ΦΥΛΛΑΔΙΟ 1/ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
Γραμμική Άλγεβρα- 1^{o} Εξάμηνο

Διανυσματικά γινόμενα

1. Να αποδείξετε ότι για τα διανύσματα $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ ισχύουν :

(i) $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ και $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} \Rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{c}$

(ii) $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$

(iii) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})\mathbf{a}$

(iv) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{b} \times \mathbf{c}, \mathbf{c} \times \mathbf{a}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})^2$

2. Αν τα διανύσματα $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ είναι μη συνεπίπεδα, να αποδείξετε ότι και τα διανύσματα $\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{b} \times \mathbf{c}, \mathbf{c} \times \mathbf{a}$ είναι μη συνεπίπεδα.

3. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε διανύσματα $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ ισχύει η ισότητα:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}).$$

4. Αν $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ είναι δύο μη συγγραμμικά μοναδιαία διανύσματα, να προσδιορίσετε το διάνυσμα $\mathbf{u}$ που ικανοποιεί την εξίσωση

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{u})\mathbf{b} + 4\mathbf{a} = 2\mathbf{u}$$

5. Τα σημεία Α, Β, Γ και Δ έχουν διανύσματα θέσης ως προς το καρτεσιανό σύστημα αναφοράς $Oxyz$, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ και $\mathbf{d}$, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

$$\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma, \Delta \text{ συνεπίπεδα } \Leftrightarrow (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) - (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) + (\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{a}) - (\mathbf{d}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0.$$

6. Τα σημεία Α, Β και Γ έχουν διανύσματα θέσης ως προς το καρτεσιανό σύστημα αναφοράς $Oxyz$, $\mathbf{a}, \mathbf{b},$ και $\mathbf{c}$, αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι:

$$\mathrm{E}(\mathrm{AB}\Gamma) = \frac{1}{2}\left|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{c} \times \mathbf{a})\right|.$$

7. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\mathbf{x} + \mathbf{x} \times \mathbf{a} = \mathbf{b}$, όπου $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ είναι γνωστά διανύσματα, έχει μοναδική λύση ως προς $\mathbf{x}$, η οποία και να βρεθεί.

8. Αν το διάνυσμα $\mathbf{w}$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{w}\times\mathbf{a})+\mathbf{w}=\mathbf{b},$$

όπου $\mathbf{a},\mathbf{b}$ είναι γνωστά διανύσματα, τότε:

(i) να αποδείξετε ότι $\mathbf{a}\cdot\mathbf{w}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ και $\mathbf{w}\times\mathbf{a}=\left(\dfrac{1}{1+|\mathbf{a}|^2}\right)(\mathbf{b}\times\mathbf{a})$,

(ii) να προσδιορίσετε τη λύση της εξίσωσης.

9. Έστω $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{r}\in\mathbf{\Delta}^3$, $\mathbf{a},\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$ και $t\in\mathbb{R}$. Να προσδιορίσετε την τιμή του t για την οποία έχει λύση ως προς $\mathbf{r}$ η εξίσωση

$$\mathbf{a}\times\mathbf{r}=\mathbf{a}+t\mathbf{b}$$

και στη συνέχεια να προσδιορίσετε τη λύση της εξίσωσης.

10 Αν $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ και $\mathbf{d}$ είναι διανύσματα του $\mathbf{\Delta}^3$, να αποδείξετε ότι:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=(\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{d})\mathbf{b}-(\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d})\mathbf{a}=(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{d})\mathbf{c}-(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})\mathbf{d}$$

Παράδοση φυλλαδίου 1: 19-11-2010