ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΕΥΘΕΙΑ-ΕΠΙΠΕΔΟ

6. 1 Γεωμετρικοί τόποι και εξισώσεις στο χώρο

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε τις διάφορες μορφές εξισώσεων των καμπύλων του χώρου και των επιφανειών.

Ορισμός 6. 1. 1 *Θεωρούμε τη συνάρτηση* $\mathrm{F}:\mathrm{A}\to\mathbb{R}$, *όπου* $\mathrm{A}\subseteq\mathbb{R}^3$. *Το σύνολο*

$$\mathrm{E}:=\left\{(x,y,z):(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \text{ και } \mathrm{F}(x,y,z)=0\right\}$$

λέγεται ***επιφάνεια*** *του χώρου* $\mathbb{R}^3$ *με* ***αναλυτική εξίσωση***

$$\mathrm{F}(x,y,z)=0.$$

Επίσης το σύνολο E *λέγεται γεωμετρικός τόπος της εξίσωσης* $\mathrm{F}(x,y,z)=0$.

Αν $z=f(x,y)$ είναι συνάρτηση με πεδίο ορισμού $\mathrm{B}\subseteq\mathbb{R}^2$, τότε η επιφάνεια E με αναλυτική εξίσωση $\mathrm{F}(x,y,z)=z-f(x,y)=0$ είναι το **γράφημα**

$$G_f:=\left\{(x,y,f(x,y)):(x,y)\in\mathrm{B}\right\}$$

της συνάρτησης $z=f(x,y)$. Λέμε ότι η συνάρτηση $z=f(x,y)$ ορίζει την επιφάνεια E ή ότι η επιφάνεια E έχει **καρτεσιανή εξίσωση** $z=f(x,y)$.

Θεωρούμε ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $\mathrm{O}xyz$ στο χώρο, $\mathrm{A}\subseteq\mathbb{R}^3$, το σύνολο $\Sigma:=\left\{\mathbf{r}=\mathbf{OP}:\mathrm{P}(x,y,z)\in\mathrm{A}\right\}$ και τη συνάρτηση $\mathrm{F}:\Sigma\to\mathbb{R}$. Τότε το σύνολο των σημείων P του A, των οποίων η διανυσματική ακτίνα $\mathbf{r}$ ικανοποιεί την εξίσωση $\mathrm{F}(\mathbf{r})=0$ είναι μία επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$ με **διανυσματική εξίσωση** $\mathrm{F}(\mathbf{r})=0$.

Αν οι εξισώσεις

$$\left\{x=x(u,v),\, y=y(u,v),\, z=z(u,v),\ (u,v)\in\mathrm{I}\times\mathrm{J}\subseteq\mathbb{R}^2\right\} \qquad (1)$$

ικανοποιούν την εξίσωση $\mathrm{F}(x,y,z)=0$, δηλαδή, αν ισχύει

$$\mathrm{F}\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big)=0, \text{ για κάθε } (u,v)\in \mathrm{I}\times \mathrm{J}\subseteq \mathbb{R}^2,$$

τότε αυτές λέγονται **παραμετρικές εξισώσεις** της επιφάνειας E του $\mathbb{R}^3$ με αναλυτική εξίσωση $\mathrm{F}(x,y,z)=0$, ενώ η εξίσωση

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)=x(u,v)\mathbf{i}+y(u,v)\mathbf{j}+z(u,v)\mathbf{k},\ (u,v)\in \mathrm{I}\times \mathrm{J}\subseteq \mathbb{R}^2, \tag{2}$$

λέγεται **διανυσματική παραμετρική εξίσωση** της επιφάνειας E.

Μία καμπύλη στο χώρο δίνεται συνήθως ως τομή δύο επιφανειών. Αν $\mathrm{F}_1(x,y,z)=0$ και $\mathrm{F}_2(x,y,z)=0$ είναι οι εξισώσεις των επιφανειών E_1 και E_2, αντίστοιχα, τότε το σύστημα

$$\{\mathrm{F}_1(x,y,z)=0,\ \mathrm{F}_2(x,y,z)=0\} \tag{3}$$

ορίζει μία καμπύλη Γ του χώρου $\mathbb{R}^3$.

Αν οι εξισώσεις

$$x=x(t), y=y(t), z=z(t),\ t\in \mathrm{I}\subseteq \mathbb{R} \tag{4}$$

επαληθεύουν το σύστημα (3), τότε λέγονται **παραμετρικές εξισώσεις** της καμπύλης Γ που ορίζεται από το σύστημα (3). Η εξίσωση

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}+z(t)\mathbf{k},\ t\in \mathrm{I}\subseteq \mathbb{R} \tag{5}$$

λέγεται **διανυσματική παραμετρική εξίσωση** της καμπύλης Γ.

Μέσω των παραμετρικών εξισώσεων είναι δυνατόν να γίνει εισαγωγή της έννοιας της καμπύλης του χώρου $\mathbb{R}^3$, χωρίς τη χρήση του συστήματος (3). Αν I είναι ένα διάστημα του $\mathbb{R}$ και $\mathbf{r}:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ είναι συνάρτηση με τύπο

$$\mathbf{r}(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}+z(t)\mathbf{k},\ t\in \mathrm{I}\subseteq \mathbb{R},$$

τότε το σύνολο τιμών της

$$\mathbf{r}(\mathrm{I})=\{(x(t),y(t),z(t)):t\in \mathrm{I}\}$$

ορίζει μία καμπύλη του χώρου $\mathbb{R}^3$ με **διανυσματική παραμετρική εξίσωση** $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t), t\in \mathrm{I}$ ή με **παραμετρικές εξισώσεις**

$$x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t),\ t\in \mathrm{I}\subseteq \mathbb{R}.$$

Παράδειγμα 1. Οι παραμετρικές εξισώσεις της επιφάνειας E δίνονται από

$$x=\alpha\cos u\sin v, y=\alpha\sin u\sin v, z=\alpha\cos v,$$

$0\le u<2\pi,\ 0\le v\le\pi$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}$ σταθερά. Να βρεθεί η αναλυτική εξίσωση της επιφάνειας E.

Λύση. Υψώνουμε τις παραμετρικές εξισώσεις στο τετράγωνο και τις προσθέτουμε κατά μέλη, οπότε λαμβάνουμε

$$x^2+y^2+z^2=\alpha^2.$$

Παράδειγμα 2. Να βρείτε τις παραμετρικές εξισώσεις της επιφάνειας

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1.$$

Λύση. Αν θέσουμε $x=\alpha\mathrm{X}, y=\beta\mathrm{Y}, z=\gamma\mathrm{Z}$, τότε η δεδομένη εξίσωση γίνεται

$$\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2+\mathrm{Z}^2=1,$$

οπότε μία κατάλληλη επιλογή παραμετρικών εξισώσεων αυτής δίνεται από το παράδειγμα 1, ως εξής:

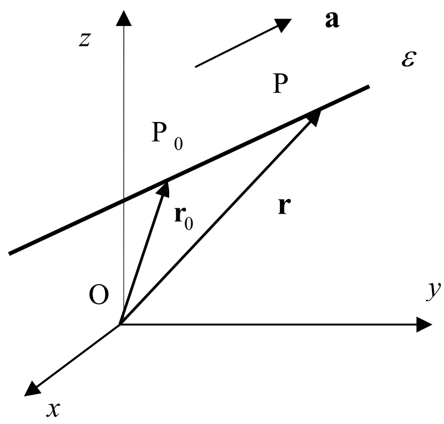
$$\mathrm{X}=\cos u\sin v, \mathrm{Y}=\sin u\sin v, \mathrm{Z}=\cos v, \quad 0\le u<2\pi,\ 0\le v\le\pi$$

$$x=\alpha\cos u\sin v, y=\beta\sin u\sin v, z=\gamma\cos v, \quad 0\le u<2\pi,\ 0\le v\le\pi.$$

6. 2 Η ευθεία στο χώρο

I. Θεωρούμε ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $\mathrm{O}xyz$ και υποθέτουμε ότι η ευθεία ε περνάει από το σημείο P_0 με διάνυσμα θέσης $\mathbf{OP_0}=\mathbf{r_0}$ και είναι παράλληλη προς το δεδομένο διάνυσμα $\mathbf{a}=(\alpha,\beta,\gamma)\neq\mathbf{0}$. Αν P είναι τυχόν σημείο της ευθείας ε με διάνυσμα θέσης $\mathbf{OP}=\mathbf{r}$, τότε ισχύει:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\in\varepsilon &\Leftrightarrow \mathbf{P_0P}\parallel\mathbf{a}\\ &\Leftrightarrow \mathbf{r}-\mathbf{r_0}=t\mathbf{a},\ t\in\mathbb{R}\\ &\Leftrightarrow \mathbf{r}=\mathbf{r_0}+t\mathbf{a},\ t\in\mathbb{R}, \quad (1)\end{aligned}$$



Σχήμα 6.1

η οποία είναι η **διανυσματική παραμετρική** εξίσωση της ευθείας ε.
Η τελευταία είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r_0})\times\mathbf{a}=\mathbf{0}, \qquad (2)$$

η οποία είναι **η διανυσματική εξίσωση της ευθείας** ε.

