ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Στη Φυσική εμφανίζονται πολλά μεγέθη, όπως μετατοπίσεις, ταχύτητες, ροπές, δυνάμεις, τα οποία για να προσδιοριστούν πλήρως δεν αρκεί μόνο να είναι γνωστό το μέτρο τους, αλλά πρέπει να είναι γνωστή και η κατεύθυνσή τους, δηλαδή η διεύθυνση και η φορά τους. Τέτοιου είδους μεγέθη χαρακτηρίζονται ως **διανυσματικά**.

Όμως και χωρίς γνώσεις Φυσικής είναι εύκολο να αντιληφθούμε ότι ένας τυχαίος περίπατος πάνω σε ευθεία γραμμή (διεύθυνση) μεταξύ δύο σημείων A και B αυτής μπορεί να περιγραφεί με το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AB (μέτρο) και από τα σημεία εκκίνησης και άφιξης (φορά διαγραφής).

Έτσι από μαθηματικής πλευράς τίθεται το πρόβλημα της εισαγωγής ενός συστήματος μαθηματικών αντικειμένων, που θα είναι τα κατάλληλα μοντέλα για τα διανυσματικά μεγέθη που εμφανίζονται στη Φυσική. Το πρόβλημα αυτό οδηγεί κατ' αρχήν στη θεώρηση των γεωμετρικών διανυσμάτων και στη συνέχεια στη θεώρηση των αλγεβρικών διανυσμάτων, όπως οι διατεταγμένες τριάδες πραγματικών αριθμών.

Όπως ξέρουμε από τη Φυσική, σε κάθε δύο δυνάμεις που εξασκούνται σε ένα σώμα, αντιστοιχίζεται μία δύναμη, η συνισταμένη τους, που επιφέρει τα ίδια αποτελέσματα με τις δύο προηγούμενες δυνάμεις. Το γεγονός αυτό μας οδηγεί στην εισαγωγή αλγεβρικής δομής στο σύνολο των γεωμετρικών διανυσμάτων, το οποίο γίνεται έτσι **διανυσματικός χώρος.**

Επιπλέον, υπάρχουν πολλά μαθηματικά προβλήματα που έχουν την ιδιότητα για κάθε δύο λύσεις τους, έστω f και g, η συνάρτηση

$$\lambda f + \mu g,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

είναι επίσης λύση. Τέτοια προβλήματα λέγονται γραμμικά και λύνονται συνήθως πολύ πιο εύκολα από τα προβλήματα που δεν έχουν την εν λόγω ιδιότητα. Αξιοσημείωτο είναι ακόμη το ότι πολλά προβλήματα που προκύπτουν από τις διάφορες εφαρμογές είναι γραμμικά, όπως προβλήματα θεωρίας δυναμικού, θερμότητας και ταλαντώσεων μηχανικών συστημάτων μικρού πλάτους, ενώ άλλα προβλήματα θεωρούνται κατά προσέγγιση γραμμικά για να επιλύονται ευκολότερα, όπως στην περίπτωση των ταλαντώσεων του απλού εκκρεμούς.

Στα επόμενα θα ασχοληθούμε διεξοδικά με τις παραπάνω έννοιες.

4.1 Ο διανυσματικός χώρος Δ^3

Στα επόμενα θεωρούμε γνωστές τις πρωταρχικές έννοιες της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, όπως την έννοια της ευθείας, του επιπέδου, της παραλληλίας, του μήκους ευθυγράμμου τμήματος κ.λ.π.

Στο σύνολο E των ευθειών του χώρου θεωρούμε τη σχέση σ:

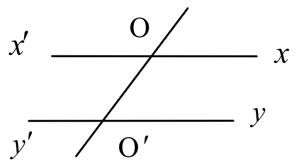
$$\varepsilon_1 \sigma \varepsilon_2 \Leftrightarrow \varepsilon_1 \equiv \varepsilon_2 \text{ ή } \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 .$$

Είναι φανερό ότι η σ είναι σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο E και ότι κάθε κλάση ισοδυναμίας του E ως προς τη σχέση σ περιέχει ευθείες που είναι παράλληλες μεταξύ τους. Επιπλέον, όταν δοθεί μία ευθεία ε στο χώρο, τότε η κλάση ισοδυναμίας που περιέχει την ε αποτελείται από την ε και όλες τις ευθείες που είναι παράλληλες προς αυτήν.

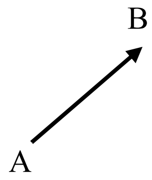
Κάθε στοιχείο του συνόλου E/σ των κλάσεων ισοδυναμίας λέγεται **διεύθυνση** ή λέμε ότι ορίζει μία διεύθυνση.

