}$ είναι διανύσματα του $\boldsymbol{\Delta}^3$, να αποδείξετε ότι:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=(\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{d})\mathbf{b}-(\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d})\mathbf{a}=(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{d})\mathbf{c}-(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})\mathbf{d}$$

11. Έστω $\{\mathbf{a_1},\mathbf{a_2},\mathbf{a_3}\},\{\mathbf{b_1},\mathbf{b_2},\mathbf{b_3}\}$ δύο βάσεις του Δ^3, όπου Δ^3 είναι ο διανυσματικός χώρος των ελεύθερων διανυσμάτων του χώρου.

Οι βάσεις αυτές λέγονται **αμοιβαίες**, αν

$$\mathbf{a}_\mathrm{i}\cdot\mathbf{b}_\mathrm{j}=\delta_\mathrm{ij}=\begin{cases}1, \text{ αν } \mathrm{i}=\mathrm{j}\\ 0, \text{ αν } \mathrm{i}\neq\mathrm{j}\end{cases}\qquad \mathrm{i},\mathrm{j}=1,2,3.$$

Να αποδείξετε ότι οι βάσεις αυτές είναι αμοιβαίες, αν και μόνον αν, ισχύει:

$$\mathbf{b}_1=\frac{1}{\mathrm{V}}(\mathbf{a}_2\times\mathbf{a}_3),\mathbf{b}_2=\frac{1}{\mathrm{V}}(\mathbf{a}_3\times\mathbf{a}_1),\mathbf{b}_3=\frac{1}{\mathrm{V}}(\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2), \text{όπου } \mathrm{V}=(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3).$$

12. Αν $\{\mathbf{a_1},\mathbf{a_2},\mathbf{a_3}\},\{\mathbf{b_1},\mathbf{b_2},\mathbf{b_3}\}$ είναι δύο αμοιβαίες βάσεις, να αποδείξετε ότι:

(i) $\mathrm{V}'=(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3)=1/\mathrm{V}$, όπου $\mathrm{V}=(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3)$

(ii) Το τυχόν διάνυσμα $\mathbf{r}$ γράφεται :

$$\mathbf{r}=(\mathbf{r}\cdot\mathbf{b}_1)\mathbf{a}_1+(\mathbf{r}\cdot\mathbf{b}_2)\mathbf{a}_2+(\mathbf{r}\cdot\mathbf{b}_3)\mathbf{a}_3\ .$$

Παράδοση φυλλαδίου 1: Μέχρι 9 Νοεμβρίου 2010