Αν υποθέσουμε ότι $\mathbf{OP_0}=\mathbf{r_0}=(x_0,y_0,z_0)$ και $\mathbf{OP}=\mathbf{r}=(x,y,z)$, τότε από την (1) προκύπτουν **οι παραμετρικές εξισώσεις** της ευθείας ε

$$x=x_0+t\alpha, y=y_0+t\beta, z=z_0+t\gamma,\ t\in\mathbb{R}. \qquad (3)$$

Από την (3), με απαλοιφή της παραμέτρου t, προκύπτουν οι **αναλυτικές** ή **κανονικές εξισώσεις** της ευθείας ε:

$$\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}=\frac{z-z_0}{\gamma},\ \text{αν}\ \alpha\beta\gamma\neq 0 \qquad (4)$$

ή $$\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta},\ z-z_0=0,\ \text{αν}\ \alpha\beta\neq 0\ \text{και}\ \gamma=0. \qquad (5)$$

Αν είναι $\beta=\gamma=0$, τότε οι αναλυτικές εξισώσεις γίνονται:

$$y=y_0,\ z=z_0.$$

II. Αν δίνονται δύο σημεία $\mathrm{P}_1(x_1,y_1,z_1)$ και $\mathrm{P}_2(x_2,y_2,z_2)$ της ε, διαφορετικά μεταξύ τους, τότε $\mathbf{P_1P_2}=\mathbf{r_2}-\mathbf{r_1}=\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$ και θεωρώντας $\mathrm{P}_0\equiv\mathrm{P}_1$ αναγόμαστε στη προηγούμενη περίπτωση, οπότε έχουμε τις εξισώσεις:

$\mathbf{r}=\mathbf{r}_1+t(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1),\ t\in\mathbb{R}$, **διανυσματική παραμετρική εξίσωση**

$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\times(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)=\mathbf{0}$, **διανυσματική εξίσωση**

$x=x_1+t(x_2-x_1), y=y_1+t(y_2-y_1), z=z_1+t(z_2-z_1),\ t\in\mathbb{R}$, **παραμετρικές εξισώσεις** και, αν $(x_2-x_1)(y_2-y_1)(z_2-z_1)\neq 0$, λαμβάνουμε τις **αναλυτικές εξισώσεις**

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Συνημίτονα κατεύθυνσης

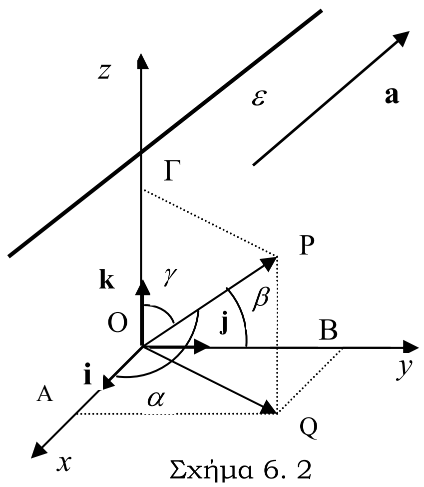
Θεωρούμε ευθεία ε με παράλληλο διάνυσμα $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$. Αν $(\mathrm{O},\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$ είναι δεδομένο ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς, τότε στην ευθεία ε, μέσω του διανύσματος $\mathbf{a}$, αντιστοιχίζουμε τις γωνίες

$$\alpha=\widehat{(\mathbf{i},\mathbf{a})},\ \beta=\widehat{(\mathbf{j},\mathbf{a})},\ \gamma=\widehat{(\mathbf{k},\mathbf{a})},$$

όπου $\alpha,\beta,\gamma\in[0,\pi]$.

Οι γωνίες α,β,γ λέγονται **γωνίες διεύθυνσης** της ευθείας ε ή **γωνίες κατεύθυνσης** του διανύσματος $\mathbf{a}$.

Αν $\mathbf{OP}=\mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ και $\mathrm{A},\mathrm{B},\Gamma$ είναι οι προβολές του P πάνω στους άξονες $x'x, y'y$ και $z'z$, αντίστοιχα, τότε:



Σχήμα 6. 2

$\mathbf{OA} = (\cos\alpha)\mathbf{i}$, $\mathbf{OB} = (cos\beta)\mathbf{j}$, $\mathbf{O\Gamma} = (\cos\gamma)\mathbf{k}$ και

$$\begin{aligned}\mathbf{OP} &= \mathbf{OA} + \mathbf{OB} + \mathbf{O\Gamma}\\ &= (\cos\alpha)\mathbf{i} + (\cos\beta)\mathbf{j} + (\cos\gamma)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Επομένως, οι συντεταγμένες του μοναδιαίου διανύσματος της κατεύθυνσης που ορίζεται από το $\mathbf{a}$ είναι $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ και λέγονται **συνημίτονα κατεύθυνσης** του $\mathbf{a}$.

Επιπλέον, ισχύει:

$$|\mathbf{OP}| = 1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Παράδειγμα 1. Να βρείτε τις κανονικές εξισώσεις της ευθείας ε που περνάει από το σημείο $\mathrm{P}_0(1,2,-3)$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\mathbf{a} = (2,-1,3)$.

Λύση. Σύμφωνα με τη εξισώσεις (4) έχουμε τις κανονικές εξισώσεις

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{3}.$$

Παράδειγμα 2. Δίνονται οι ευθείες

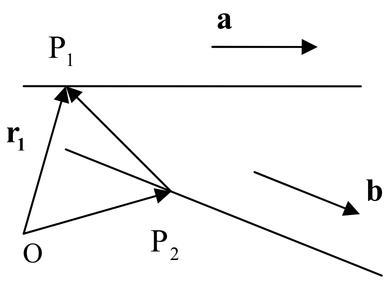
$$\varepsilon_1 : \mathbf{r} = \mathbf{r_1} + t\mathbf{a},\ t \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \varepsilon_2 : \mathbf{r} = \mathbf{r_2} + s\mathbf{b},\ s \in \mathbb{R},$$

όπου $\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. Να αποδείξετε ότι:

(i) $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ συνεπίπεδες $\Leftrightarrow (\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$.

(ii) $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ασύμβατες $\Leftrightarrow (\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) \neq 0$.

Απόδειξη.



Σχήμα 6. 3

(i) Έχουμε τις ισοδυναμίες:

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ συνεπίπεδες $\Leftrightarrow$ $\mathbf{P_2P_1}, \mathbf{a}, \mathbf{b}$ συνεπίπεδα $\Leftrightarrow (\mathbf{P_2P_1}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$

$\Leftrightarrow (\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$.

(ii) Έχουμε τις ισοδυναμίες:

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ασύμβατες $\Leftrightarrow$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ μη συνεπίπεδες $\Leftrightarrow$

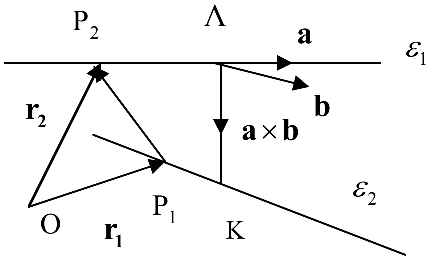
$\mathbf{P_2P_1}, \mathbf{a}, \mathbf{b}$ μη συνεπίπεδα $\Leftrightarrow (\mathbf{P_2P_1}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) \neq 0 \Leftrightarrow (\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) \neq 0$.

Παράδειγμα 3. Αν οι ευθείες

$$\varepsilon_1 : \mathbf{r} = \mathbf{r_1} + t\mathbf{a},\ t \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \varepsilon_2 : \mathbf{r} = \mathbf{r_2} + s\mathbf{b},\ s \in \mathbb{R},$$

όπου $\mathbf{a},\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$, είναι ασύμβατες, να αποδείξετε ότι η απόστασή τους, δηλαδή το μήκος του κοινού κάθετου τμήματος είναι:

$$d(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=\frac{|(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2,\mathbf{a},\mathbf{b})|}{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|}.$$



Σχήυα 6. 4

Λύση. Αν υποθέσουμε ότι ΚΛ είναι το κοινό κάθετο τμήμα των δύο ευθειών, τότε ένα γνωστό διάνυσμα παράλληλο με το διάνυσμα $\mathbf{K\Lambda}$ είναι το διάνυσμα $\mathbf{a}\times\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$ και ακόμη $d(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=|\mathbf{\Lambda K}|$. Έχουμε

$$\mathbf{P_2P_1}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot pr_{(\mathbf{a}\times\mathbf{b})}\mathbf{P_2P_1}$$

$$\Leftrightarrow(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\pm|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|\cdot|\mathbf{\Lambda K}|\Leftrightarrow d(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=|\mathbf{\Lambda K}|=\frac{|(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2,\mathbf{a},\mathbf{b})|}{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|}.$$

Παράδειγμα 4. Αφού αποδείξετε ότι οι ευθείες

$$\varepsilon_1: x-1=\frac{y-9}{-2}=z-5 \text{ και } \varepsilon_2:\frac{x-6}{7}=\frac{y+7}{-6}=z$$

είναι ασύμβατες, να βρείτε την ελάχιστη απόσταση καθώς και την εξίσωση της κοινής κάθετης αυτών.

