ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ια –ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
Συμπληρωματικά παραδείγματα στον υπολογισμό αόριστων ολοκληρωμάτων άρρητων συναρτήσεων .

Παράδειγμα 1

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\mathrm{I}=\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}},\ x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

Λύση

Εργαζόμαστε πρώτα στο διάστημα $[1,+\infty)$.

Μία βασική μέθοδος υπολογισμού αόριστων ολοκληρωμάτων της μορφής $\int R\left(x,\sqrt{x^2-1}\right)dx$, όπου R ρητή συνάρτηση των μεταβλητών της, είναι αυτή που χρησιμοποιεί τον μετασχηματισμό:

$$t=\varphi(x)=x+\sqrt{x^2-1},x\ge 1,$$

όπου η συνάρτηση $\varphi(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$, αφού είναι $\varphi'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}>0,$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$. Είναι αναγκαίο για τις αντικαταστάσεις να βρούμε την αντίστροφη συνάρτηση της $\varphi(x)$. Έχουμε σχετικά:

$$\begin{aligned}
t=\varphi(x)=x+\sqrt{x^2-1},x\ge 1 &\Leftrightarrow t-x=\sqrt{x^2-1},x\ge 1\\
&\Leftrightarrow t^2-2tx+x^2=x^2-1,x\ge 1,t\ge x\\
&\Leftrightarrow x=\frac{t^2+1}{2t},\text{με } \frac{t^2+1}{2t}\ge 1 \text{ και } t\ge\frac{t^2+1}{2t}\\
&\Leftrightarrow x=\frac{t^2+1}{2t},\text{με } \frac{(t-1)^2}{2t}\ge 0 \text{ και } \frac{t^2-1}{2t}\ge 0\\
&\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right),\ t\ge 1.
\end{aligned}$$

Επιπλέον έχουμε

$$dx=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)dt=\frac{t^2-1}{2t^2}dt \quad \text{και} \quad \sqrt{x^2-1}=t-\frac{t^2+1}{2t}=\frac{t^2-1}{2t},$$

οπότε θα είναι

$$\mathrm{I}=\int\frac{\frac{t^2-1}{2t^2}dt}{\frac{t^2+1}{2t}-\frac{t^2-1}{2t}}=\int\frac{t^2-1}{2t}dt=\frac{1}{2}\int\left(t-\frac{1}{t}\right)dt=\frac{t^2}{4}-\frac{1}{2}\ln t+c,\ t\in[1,+\infty).$$

Άρα έχουμε:

$$\mathrm{I}=\frac{1}{4}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2-\frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+c,x\ge 1. \tag{1}$$

Στη συνέχεια θεωρούμε $x\in(-\infty,-1]$. Τώρα έχοντας κατά νου να μπορέσουμε χρησιμοποιήσουμε ξανά τον προηγούμενο μετασχηματισμό, εκτελούμε πρώτα το μετασχηματισμό

$$y=-x,x\le -1\Leftrightarrow x=-y,y\ge 1,$$

ο οποίος οδηγεί στο ολοκλήρωμα

$$\mathrm{I}=\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}=\int \frac{-dy}{-y-\sqrt{y^2-1}}=\int \frac{dy}{y+\sqrt{y^2-1}},\ y\in[1,+\infty).$$

Έτσι χρησιμοποιώντας τον προηγούμενο μετασχηματισμό

$$t=\varphi(y)=y+\sqrt{y^2-1}, x\geq 1 \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right),\ t\geq 1,$$

με $dy=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)dt=\frac{t^2-1}{2t^2}dt$ και $\sqrt{y^2-1}=t-\frac{t^2+1}{2t}=\frac{t^2-1}{2t}$, λαμβάνουμε

$$\mathrm{I}=\int \frac{dy}{y+\sqrt{y^2-1}}=\int \frac{t^2-1}{2t^3}dt=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t^3}\right)dt=\frac{1}{2}\ln t+\frac{1}{4}t^{-2},\ t\in[1,+\infty).$$

Άρα έχουμε

$$\mathrm{I}=\frac{1}{2}\ln\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)+\frac{1}{4}\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)^{-2},\ y\in[1,+\infty)$$

$$\Rightarrow \mathrm{I}=\frac{1}{2}\ln\left(-x+\sqrt{x^2-1}\right)+\frac{1}{4}\left(-x+\sqrt{x^2-1}\right)^{-2}, x\in(-\infty,-1]$$

$$\Rightarrow \mathrm{I}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{-x-\sqrt{x^2-1}}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{-x-\sqrt{x^2-1}}\right)^{-2}, x\in(-\infty,-1]$$

$$\Rightarrow \mathrm{I}=-\frac{1}{2}\ln\left(-x-\sqrt{x^2-1}\right)+\frac{1}{4}\left(-x-\sqrt{x^2-1}\right)^{2}+c, x\in(-\infty,-1] \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) μπορούμε να γράψουμε σε ενιαία μορφή τις δύο περιπτώσεις ως εξής:

$$\mathrm{I}=\frac{1}{4}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2-\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+c, x\in(-\infty,1]\cup[1,+\infty).$$

Δεύτερος τρόπος.

