ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ-ΦΥΛΛΑΔΙΟ 2 / 2010-11
ΠΙΝΑΚΕΣ –ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ

1. Αν $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ και $\Gamma=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{bmatrix}$, να βρείτε τους πίνακες: AB, BA και $BA+\Gamma$.

2. Ο $n\times n$ πίνακας A είναι τέτοιος ώστε: $(A+4I)^2=O$. Να αποδείξετε ότι :

(i) ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και να εκφράσετε τον πίνακα A^{-1} ως συνάρτηση του πίνακα A,

(ii) ο πίνακας $A+I$ είναι αντιστρέψιμος.

3. Αν $A,B\in M_n(\mathbb{R})$, να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως αληθείς ή ψευδείς, δικαιολογώντας την απάντησή σας με απόδειξη ή αντιπαράδειγμα.

(i) Αν A,B είναι αντιστρέψιμοι και $AB^2=A^2B$, τότε $A=B$.

(ii) Αν A,B αντιστρέψιμοι, τότε και ο $A+B$ είναι αντιστρέψιμος.

(iii) Αν $AB=O$ και ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε $B=O$.

(iv) Αν $AB=O$, τότε $A=O$ ή $B=O$.

(v) Αν $ABA=O$ και B μη αντιστρέψιμος, τότε $A^2=O$.

4. Οι πίνακες $A,B\in M_n(\mathbb{R})$ είναι τέτοιοι ώστε: $A^2=A, B^2=B, (A+B)^2=A+B$. Να αποδείξετε ότι : $AB=-BA=O$.

5. Ο πίνακας A λέγεται ***συμμετρικός (αντισυμμετρικός)***, αν $A^T=A$ ($A^T=-A$). Αν οι πίνακες $A,B\in M_n(\mathbb{R})$ είναι συμμετρικοί, να αποδείξετε ότι :

(i) AB συμμετρικός $\Leftrightarrow AB=BA$

(ii) ο πίνακας $AB-BA$ είναι αντισυμμετρικός.

6. **(i)** Αν οι $\nu\times\nu$ πίνακες A,B και P είναι τέτοιοι, ώστε $AP=PB$ και ο P είναι αντιστρέψιμος, να αποδείξετε ότι για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$ ισχύει:

$$A^n=PB^nP^{-1}.$$

(ii) Έστω $A=\begin{bmatrix}4 & -2\\3 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ και $P\in M_2(\mathbb{R})$. Να αποδείξετε ότι:

$$AP=PB\Leftrightarrow P=\begin{bmatrix}x & 2y\\x & 3y\end{bmatrix}, x,y\in\mathbb{R}.$$

Θεωρώντας $x=y=1$, βρείτε τον πίνακα $A^n, n\in\mathbb{N}^*$.

7. Αν $A,B\in M_n(K)$ με $A+B=AB$, να αποδείξετε ότι: $AB=BA$.

8. Αν A είναι $\nu\times 1$ πίνακας τέτοιος, ώστε $A^TA=I_1=[1]$, τότε ο πίνακας $H=I_\nu-2AA^T$ είναι ο αντίστοιχος **πίνακας Householder**, που ονομάστηκε έτσι προς τιμή του Αμερικανού μαθηματικού A. Householder.

(i) Αν $A^T = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{5}{12} & \frac{5}{12} \end{bmatrix}$, να επαληθεύσετε ότι $A^T A = I_1 = [1]$

και να υπολογίσετε τον αντίστοιχο πίνακα του Householder.

(ii) Αν H είναι πίνακας Householder, να αποδείξετε ότι:

$$H = H^T \quad \text{και} \quad H^T H = I_\nu .$$

9. Με την υπόθεση ότι όλοι οι αντίστροφοι πίνακες που εμφανίζονται υπάρχουν, να αποδείξετε ότι:

(i) $\left(A^{-1} + B^{-1}\right)^{-1} = A\left(A+B\right)^{-1} B$ **(ii)** $\left(I+AB\right)^{-1} A = A\left(I+BA\right)^{-1}$

10. Να βρεθεί ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας που είναι γραμμοϊσοδύναμος με καθένα από τους παρακάτω πίνακες:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 7 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

11. Να βρεθεί ο αντίστροφος, αν υπάρχει, των παρακάτω πινάκων:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

12. Να υπολογιστεί η ορίζουσα του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{bmatrix}$

13. Να λύσετε την εξίσωση: $\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & b & c \\ a & b & x & c \\ a & b & c & x \end{vmatrix} = 0$

14. Να υπολογίσετε την ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-1} & a_n \\ -x & x & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & -x & x \end{bmatrix},$$

όπου $a_1, a_2, ..., a_n . x \in \mathbb{R}$.