Λύση. Σύμφωνα με το παράδειγμα 2 έχουμε:

$\varepsilon_1,\varepsilon_2$ ασύμβατες $\Leftrightarrow(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2,\mathbf{a},\mathbf{b})\neq 0$.

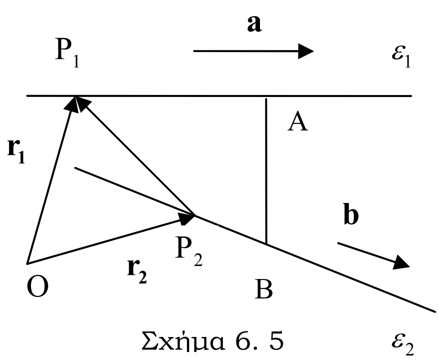
Από τα δεδομένα έχουμε: $\mathbf{r}_1=(1,9,5)$

$\mathbf{r}_2=(6,-7,0)$, $\mathbf{a}=(1,-2,1)$ και

$\mathbf{b}=(7,-6,1)$, οπότε $\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2=(-5,16,5)$

και

$$(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2,\mathbf{a},\mathbf{b})=\begin{vmatrix}-5&16&5\\1&-2&1\\7&-6&1\end{vmatrix}=116\neq 0.$$



Σχήμα 6. 5

Ο τύπος του παραδείγματος 3 δίνει την ελάχιστη απόσταση, όχι όμως και τα ίχνη της κοινής κάθετης των δύο ασύμβατων ευθειών. Για το λόγο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε μία διαδικασία με την οποία ταυτόχρονα αποδεικνύεται και η ύπαρξη του κοινού κάθετου τμήματος των δύο ασύμβατων ευθειών.

Το τυχόν σημείο της ε_1 είναι το $\mathrm{A}\left(1+t, 9-2t, 5+t\right), t \in \mathbb{R}$ και όμοια της ε_2 είναι το $\mathrm{B}\left(6+7s, -7-6s, s\right), s \in \mathbb{R}$, οπότε θα είναι

$$\mathbf{AB} = \left(5-t+7s, -16+2t-6s, -5-t+s\right).$$

Το AB είναι κοινό κάθετο τμήμα των ε_1 και ε_2, αν, και μόνον αν, ισχύουν

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{AB}\cdot\mathbf{a} = 0 \\ \mathbf{AB}\cdot\mathbf{b} = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3t-10s-16 = 0 \\ 10t-43s-63 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow t = 2, s = -1,$$

οπότε τα ίχνη της κοινής κάθετης πάνω στις ευθείες ε_1 και ε_2 είναι τα σημεία $\mathrm{A}\left(3,5,7\right)$ και $\mathrm{B}\left(-1,-1,-1\right)$. Επομένως η ελάχιστη απόσταση των ε_1 και ε_2, είναι

$$d\left(\varepsilon_1, \varepsilon_2\right) = \left|\mathbf{AB}\right| = \sqrt{\left(-1-3\right)^2 + \left(-1-5\right)^2 + \left(-1-7\right)^2} = 2\sqrt{29},$$

ενώ η εξίσωση της ευθείας του κοινού κάθετου τμήματος είναι η

$$\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\mathbf{A}}\right)\times\mathbf{u} = \mathbf{0}, \text{ όπου } \mathbf{u} = \mathbf{AB} = \left(-4,-6,-8\right) \text{ και } \mathbf{r}_{\mathbf{A}} = \left(3,5,7\right)$$

ή ισοδύναμα οι αναλυτικές εξισώσεις της είναι

$$\frac{x-3}{4} = \frac{y-5}{6} = \frac{z-7}{8}.$$

Παράδειγμα 5. (Η απόσταση δύο παράλληλων ευθειών).
Δίνονται οι παράλληλες ευθείες

$$\varepsilon_1 : \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a},\ t \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \varepsilon_2 : \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + s\mathbf{a},\ s \in \mathbb{R}.$$

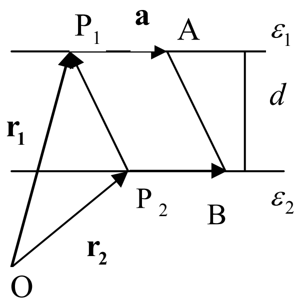
Να αποδείξετε ότι η απόσταση τους $d\left(\varepsilon_1, \varepsilon_2\right)$ δίνεται από τη σχέση

$$d\left(\varepsilon_1, \varepsilon_2\right) = \frac{\left|\left(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\right)\times\mathbf{a}\right|}{\left|\mathbf{a}\right|}.$$

Λύση. Έστω $Oxyz$ ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς τέτοιο, ώστε $\mathbf{OP}_1 = \mathbf{r}_1$ και $\mathbf{OP}_2 = \mathbf{r}_2$. Στη συνέχεια παίρνουμε σημεία $\mathrm{A} \in \varepsilon_1$ και $\mathrm{B} \in \varepsilon_2$ τέτοια, ώστε

$$\mathbf{P}_1\mathbf{A} = \mathbf{P}_2\mathbf{B} = \mathbf{a}$$

και θεωρούμε το εμβαδόν $\mathrm{E} = \left(\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{BA}\right)$ του παραλληλογράμμου $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{BA}$. Έχουμε



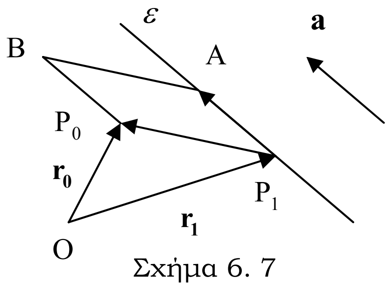
Σχήμα 6. 6

$$\mathrm{E} = \left|\mathbf{P_2P_1} \times \mathbf{a}\right| = \left|\left(\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}\right) \times \mathbf{a}\right|,$$

αλλά και $\mathrm{E} = |\mathbf{a}|\, d\left(\varepsilon_1, \varepsilon_2\right)$, οπότε από τις δύο προηγούμενες ισότητες προκύπτει και η ζητούμενη ισότητα.

Παράδειγμα 6. Η απόσταση σημείου από ευθεία του χώρου.
Δίνεται η ευθεία $\varepsilon : \mathbf{r} = \mathbf{r_1} + t\mathbf{a},\ t \in \mathbb{R}$ και σημείο P_0 με $\mathbf{OP_0} = \mathbf{r_0}$. Να αποδείξετε ότι η απόσταση $d = d\left(\mathrm{P}_0, \varepsilon\right)$ του σημείου P_0 από την ευθεία ε δίνεται από την ισότητα

$$d\left(\mathrm{P}_0, \varepsilon\right) = \frac{\left|\left(\mathbf{r_0} - \mathbf{r_1}\right) \times \mathbf{a}\right|}{|\mathbf{a}|}.$$



Σχήμα 6. 7

Λύση. Έστω P_1 είναι το σημείο της ευθείας ε με $\mathbf{OP_1} = \mathbf{r_1}$. Κατασκευάζουμε το παραλληλόγραμμο $\mathrm{P_0P_1AB}$ που ορίζεται από τα διανύσματα $\mathbf{a} = \mathbf{P_1A}$ και $\mathbf{P_1P_0} = \mathbf{r_0} - \mathbf{r_1}$. Τότε έχουμε

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{P_0P_1AB}\right) = \left|\left(\mathbf{r_0} - \mathbf{r_1}\right) \times \mathbf{a}\right|,$$

αλλά και την ισότητα $\mathrm{E}\left(\mathrm{P_0P_1AB}\right) = |\mathbf{a}|\, d\left(\mathrm{P}_0, \varepsilon\right)$, από τις οποίες προκύπτει η ζητούμενη ισότητα.