Για την περίπτωση με $x\in[1,+\infty)$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ο μετασχηματισμός:

$$x=\frac{1}{\cos\theta}, 0\leq\theta<\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \theta=\arccos\frac{1}{x}, x\geq 1$$

Έτσι καταλήγουμε στο ολοκλήρωμα

$$\mathrm{I}=\int\frac{\tan\theta}{1-\sin\theta}d\theta,\ \theta\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right),$$

τριγωνομετρικής συνάρτησης, το οποίο για να υπολογιστεί απαιτεί το μετασχηματισμό

$$t=\tan\frac{\theta}{2}, 0\leq\theta<\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \theta=2\arctan t, 0\leq t<1,$$

ο οποίος οδηγεί σε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης

$$\mathrm{I}=-4\int\frac{t}{(t+1)(t-1)^3}dt,$$

η οποία πρέπει να αναλυθεί σε άθροισμα απλών κλασμάτων. Είναι φανερό ότι η μέθοδος αυτή οδηγεί τελικά σε πολύ δυσκολότερους υπολογισμούς σε σχέση με τη πρώτη μέθοδο που χρησιμοποιήσαμε.

Για την περίπτωση με $x\in(-\infty,-1]$ ο μετασχηματισμός γίνεται

$$x=-\frac{1}{\cos\theta},0\le\theta<\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\theta=\arccos\left(-\frac{1}{x}\right),\ x\le -1.$$

Παράδειγμα 2

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\mathrm{I}=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}, x\in(-1,0)\cup(0,1)$

Λύση

Εργαζόμαστε πρώτα στο διάστημα $(0,1)$.

Μία βασική μέθοδος υπολογισμού αόριστων ολοκληρωμάτων της μορφής $\int R\left(x,\sqrt{1-x^2}\right)dx$, όπου R ρητή συνάρτηση των μεταβλητών της, είναι αυτή που χρησιμοποιεί τον μετασχηματισμό:

$$\sqrt{1-x^2}=1-tx,\ 0<x<1\Leftrightarrow t=\varphi(x)=\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x},$$

όπου η συνάρτηση $\varphi(x)$ είναι αντιστρέψιμη, όπως προκύπτει από τις ισοδυναμίες που ακολουθούν:

$$\begin{aligned}
t=\varphi(x)=\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}&\Leftrightarrow\sqrt{1-x^2}=1-tx,\ 0<x<1\\
&\Leftrightarrow 1-x^2=1-2tx+t^2x^2,\ 0<x<1,\ 1-tx>0\\
&\Leftrightarrow x\left(x-2t+t^2x\right)=0,\ 0<x<1,\ 1-tx>0\\
&\Leftrightarrow x=\frac{2t}{t^2+1},\ 0<\frac{2t}{t^2+1}<1,\ 1-\frac{2t^2}{t^2+1}>0\\
&\Leftrightarrow x=\frac{2t}{t^2+1},\ \ t>0,\ \frac{1-t^2}{t^2+1}>0\\
&\Leftrightarrow x=\frac{2t}{t^2+1},\ \ 0<t<1.
\end{aligned}$$

Έτσι έχουμε

$$dx=\frac{2\left(1-t^2\right)}{\left(t^2+1\right)^2}dt\quad\text{και}\quad\sqrt{1-x^2}=1-t\cdot\frac{2t}{t^2+1}=\frac{1-t^2}{t^2+1}.$$

Μετά τις αντικαταστάσεις το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\mathrm{I}=\frac{1}{2}\int\frac{t^2+1}{t^2}dt=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)+c,0<t<1$$

$$\Rightarrow\mathrm{I}=\frac{1}{2}\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}-\frac{x}{1-\sqrt{1-x^2}}\right)+c=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+c,\ 0<x<1.$$

Για την περίπτωση που είναι $x\in(-1,0)$ θέτουμε πρώτα

$$y=-x,-1<x<0\Leftrightarrow x=-y,0<y<1$$

και στη συνέχεια εργαζόμαστε με το μετασχηματισμό που χρησιμοποιήσαμε στην πρώτη περίπτωση. Έτσι λαμβάνουμε

$$\mathrm{I}=\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}=-\int \frac{dy}{y^2\sqrt{1-y^2}} \quad y\in(0,1)$$

$$\Rightarrow \mathrm{I}=-\int \frac{dy}{y^2\sqrt{1-y^2}}=-\left(-\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}\right)=\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}. \quad y\in(0,1)$$

$$\mathrm{I}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x},\ -1<x<0.$$

Επομένως έχουμε

$$\mathrm{I}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+c,\ x\in(-1,0)\cup(0,1).$$

Δεύτερος τρόπος

Χρησιμοποιούμε το μετασχηματισμό

$$x=\sin\theta,\ \ \theta\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow \theta=\arcsin x,\ \ x\in(-1,0)\cup(0,1).$$

Τότε είναι $dx=(\cos\theta)\,d\theta$ και μετά τις αντικαταστάσεις το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\mathrm{I}=\int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}}d\theta=\int \frac{d\theta}{\sin^2\theta}=-\cot\theta+c$$

$$\Rightarrow \mathrm{I}=-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+c=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+c, x\in(-1,0)\cup(0,1).$$