ΦΥΛΛΑΔΙΟ 5 –ΠΟΛΙΤΙΚΟΙ ΜΗΧΑΝΙΚΟΙ / 2010-11
ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως αληθείς ή ψευδείς, δικαιολογώντας την απάντησή σας:

(i) Το σύνολο $U=\{(x,y): x,y\in\mathbb{R}, x<y\}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$.

(ii) Αν $\{a,b,c\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^3$ και $u\in\mathbb{R}^3-\{(0,0,0)\}$, τότε και το σύνολο $\{u+a,b,c\}$ είναι επίσης βάση του $\mathbb{R}^3$.

(iii) Αν $\{u_1,u_2,...u_r\}$ είναι ένα γραμμικώς εξαρτημένο σύνολο διανυσμάτων του $\mathbb{R}^n$,τότε $r<n$.

(iv) Αν $\{x_1,x_2,...,x_r\}$ είναι ένα σύνολο γεννητόρων του $\mathbb{R}^n$, τότε $r\geq n$.

(v) Ο υπόχωρος $U=\{(x,x,x): x\in\mathbb{R}\}$ του $\mathbb{R}^3$ έχει διάσταση 3.

(vi) Ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ που παράγεται από το σύνολο $\{(1,2,1),(2,2,1)\}$ είναι ο

$$A=\{(2x,2x+2y,x+y): x,y\in\mathbb{R}\}$$

(vii) Ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ που παράγεται από το σύνολο $\{(1,2,1),(2,2,1)\}$ είναι ο

$$B=\{(x+y,2y,y): x,y\in\mathbb{R}\}.$$

(viii) Αν A,B είναι υπόχωροι ενός διανυσματικού χώρου $V, \dim V<+\infty$, τότε :

$$(A\subseteq B \Rightarrow \dim A\leq \dim B)$$

(ix) Αν A,B είναι υπόχωροι ενός διανυσματικού χώρου $V, \dim V<+\infty$, τότε

$$(\dim A\leq \dim B \Rightarrow A\subseteq B).$$

(x) Ο μοναδικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ διάστασης n, είναι ο ίδιος ο $\mathbb{R}^n$.

2. Ποια από τα παρακάτω σύνολα είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^n$;

(i) $\mathrm{U}=\{(x,y,z,w): x+y=z+w\}$

(ii) $\mathrm{A}=\{(x,y,z,w): x+y=1\}$

(iii) $\mathrm{B}=\{(x,y,z,w): x^2+y^2=0\}$

(iv) $\Gamma=\{(x,y,z,w): x^2+y^2=1\}$

(v) $\Delta=\{(x+2y,0,2x-y,y): x,y\in\mathbb{R}\}$

(vi) $\mathrm{E}=\{(x+2y,x,2x-y,y): x,y\in\mathbb{R}\}$

3. Έστω V πραγματικός διανυσματικός χώρος και $\upsilon_1,\upsilon_2,...,\upsilon_\kappa$ γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του V. Αν είναι $\upsilon=\lambda_1\upsilon_1+\lambda_2\upsilon_2+...+\lambda_\kappa\upsilon_\kappa$, όπου $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\kappa\in\mathbb{R}$, τότε :

$(\upsilon-\upsilon_1,\upsilon-\upsilon_2,...,\upsilon-\upsilon_\kappa$ γραμμικώς ανεξάρτητα $\Leftrightarrow \lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_\kappa\neq 1)$.

4. Έστω V διανυσματικός χώρος πάνω στο σώμα Κ=$\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ και $U\subseteq V, U\neq\varnothing$. Να προσδιορίσετε, ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι αναγκαίο και ικανό κριτήριο , για να είναι ο U υπόχωρος του διανυσματικού χώρου V .

(i) Για κάθε $x,y\in U, \lambda,\mu\in \mathrm{K}$, ισχύει: $\lambda x+\mu y\in U$.

(ii) Για κάθε $x,y\in U, \lambda\in \mathrm{K}$, ισχύει : $\lambda x+y\in U$.

(iii) Για κάθε $x,y\in U, \lambda\in \mathrm{K}$, ισχύει : $\lambda x+\lambda y\in U$.

(iv) Για κάθε $x, y \in U, \lambda \in K$, ισχύει : $\lambda x - \lambda y \in U$.

5 . Έστω U ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από το σύνολο

$$A = \{(2,2,1,3),(7,5,5,5),(3,2,2,1),(2,1,2,1)\}.$$

Αν $x = (6+\lambda, 1+\lambda, -1+\lambda, 2+\lambda) \in U$, να βρείτε το λ .

Για την τιμή του λ που θα βρείτε, έχει το x μοναδική έκφραση ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του A;

Να βρείτε μία βάση του U και να την επεκτείνετε σε βάση του $\mathbb{R}^4$.

6. Θεωρούμε τα σύνολα

$$A = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : y + z + w = 0\}, B = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x + y = 0, z = 2w\}.$$

Να αποδείξετε ότι τα A, B είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^4$ και να βρείτε μία βάση των υποχώρων $A \cap B$ και $A + B$.

7. (i) Να αποδείξετε ότι το σύνολο U είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ διάστασης 1, αν, και μόνον αν,

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = ta, y = tb, z = tc, t \in \mathbb{R}, (a,b,c) \neq (0,0,0)\}$$

(ii) Να αποδείξετε ότι το σύνολο U είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ διάστασης 2, αν, και μόνον αν, είναι

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = 0, (a,b,c) \neq (0,0,0)\}.$$

Ποια είναι η γεωμετρική παράσταση του συνόλου U σε κάθε μία από τις δύο παραπάνω περιπτώσεις ;