6. 3 Το επίπεδο

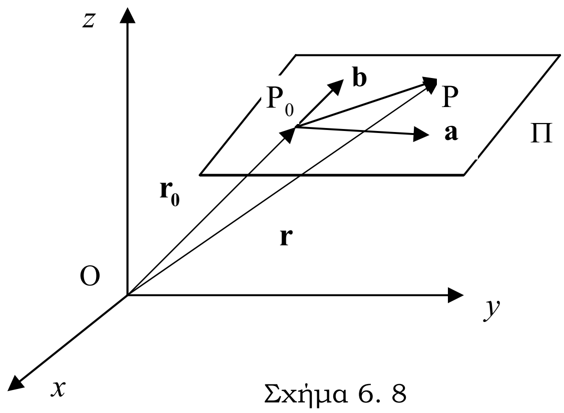
Το επίπεδο είναι η απλούστερη από τις επιφάνειες που θα μελετήσουμε και ορίζεται αξιωματικά στην Ευκλείδεια Γεωμετρία από τρία σημεία μη συνευθειακά. Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με τον προσδιορισμό διαφόρων μορφών εξισώσεων του επιπέδου, όταν δίνονται διάφορα στοιχεία που οδηγούν στον ορισμό κατά μοναδικό τρόπο ενός επιπέδου. Έτσι έχουμε τις περιπτώσεις κατά τις οποίες για ένα επίπεδο, έστω Π, δίνονται τα στοιχεία:

Ι. (α) *Ένα σημείο του* P_0 *και δύο μη μηδενικά μη συγγραμμικά διανύσματα* $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ *παράλληλα προς το επίπεδο Π.*

(β) *Δύο σημεία του* $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1$, *διαφορετικά μεταξύ τους, και ένα διάνυσμα* $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ *παράλληλο προς το Π έτσι, ώστε* $\mathbf{P_1P_2} \neq \lambda\mathbf{a}, \lambda \in \mathbb{R}$.

(γ) *Τρία σημεία του* $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$ *μη συνευθειακά.*

ΙΙ. *Ένα σημείο του* P_0 *και ένα διάνυσμα* $\mathbf{n} \perp \Pi$.



Σχήμα 6. 8

Ι. (α) Σύμφωνα με τα δεδομένα στοιχεία, αν θεωρήσουμε ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $Oxyz$, τότε έχουμε:

$$\mathrm{P} \in \Pi, \text{ με } \mathbf{OP} = \mathbf{r} \Leftrightarrow \mathbf{P_0P}, \mathbf{a}, \mathbf{b} \text{ συνεπίπεδα}$$

$$\Leftrightarrow \text{υπάρχουν } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ με } \mathbf{P_0P} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}$$

$$\Leftrightarrow \ \mathbf{r} = \mathbf{r_0} + \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \qquad (1)$$

η οποία είναι **η διανυσματική παραμετρική εξίσωση** του επιπέδου Π.

Επειδή τα διανύσματα $\mathbf{r} - \mathbf{r_0}, \mathbf{a}, \mathbf{b}$ είναι συνεπίπεδα, έχουμε την εξίσωση

$$\left(\mathbf{r} - \mathbf{r_0}, \mathbf{a}, \mathbf{b}\right) = 0, \qquad (2)$$

που είναι **η διανυσματική εξίσωση** του επιπέδου Π.

Αν υποθέσουμε ότι

$$\mathbf{OP_0} = \left(x_0, y_0, z_0\right), \mathbf{OP} = \left(x, y, z\right), \mathbf{a} = \left(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\right) \text{ και } \mathbf{b} = \left(\beta_1, \beta_2, \beta_3\right),$$

τότε από την (1) προκύπτουν **οι παραμετρικές εξισώσεις** του επιπέδου Π

$$\left\{\begin{array}{l} x = x_0 + \lambda\alpha_1 + \mu\beta_1 \\ y = y_0 + \lambda\alpha_2 + \mu\beta_2 \\ z = z_0 + \lambda\alpha_3 + \mu\beta_3 \end{array}\right\}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \qquad (3)$$

ενώ από τη (2) προκύπτει **η αναλυτική εξίσωση** του επιπέδου Π

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (4)$$

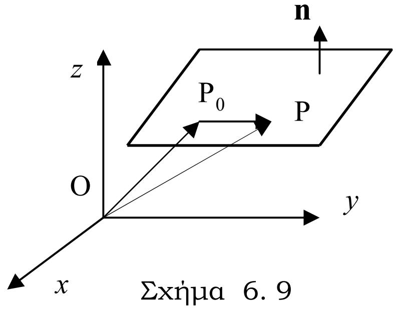
Η περίπτωση Ι(β) ανάγεται στην Ι(α), αν θεωρήσουμε $\mathbf{b} = \mathbf{P_0P_1}$, ενώ η περίπτωση Ι(γ) ανάγεται στην Ι(α), αν θεωρήσουμε $\mathbf{a} = \mathbf{P_0P_1}$ και $\mathbf{b} = \mathbf{P_0P_2}$.

ΙΙ. Έστω ότι δίνεται το σημείο $\mathrm{P}_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ του επιπέδου Π και το κάθετο του διάνυσμα $\mathbf{n} = \left(\alpha, \beta, \gamma\right) \neq \mathbf{0}$.

Αν $\mathrm{P}\left(x, y, z\right)$ είναι το τυχόν σημείο του επιπέδου Π με $\mathbf{OP} = \mathbf{r}$, τότε

$$\mathrm{P} \in \Pi \Leftrightarrow \mathbf{P_0P} \perp \mathbf{n}$$

$$\Leftrightarrow \left(\mathbf{r} - \mathbf{r_0}\right) \cdot \mathbf{n} = 0 \qquad (5)$$



Σχήμα 6. 9

η οποία είναι η **διανυσματική εξίσωση** του επιπέδου Π. Η εξίσωση (5) γράφεται και ως εξής:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{r_0} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \alpha x + \beta y + \gamma z - \left(\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma z + \Delta = 0\,, \qquad (6)$$

όπου $\mathrm{A} = \alpha, \mathrm{B} = \beta, \Gamma = \gamma$ και $\Delta = -\left(\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0\right)$.

Παρατήρηση. *Η περίπτωση Ι(α), άρα και οι Ι(β) και Ι(γ), ανάγεται στην περίπτωση (4), αν θεωρήσουμε* $\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$. *Έτσι, σε όλες τις περιπτώσεις, η καρτεσιανή εξίσωση του επιπέδου είναι της μορφής (6). Γενικότερα, ισχύει και το αντίστροφο που δίνεται από το θεώρημα που ακολουθεί.*

Θεώρημα 6. 3. 1 *Κάθε εξίσωση της μορφής*

$$\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma z + \Delta = 0, \quad \mu\varepsilon \ \left(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma\right) \neq \left(0,0,0\right)$$

είναι η καρτεσιανή εξίσωση επιπέδου με κάθετο διάνυσμα $\mathbf{n} = \left(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma\right)$.

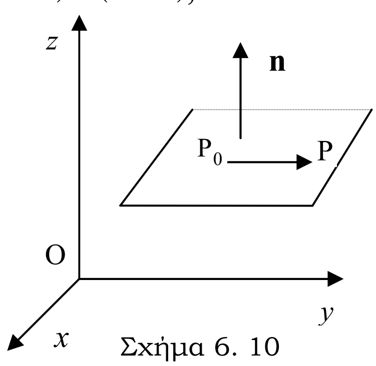
Απόδειξη. Θεωρούμε το σημειοσύνολο

$$\Pi = \left\{\left(x, y, z\right) : \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma z + \Delta = 0, \mu\varepsilon\left(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma\right) \neq \left(0,0,0\right)\right\}.$$

Θα αποδείξουμε ότι η γεωμετρική αναπαράσταση του συνόλου Π είναι ένα επίπεδο κάθετο προς το διάνυσμα $\mathbf{n} = \left(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma\right)$.

Έστω $\mathrm{P}_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ ένα σημείο του συνόλου Π, δηλαδή ένα σημείο που ικανοποιεί την εξίσωση

$$\mathrm{A}x_0 + \mathrm{B}y_0 + \Gamma z_0 + \Delta = 0\,. \qquad (7)$$



Σχήμα 6. 10

Θεωρούμε το τυχόν σημείο $\mathrm{P}(x,y,z)\in\Pi$, οπότε θα ισχύει η ισότητα

$$\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma z+\Delta=0 . \qquad (8)$$

Με αφαίρεση της (7) από την (8) λαμβάνουμε

$$\mathrm{A}(x-x_0)+\mathrm{B}(y-y_0)+\Gamma(z-z_0)=0$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{n}\cdot\mathbf{P_0P}=0 ,$$

από την οποία προκύπτει ότι το διάνυσμα $\mathbf{P_0P}$ είναι κάθετο προς το σταθερό διάνυσμα $\mathbf{n}=(\mathrm{A},\mathrm{B},\Gamma)$. Άρα το τυχόν σημείο του συνόλου Π βρίσκεται σε ευθεία κάθετη προς το φορέα του $\mathbf{n}$ στο δεδομένο σημείο P_0, οπότε τα σημεία του συνόλου Π ορίζουν το μοναδικό επίπεδο που είναι κάθετο προς το φορέα του $\mathbf{n}$ στο σημείο P_0. □

Διερεύνηση της εξίσωσης $\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma z+\Delta=0$, $(\mathrm{A},\mathrm{B},\Gamma)\neq(0,0,0)$.

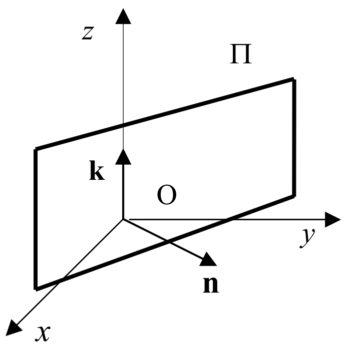
Επειδή είναι $(\mathrm{A},\mathrm{B},\Gamma)\neq(0,0,0)$, ένας τουλάχιστον από τους συντελεστές Α, Β και Γ είναι διάφορος του 0, οπότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

I. $\mathrm{A}\neq 0=\mathrm{B}=\Gamma$

Τότε η εξίσωση γίνεται $x=x_0$, όπου $x_0=-\Delta/\mathrm{A}$, ενώ το κάθετο διάνυσμα προς το επίπεδο Π είναι το $\mathbf{n}=(\mathrm{A},0,0)=\mathrm{A}(1,0,0)=\mathrm{A}\mathbf{i}$. Επομένως το επίπεδο Π είναι κάθετο προς τον άξονα $x'x$ στο σημείο του $(x_0,0,0)$.

Όμοια, η εξίσωση $y=y_0$ ορίζει επίπεδο κάθετο προς στον άξονα $y'y$ στο σημείο του $(0,y_0,0)$, ενώ η εξίσωση $z=z_0$ ορίζει επίπεδο κάθετο προς στον άξονα $z'z$ στο σημείο του $(0,0,z_0)$. Ειδικότερα, για τα επίπεδα συντεταγμένων έχουμε ότι:

$z=0$ ***είναι η εξίσωση του επιπέδου*** $\mathrm{O}xy$,
$y=0$ ***είναι η εξίσωση του επιπέδου*** $\mathrm{O}xz$,
$x=0$ ***είναι η εξίσωση του επιπέδου*** $\mathrm{O}yz$.



Σχήμα 6. 11

II. $\mathrm{AB}\neq 0=\Gamma$.

Είναι $\mathbf{n}=(\mathrm{A},\mathrm{B},0)=\mathrm{A}\mathbf{i}+\mathrm{B}\mathbf{j}$, οπότε ισχύει ότι $\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}=0$. Άρα το επίπεδο Π είναι παράλληλο προς τον άξονα $z'z$. Ομοίως, η εξίσωση

$$\mathrm{B}y+\Gamma z+\Delta=0$$

ορίζει επίπεδο παράλληλο προς τον άξονα

$x'x$, ενώ η εξίσωση $\mathrm{A}x+\Gamma z+\Delta=0$ ορίζει επίπεδο παράλληλο προς τον άξονα $y'y$.

III. $\Delta=0$.

Τότε η εξίσωση $\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma z=0$ ορίζει επίπεδο που περνάει από την αρχή $\mathrm{O}(0,0,0)$ των αξόνων.

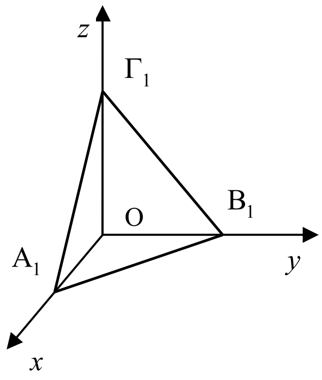
IV. $\mathrm{AB}\Gamma\Delta\neq 0$

Τότε η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=1, \qquad (9)$$

όπου $\alpha=-\Delta/\mathrm{A}, \beta=-\Delta/\mathrm{B}, \ \gamma=-\Delta/\Gamma$ είναι οι λεγόμενες **συντεταγμένες επί την αρχή** του επιπέδου Π. Η εξίσωση (9) λέγεται **κανονική εξίσωση** του επιπέδου Π και έχει το πλεονέκτημα ότι με αυτήν είναι εύκολη η σχεδίαση του επιπέδου Π, αφού τα σημεία τομής του με τους άξονες συντεταγμένων είναι τα

$\mathrm{A}_1(\alpha,0,0)$, $\mathrm{B}_1(0,\beta,0)$ και $\Gamma_1(0,0,\gamma)$.



Σχήμα 6. 12

Παράδειγμα 1. Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου Π που ορίζεται από

(α) Τα σημεία $\mathrm{A}_1(2,0,0)$, $\mathrm{B}_1(0,3,0)$ και $\Gamma_1(0,0,-1)$.

(β) Το σημείο $\mathrm{P}_0(1,-2,3)$ και είναι παράλληλο προς το επίπεδο

$$2x+y-4z-8=0.$$

(γ) Το σημείο $\mathrm{P}_0(1,-3,2)$ και είναι παράλληλο προς τις ευθείες

$$\varepsilon_1: \frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{2} \text{ και } \varepsilon_2: -x+1=y-3=z.$$

Λύση. (α) Οι αριθμοί 2, 3 και -1 είναι οι συντεταγμένες επί την αρχή του επιπέδου Π, οπότε η εξίσωσή του είναι

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{-1}=1 \Leftrightarrow 3x+2y-6z-6=0.$$

(β) Το επίπεδο $2x+y-4z-8=0$ έχει κάθετο διάνυσμα $\mathbf{n}=(2,1,-4)$, οπότε το $\mathbf{n}$ είναι κάθετο διάνυσμα και προς το επίπεδο Π. Άρα το επίπεδο Π έχει την εξίσωση

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r_0})\cdot\mathbf{n}=0 \Leftrightarrow ((x,y,z)-(1,-2,3))\cdot(2,1,-4)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1, y+2, z-3)\cdot(2,1,-4)=0$$
$$\Leftrightarrow 2x+y-4z+12=0.$$

(γ) Τα παράλληλα διανύσματα των ευθειών ε_1 και ε_2 είναι τα $\mathbf{a_1}=(2,3,2)$ και $\mathbf{a}_2=(-1,1,1)$, αντίστοιχα. Έτσι, τα διανύσματα $\mathbf{a_1}$ και $\mathbf{a_2}$ είναι παράλληλα προς το επίπεδο Π, οπότε η διανυσματική παραμετρική εξίσωσή του είναι

$$\mathbf{r}=\mathbf{r_0}+\lambda\mathbf{a_1}+\mu\mathbf{a_2},\lambda,\mu\in\mathbb{R},$$

όπου $\mathbf{r}_0=\mathbf{OP_0}=(x_0,y_0,z_0)=(1,-3,2)$.

Η καρτεσιανή εξίσωση του επιπέδου Π είναι

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z-2 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow (x-1)-4(y+3)+5(z-2)=0$$
$$\Leftrightarrow x-4y+5z-23=0\ .$$

Οι σχετικές θέσεις δύο επιπέδων

Θεωρούμε τα επίπεδα

$$\Pi_1 : \mathrm{A}_1x+\mathrm{B}_1y+\Gamma_1z+\Delta_1=0 \qquad (1)$$
$$\Pi_2 : \mathrm{A}_2x+\mathrm{B}_2y+\Gamma_2z+\Delta_2=0 \qquad (2)$$

με κάθετα διανύσματα $\mathbf{n_1}=(\mathrm{A}_1,\mathrm{B}_1,\Gamma_1)$ και $\mathbf{n_2}=(\mathrm{A}_2,\mathrm{B}_2,\Gamma_2)$, αντίστοιχα.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

Ι. $\mathbf{n_1}\parallel\mathbf{n_2}\Leftrightarrow\dfrac{\mathrm{A}_1}{\mathrm{A}_2}=\dfrac{\mathrm{B}_1}{\mathrm{B}_2}=\dfrac{\Gamma_1}{\Gamma_2}=\lambda\in\mathbb{R}$,

όπου όταν κάποιος παρανομαστής είναι 0, τότε και ο αντίστοιχος αριθμητής πρέπει να είναι 0. Τότε τα επίπεδα Π_1 και Π_2 έχουν το ίδιο κάθετο διάνυσμα, οπότε είναι παράλληλα ή συμπίπτουν. Αυτό εξαρτάται από το πλήθος των λύσεων του γραμμικού συστήματος των εξισώσεων (1) και (2). Αν υποθέσουμε ότι το σύστημα αυτό έχει μία λύση (x_0,y_0,z_0), τότε λαμβάνουμε

$$\lambda=\frac{\mathrm{A}_1x_0}{\mathrm{A}_2x_0}=\frac{\mathrm{B}_1y_0}{\mathrm{B}_2y_0}=\frac{\Gamma_1z_0}{\Gamma_2z_0}=\frac{\mathrm{A}_1x_0+\mathrm{B}_1y_0+\Gamma_1z_0}{\mathrm{A}_2x_0+\mathrm{B}_2y_0+\Gamma_2z_0}=\frac{-\Delta_1}{-\Delta_2}=\frac{\Delta_1}{\Delta_2}.$$

Άρα έχουμε την ισοδυναμία των εξισώσεων (1) και (2), αφού

$$\mathrm{A}_2x+\mathrm{B}_2y+\Gamma_2z+\Delta_2=0\Leftrightarrow\lambda(\mathrm{A}_2x+\mathrm{B}_2y+\Gamma_2z+\Delta_2)=0$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{A}_1x+\mathrm{B}_1y+\Gamma_1z+\Delta_1=0\ ,$$

δηλαδή τα επίπεδα Π_1 και Π_2 έχουν όλα τα σημεία τους κοινά, οπότε συμπίπτουν. Επομένως η συνθήκη $\lambda = \frac{\Delta_1}{\Delta_2}$ είναι αναγκαία και ικανή για να έχουν τα δύο επίπεδα ένα τουλάχιστον κοινό σημείο. Έτσι, αν υποθέσουμε ότι $\lambda \neq \frac{\Delta_1}{\Delta_2}$, τότε τα επίπεδα Π_1 και Π_2 δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, οπότε είναι παράλληλα.

Με τα παραπάνω έχουμε καταλήξει στις υποπεριπτώσεις:

I(α) ***Αν*** $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} = \frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \lambda \in \mathbb{R}$, ***τότε τα επίπεδα*** Π_1 και Π_2 ***συμπίπτουν.***

I(β) ***Αν*** $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} \neq \frac{\Delta_1}{\Delta_2}$, ***τότε τα επίπεδα*** Π_1, Π_2 ***είναι παράλληλα***.

II. Τα διανύσματα $\mathbf{n}_1$ και $\mathbf{n}_2$ είναι μη συγγραμμικά.

Τότε δύο τουλάχιστον από τους λόγους $\frac{A_1}{A_2}, \frac{B_1}{B_2}, \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}$ είναι διαφορετικοί μεταξύ τους. Αν είναι $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$, τότε το γραμμικό σύστημα των (1) και (2) με τις δύο εξισώσεις και τους τρεις αγνώστους γίνεται

$$\left\{\begin{array}{l} A_1x + B_1y = -\Gamma_1 z - \Delta_1 \\ A_2x + B_2y = -\Gamma_2 z - \Delta_2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} -\Gamma_1 z - \Delta_1 & B_1 \\ -\Gamma_2 z - \Delta_2 & B_2 \end{vmatrix}}{A_1B_2 - A_2B_1}, \; y = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & -\Gamma_1 z - \Delta_1 \\ A_2 & -\Gamma_2 z - \Delta_2 \end{vmatrix}}{A_1B_2 - A_2B_1},$$

οπότε λύνοντας τις δύο τελευταίες εξισώσεις ως προς z αυτό γίνεται τελικά ισοδύναμο με τις αναλυτικές εξισώσεις της ευθείας της τομής των δύο επιπέδων

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - 0}{1},$$

όπου οι παράμετροι x_0, y_0, α, β ορίζονται κατάλληλα μετά τις πράξεις.

Επομένως, αν τα διανύσματα $\mathbf{n}_1$ και $\mathbf{n}_2$ είναι μη συγγραμμικά, τότε τα επίπεδα Π_1 και Π_2 τέμνονται κατά μία ευθεία γραμμή.

Παράδειγμα 2. Να βρεθούν οι αναλυτικές και οι παραμετρικές εξισώσεις της τομής των επιπέδων

$$\Pi_1 : 6x + y - z + 2 = 0 \quad \text{και} \quad \Pi_2 : 2x - y + 3z - 14 = 0$$

Λύση (1ος τρόπος). Σύμφωνα με την περίπτωση ΙΙ, έχουμε

$$\begin{Bmatrix} 6x + y - z + 2 = 0 \\ 2x - y + 3z - 14 = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 6x + y = z - 2 \\ 2x - y = -3z + 14 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 8x = -2z + 12 \\ 4y = 10z - 44 \end{Bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \frac{8x - 12}{-2} = \frac{4y + 44}{10} = z \Leftrightarrow \frac{x - 3/2}{-1/4} = \frac{y + 11}{5/2} = \frac{z - 0}{1} \Leftrightarrow \frac{x - 3/2}{1} = \frac{y + 11}{-10} = \frac{z - 0}{-4}$$

οι οποίες είναι οι αναλυτικές εξισώσεις ευθείας που περνάει από το σημείο $A\left(\frac{3}{2}, -11, 0\right)$ και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\mathbf{a} = (1, -10, -4)$. Η ευθεία αυτή έχει παραμετρικές εξισώσεις:

$$x = \frac{3}{2} + t,\ y = -11 - 10t,\ z = -4t,\ t \in \mathbb{R}.$$

(2ος τρόπος). Αρκεί να προσδιορίσουμε ένα σημείο καθώς και το παράλληλο διάνυσμα της ευθείας της τομής των δύο επιπέδων.

Όπως είναι γνωστό από την Ευκλείδεια Γεωμετρία, η τομή δύο επιπέδων (αν υπάρχει) είναι κάθετη προς τα κάθετα διανύσματα $\mathbf{n_1}$ και $\mathbf{n_2}$ των δύο επιπέδων, οπότε είναι παράλληλη με το διάνυσμα

$$\mathbf{n_1} \times \mathbf{n_2} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 6 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} - 20\mathbf{j} - 8\mathbf{k}.$$

Για να βρούμε ένα σημείο της ευθείας της τομής δίνουμε μία αυθαίρετη τιμή σε έναν από τους αγνώστους, έστω $z = z_0$, και από τις δύο εξισώσεις των δεδομένων επιπέδων προσδιορίζουμε τα x_0, y_0, οπότε το σημείο (x_0, y_0, z_0) ανήκει στην ευθεία της τομής. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε z=0, τότε λαμβάνουμε

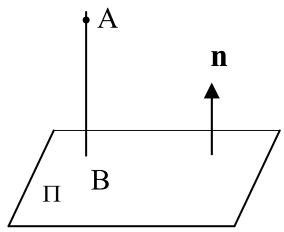
$$\begin{Bmatrix} 6x + y = -2 \\ 2x - y = 14 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = 3/2 \\ y = -11 \end{Bmatrix}.$$

Άρα το $A\left(\frac{3}{2},-11,0\right)$ είναι ένα σημείο της ευθείας της τομής των δύο επιπέδων, η οποία έχει πλέον αναλυτικές εξισώσεις

$$\frac{x-3/2}{2}=\frac{y+11}{-20}=\frac{z-0}{-8}\Leftrightarrow\frac{x-3/2}{1}=\frac{y+11}{-10}=\frac{z-0}{-4}.$$

Παράδειγμα 3. Να βρεθεί η ορθή προβολή του σημείου $A(2,-3,6)$ στο επίπεδο $\Pi:-3x+2y-z-10=0$.

Λύση. Αν B είναι η ορθή προβολή του σημείου A πάνω στο επίπεδο Π, τότε η ευθεία ε που ορίζεται από τα A και B έχει παράλληλο διάνυσμα το κάθετο διάνυσμα $\mathbf{n}=(-3,2,-1)$ του επιπέδου Π.



Σχήμα 6. 13

Επομένως η ευθεία ε έχει εξίσωση

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_{\mathbf{A}}+t\mathbf{n},t\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow(x,y,z)=(2,-3,6)+t(-3,2,-1),t\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow\{x=2-3t,y=-3+2t,z=6-t,t\in\mathbb{R}\}. \quad (1)$$

Για τον προσδιορισμό του B θα λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων της ευθείας ε και του επιπέδου Π. Έτσι αντικαθιστώντας τις παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας ε στην εξίσωση του επιπέδου Π, λαμβάνουμε:

$$-3(2-3t)+2(-3+2t)-(6-t)-10=0\Leftrightarrow 14t-28=0\Leftrightarrow t=2,$$

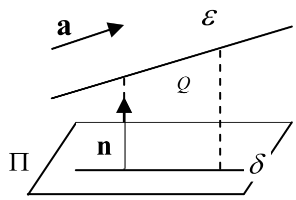
οπότε από τις (1) προκύπτει η λύση του συστήματος $(x,y,z)=(-4,1,4)$.

Επομένως είναι $B(-4,1,4)$.

Παράδειγμα 4. Να βρεθεί η προβολή της ευθείας $\varepsilon: x-1=\frac{y}{2}=z-3$ πάνω στο επίπεδο $\Pi: x-2y+3z-3=0$.

Λύση. Αν Q είναι το επίπεδο που ορίζεται από τη δεδομένη ευθεία ε και την προβολή της, έστω δ, πάνω στο επίπεδο Π, τότε θα είναι

$$\delta=\Pi\cap Q.$$



Σχήμα 6. 14

Ένα κάθετο διάνυσμα $\mathbf{u}$ προς το επίπεδο Q είναι κάθετο προς το $\mathbf{a}(1,2,1)$ (παράλληλο της ε), αλλά και προς το $\mathbf{n}=(1,-2,3)$, (κάθετο προς το επιπέδου Π).

Επομένως είναι

$$\mathbf{u}=\mathbf{a}\times\mathbf{n}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 3\end{vmatrix}=8\mathbf{i}-2\mathbf{j}-4\mathbf{k},$$

οπότε, αν $\mathbf{r_0}=\mathbf{OP_0}=(1,0,3)$ είναι το διάνυσμα θέσης του δεδομένου σημείου της ευθείας ε, άρα και του επιπέδου Q, η εξίσωση του επιπέδου Q είναι

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r_0})\cdot\mathbf{u}=0 \Leftrightarrow 4x-y-2z+2=0.$$

Επομένως έχουμε

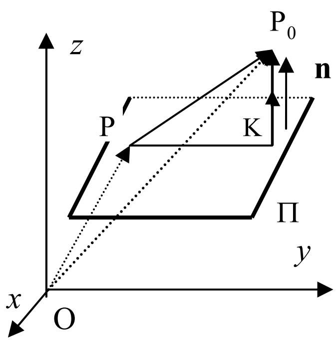
$$\delta:\begin{Bmatrix}x-2y+3z-3=0\\ 4x-y-2z+2=0\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}x-2y=-3z+3\\ 4x-y=2z-2\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}x=z-1\\ y=2z-2\end{Bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \delta: x+1=\frac{y+2}{2}=z.$$

Παράδειγμα 5. (Απόσταση σημείου από επίπεδο).

Θεωρούμε ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $Oxyz$, επίπεδο Π με εξίσωση $\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma z+\Delta=0$ και σημείο P_0 με $\mathbf{OP_0}=\mathbf{r_0}=(x_0,y_0,z_0)$ τέτοιο, ώστε $\mathrm{P}_0\notin\Pi$. Να αποδείξετε ότι η απόσταση $d=d(\mathrm{P}_0,\Pi)$ του σημείου P_0 από το επίπεδο Π δίνεται από την ισότητα

$$d(\mathrm{P}_0,\Pi)=\frac{|\mathrm{A}x_0+\mathrm{B}y_0+\Gamma z_0+\Delta|}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\Gamma^2}}.$$



Σχήμα 6. 15

Λύση. Έστω Κ το ίχνος της κάθετης από το σημείο P_0 προς το επίπεδο Π. Τότε είναι $d(\mathrm{P}_0,\Pi)=|\mathbf{P_0K}|$. Θεωρούμε τυχόν σημείο Ρ του επιπέδου Π με διάνυσμα θέσης

$$\mathbf{OP}=\mathbf{r}=(x,y,z)$$

και το κάθετο διάνυσμα $\mathbf{n}=(\mathrm{A},\mathrm{B},\Gamma)$ του επιπέδου Π. Τότε έχουμε:

$$\mathbf{P_0P}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{n}\cdot pr_{\mathbf{n}}(\mathbf{P_0P})=\mathbf{n}\cdot\mathbf{P_0K}\Leftrightarrow(\mathbf{r}-\mathbf{r_0})\cdot\mathbf{n}=\pm|\mathbf{n}||\mathbf{P_0K}|\Leftrightarrow|(\mathbf{r}-\mathbf{r_0})\cdot\mathbf{n}|=d|\mathbf{n}|$$

$$\boxed{\Leftrightarrow d=\frac{|(\mathbf{r}-\mathbf{r_0})\cdot\mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|}=\frac{|\mathrm{A}x_0+\mathrm{B}y_0+\Gamma z_0+\Delta|}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\Gamma^2}}.}$$

Δέσμες επιπέδων

Ορισμός 6. 3. 1 ***Αξονική δέσμη*** *επιπέδων είναι το σύνολο των επιπέδων που διέρχονται από την ίδια ευθεία ε , η οποία λέγεται άξονας της δέσμης.*

Αν $\Pi_i : \mathrm{A}_i x + \mathrm{B}_i y + \Gamma_i z + \Delta_i = 0,\ i = 1,2$ είναι δύο επίπεδα που έχουν τομή μία ευθεία ε, τότε αυτά ορίζουν μία αξονική δέσμη επιπέδων με άξονα την ευθεία ε και εξίσωση

$$\lambda_1\left(\mathrm{A}_1 x + \mathrm{B}_1 y + \Gamma_1 z + \Delta_1\right) + \lambda_2\left(\mathrm{A}_2 x + \mathrm{B}_2 y + \Gamma_2 z + \Delta_2\right) = 0, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Ορισμός 6. 3. 2 ***Κεντρική δέσμη*** *επιπέδων, λέγεται το σύνολο των επιπέδων που διέρχονται από ένα σταθερό σημείο, το οποίο λέγεται* ***κέντρο*** *της δέσμης.*

Αν $\Pi_i : \mathrm{A}_i x + \mathrm{B}_i y + \Gamma_i z + \Delta_i = 0,\ i = 1,2,3$ είναι τρία διαφορετικά επίπεδα που διέρχονται από το ίδιο σημείο $\mathrm{P}_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$, τότε αυτά ορίζουν κεντρική δέσμη επιπέδων με εξίσωση

$$\sum_{i=1}^{3} \lambda_i\left(\mathrm{A}_i x + \mathrm{B}_i y + \Gamma_i z + \Delta_i\right) = 0, \text{ με } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}.$$

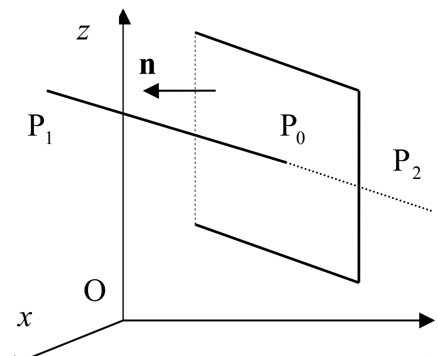
Μελέτη ανισοτήτων $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma z + \Delta > 0$, $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma z + \Delta < 0$.

Θεωρούμε επίπεδο Π με εξίσωση:

$$\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma z + \Delta = 0.$$

Αν $\mathrm{P}_1\left(x_1, y_1, z_1\right)$ και $\mathrm{P}_2\left(x_2, y_2, z_2\right)$ είναι δύο τυχαία σημεία του χώρου με $\mathbf{P_1P_2} \cdot \mathbf{n} \neq 0$, τότε η ευθεία που ορίζεται από τα σημεία P_1 και P_2 τέμνει το επίπεδο Π σε σημείο $\mathrm{P}_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ για το οποίο υποθέτουμε ότι ισχύει:

$$\mathbf{P_1P_0} = \lambda \mathbf{P_0P_2}, \lambda \neq -1.$$



Σχήμα 6. 16

Τότε κατά τα γνωστά από το Κεφάλαιο 4 έχουμε

$$\mathbf{OP_0} = \frac{1}{1+\lambda}\left(\mathbf{OP_1} + \lambda \mathbf{OP_2}\right)$$

και το σημείο P_0 έχει συντεταγμένες $\left(x_0, y_0, z_0\right)$, που δίνονται από τις ισότητες:

$$x_0=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\ ,\ y_0=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\ \text{και}\ z_0=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Επειδή $\mathrm{P}\in\Pi$, έπεται ότι

$$\mathrm{A}\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\right)+\mathrm{B}\left(\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right)+\Gamma\left(\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right)+\Delta=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\mathrm{A}x_1+\mathrm{B}y_1+\Gamma z_1+\Delta\right)+\lambda\left(\mathrm{A}x_2+\mathrm{B}y_2+\Gamma z_2+\Delta\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \lambda=-\frac{\mathrm{A}x_1+\mathrm{B}y_1+\Gamma z_1+\Delta}{\mathrm{A}x_2+\mathrm{B}y_2+\Gamma z_2+\Delta},\ \text{αν}\ \mathrm{P}_2\notin\Pi.$$

Αν υποθέσουμε ότι $\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2\notin\Pi$, τότε από την τελευταία ισότητα προκύπτουν:

- Τα σημεία $\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2$ βρίσκονται στον έναν από τους δύο ημίχωρους που ορίζει το επίπεδο Π, αν, και μόνον αν, $\lambda<0$ ή ισοδύναμα, αν είναι ομόσημοι οι αριθμοί
$$\mathrm{A}x_1+\mathrm{B}y_1+\Gamma z_1+\Delta,\qquad \mathrm{A}x_2+\mathrm{B}y_2+\Gamma z_2+\Delta.$$
- Τα σημεία $\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2$ βρίσκονται σε διαφορετικούς ημίχωρους ως προς το επίπεδο Π, αν, και μόνον αν, $\lambda>0$ ή ισοδύναμα, αν είναι ετερόσημοι οι αριθμοί
$$\mathrm{A}x_1+\mathrm{B}y_1+\Gamma z_1+\Delta,\qquad \mathrm{A}x_2+\mathrm{B}y_2+\Gamma z_2+\Delta.$$

Έτσι καταλήγουμε στο συμπέρασμα:

Κάθε επίπεδο Π*:* $\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma z+\Delta=0$, *διαμερίζει τον χώρο σε τρία υποσύνολα της μορφής:*

$\Pi^+:=\{(x,y,z):\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma z+\Delta>0\}$ ***(θετικός ημίχωρος)***

$\Pi^-:=\{(x,y,z):\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma z+\Delta<0\}$ ***(αρνητικός ημίχωρος)***

$\Pi:=\{(x,y,z):\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma z+\Delta=0\}$ ***(επίπεδο Π)***

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Αν O, P και Q είναι τρία μη συνευθειακά σημεία τέτοια, ώστε $\mathbf{OP} = \mathbf{p}$ και $\mathbf{OQ} = \mathbf{q}$, να περιγραφεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M του χώρου με διάνυσμα θέσης $\mathbf{OM} = \mathbf{r}$ ως προς το O, στις περιπτώσεις:
(i) $\mathbf{r} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{q}) = 0$, **(ii)** $|\mathbf{r} - \mathbf{p}| = |\mathbf{q} - \mathbf{p}|$, **(iii)** $(\mathbf{r} - \mathbf{p}) \times (\mathbf{q} - \mathbf{p}) = \mathbf{0}$.

2. Δίνονται οι ευθείες

$$\varepsilon_1 : \mathbf{r} \times \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad \text{και} \quad \varepsilon_2 : (\mathbf{r} - \mathbf{r_0}) \times \mathbf{b} = \mathbf{0}, \text{ όπου } \mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq \mathbf{0}.$$

(i) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 έχουν ένα κοινό σημείο, αν, και μόνον αν, $\mathbf{r_0} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$.

(ii) Αν $\mathbf{a} = (2,0,1)$, $\mathbf{b} = (2,-2,-1)$ και $\mathbf{r_0} = (1,1,0)$ να αποδείξετε ότι $\mathbf{r_0} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \neq 0$ και να βρείτε σημεία $P \in \varepsilon_1$ και $Q \in \varepsilon_2$ έτσι, ώστε η ευθεία PQ να είναι κάθετη προς τις ευθείες ε_1 και ε_2.

3. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες

$$\varepsilon_1 : x - 3 = 0, y + 2z = 10 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2 : \frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{2}$$

είναι ασύμβατες και να προσδιορίσετε τα ίχνη και το μήκος της κοινής κάθετης αυτών.

4. Να βρεθεί η ελάχιστη απόσταση των ευθειών

$$\varepsilon_1 : \mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda \mathbf{i} \quad \text{και} \quad \varepsilon_2 : \mathbf{r} = \mathbf{b} + \mu(\mathbf{j} + \mathbf{k}), \ \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

αν είναι $\mathbf{a} = (1,1,0)$ και $\mathbf{b} = (0,-2,3)$.

5. Θεωρούμε το σημείο $A(1,0,2)$ και τις ευθείες

$$\varepsilon_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4} \quad \text{και} \quad \varepsilon_2 : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{2} = z.$$

(i) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι ασύμβατες.

(ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνάει από το σημείο A και τέμνει τις ε_1 και ε_2.

6. Να βρείτε το ίχνος της κάθετης από σημείο $A(1,0,-1)$ προς την ευθεία

$$\varepsilon : x - 3 = \frac{y-4}{3} = \frac{z-2}{-1}.$$

7. Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου Π που ορίζεται από

(i) το σημείο $\mathrm{A}(1,2,3)$ και είναι παράλληλο προς το επίπεδο: $y-z=0$,

(ii) τα σημεία $\mathrm{A}(2,0,0), \mathrm{B}(0,3,0)$ και $\Gamma(0,0,4)$,

(iii) το σημείο $\mathrm{A}(1,-1,0)$ και είναι κάθετο προς τα επίπεδα:

$$\Pi_1 : x+y+z=0 \text{ και } \Pi_2 : 2x+3y+4z-12=0 .$$

8. Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που περιέχει την τομή των επιπέδων $\Pi_1 : 7x+z-6=0$, $\Pi_2 : 17x+y-18=0$ καθώς και το σημείο $\mathrm{A}(1,2,2)$.

9. Τα σημεία A, B έχουν διάνυσμα θέσης $\mathbf{a}, \mathbf{a}+\mathbf{b}$, αντίστοιχα, ως προς την αρχή O. Δίνεται ότι η ευθεία

$$\varepsilon : \mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda\mathbf{u}, \lambda \in \mathbb{R}, |\mathbf{u}| = 1$$

τέμνει το επίπεδο που περνάει από το σημείο B και είναι κάθετο στο $\mathbf{n}$, με $|\mathbf{n}|=1$. Να αποδείξετε ότι η τιμή του λ που αντιστοιχεί στο σημείο τομής είναι ίση προς

$$\frac{|\mathbf{b}|\cos\left(\widehat{\mathbf{b},\mathbf{n}}\right)}{\cos\left(\widehat{\mathbf{u},\mathbf{n}}\right)}.$$

10. Να βρεθεί η διανυσματική εξίσωση του επιπέδου

(i) που περιέχει τις ευθείες $\varepsilon_1 : \mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$ και $\varepsilon_2 : \mathbf{r} = \mathbf{c} + \mu\mathbf{b}$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, όπου $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ είναι δεδομένα διανύσματα,

(ii) που περιέχει την ευθεία $\varepsilon : \mathbf{r} = \lambda\mathbf{a}, \lambda \in \mathbb{R}$ και είναι κάθετο προς το επίπεδο που ορίζεται από τις ευθείες

$$\varepsilon_1 : \mathbf{r} = \lambda\mathbf{a},\ \varepsilon_2 : \mathbf{r} = \mu\mathbf{b}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \mathbf{a}\times\mathbf{b} \neq \mathbf{0} .$$

11. Να βρεθεί η διανυσματική εξίσωση της τομής των επιπέδων

$$\Pi_1 : (\mathbf{r}-\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} = 0 \text{ και } \Pi_2 : (\mathbf{r}-\mathbf{a})\cdot\mathbf{c} = 0, \text{ με } \mathbf{b}\times\mathbf{c} \neq \mathbf{0} .$$

12. Να αποδείξετε ότι η διανυσματική εξίσωση $\mathbf{r} = \mathbf{r_0} + \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, επιπέδου Π, μπορεί να γραφεί στη μορφή $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} = \alpha$ και να προσδιορίσετε τα $\mathbf{n}$ και α σε συνάρτηση των $\mathbf{r_0}, \mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$.

13. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon : (\mathbf{r}-\mathbf{a})\times\mathbf{n} = \mathbf{0}$.

(i) Ποια είναι η γεωμετρική ερμηνεία των $\mathbf{a}$ και $\mathbf{n}$;

(ii) Αν η ευθεία ε είναι η τομή των επιπέδων

$$\Pi_1 : x+y+z-1=0 \text{ και } \Pi_2 : 4x-3y-z+1=0 ,$$

να βρείτε τα $\mathbf{a}$, $\mathbf{n}$ και να εξηγήσετε γιατί δεν είναι μοναδικά.

14. Το επίπεδο Π_1 έχει κάθετο διάνυσμα $\mathbf{n} = (2,1,1)$ και περνάει από το σημείο $A(-1,1,2)$. Το επίπεδο Π_2 έχει εξίσωση $\mathbf{r} \cdot (\mathbf{i} + \mathbf{j}) = 1$.

(i) Να βρεθεί η οξεία γωνία των επιπέδων Π_1 και Π_2.

(ii) Αφού επαληθεύσετε ότι το σημείο $M(0,1,0)$ ανήκει και στα δύο επίπεδα, να βρείτε την εξίσωση της τομής των Π_1 και Π_2.

(iii) Να βρεθεί σημείο B της τομής των Π_1 και Π_2 έτσι, ώστε η ευθεία της τομής και η ευθεία AB να είναι κάθετες.

15. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E της ορθογώνιας προβολής του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ με $\mathbf{AB} = \mathbf{u}$, $\mathbf{A\Delta} = \mathbf{v}$ πάνω σε ένα επίπεδο με μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα $\mathbf{n}$, δίνεται από την ισότητα

$$E = \left|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}\right|.$$