Θεωρούμε στη συνέχεια τυχούσα ευθεία $x'x$ μιας διεύθυνσης και ένα σταθερό σημείο Ο πάνω σε αυτή. Τότε ορίζονται δύο ημιευθείες $\mathrm{O}x$ και $\mathrm{O}x'$ που η ένωσή τους είναι η $x'x$. Ορίζουμε τη μία από τις δύο ημιευθείες, έστω την $\mathrm{O}x$, ως **θετική** ή ως **ημιευθεία θετικής φοράς**, οπότε πλέον η $\mathrm{O}x'$ ορίζεται ως **αρνητική** ή ως **ημιευθεία αρνητικής φοράς**. Τότε η ευθεία $x'x$ είναι **προσανατολισμένη.**

Αν τώρα θεωρήσουμε σε μία άλλη ευθεία $y'y$ της διεύθυνσης που ορίζεται από την ευθεία $x'x$, ένα σταθερό σημείο O', τότε οι ημιευθείες που βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ακμής OO' έχουν την ίδια φορά, δηλαδή στο σχήμα 4.1 η ημιευθεία $\mathrm{O}'y$ έχει την ίδια φορά με την ημιευθεία $\mathrm{O}x$ και αντίθετη φορά με την ημιευθεία $\mathrm{O}x'$. Έτσι μία διεύθυνση εφοδιάζεται με την έννοια της φοράς που μπορεί να είναι θετική ή αρνητική.



Σχήμα 4.1



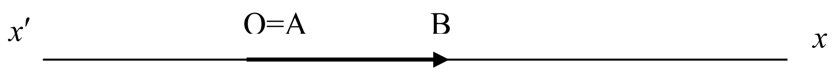
Σχήμα 4.2

Όπως ξέρουμε, για να προσδιορίσουμε την ευθύγραμμη τροχιά ενός υλικού σημείου μεταξύ δύο σημείων Α και Β, θα πρέπει να πούμε από ποιο σημείο ξεκίνησε το υλικό σημείο την κίνησή του και που σταμάτησε, δηλαδή πρέπει να προσδιορίσουμε την αρχή και το τέλος της τροχιάς του. Αυτή ακριβώς η ανάγκη μας υποκινεί στα μαθηματικά να θεωρήσουμε προσανατολισμένα ευθύγραμμα τμήματα, δηλαδή ευθύγραμμα τμήματα στα οποία έχουμε ορίσει την αρχή και το τέλος τους. Κάθε προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα λέγεται **διάνυσμα**. Ένα διάνυσμα με αρχή A και τέλος (πέρας) B, συμβολίζεται με (A,B) ή $\mathbf{AB}$ και γεωμετρικά παριστάνεται με το ευθύγραμμο τμήμα AB με ένα βέλος στο τέλος του B. Στα επόμενα θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\mathbf{AB}$.

Η ευθεία που ορίζεται από τα άκρα του διανύσματος $\mathbf{AB}$ ονομάζεται **φορέας** ή στήριγμα του διανύσματος αυτού, ενώ η διεύθυνση που ορίζεται από το φορέα του $\mathbf{AB}$ λέγεται και διεύθυνση του $\mathbf{AB}$.

Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB, ως προς κάποια μονάδα μετρησης, λέγεται **μέτρο** του διανύσματος $\mathbf{AB}$ και συμβολίζεται με $|\mathbf{AB}|$ ή AB και είναι μη αρνητικός πραγματικός αριθμός.

Επιπλέον σε κάθε διάνυσμα $\mathbf{AB}$ αντιστοιχίζεται η φορά του που είναι μία από τις δύο που ορίζονται στη διεύθυνσή του. Συγκεκριμένα, αν προσανατολίσουμε το φορέα του $\mathbf{AB}$ θεωρώντας $O \equiv A$ (δες σχήμα 4.3) και $B \in Ox$, όπου Ox είναι η ημιευθεία θετικής φοράς, τότε το διάνυσμα $\mathbf{AB}$ έχει τη **θετική φορά**, ενώ, αν $B \in Ox'$, τότε το $\mathbf{AB}$ έχει την **αρνητική φορά**.



Σχήμα 4.3

Το διάνυσμα $\mathbf{AA}$ με κοινή αρχή και τέλος, λέγεται **μηδενικό διάνυσμα**, και συμβολίζεται με το $\mathbf{0}$. Επειδή από το σημείο A δεν ορίζεται μοναδική ευθεία, αλλά διέρχονται άπειρες ευθείες, μπορούμε συμβατικά να θεωρήσουμε ότι το μηδενικό διάνυσμα έχει οποιαδήποτε διεύθυνση, ενώ αυστηρά από μαθηματικής πλευράς το μηδενικό διάνυσμα στερείται διεύθυνσης. Επιπλέον το $\mathbf{0}$ έχει μέτρο 0.

Από τα προηγούμενα, είναι φανερό ότι σε κάθε διάνυσμα $\mathbf{AB} \neq \mathbf{0}$ αντιστοιχίζουμε **το μέτρο**, **τη διεύθυνση** και **τη φορά** του, τα οποία λέμε στοιχεία του. Αντίστροφα, μία διεύθυνση, μία φορά πάνω σε αυτήν, ένας μη αρνητικός αριθμός και ένα σημείο A του χώρου, ορίζουν ένα ακριβώς διάνυσμα $\mathbf{AB}$ με τα παραπάνω στοιχεία.

Είναι ακόμα φανερό ότι υπάρχουν διανύσματα με το ίδιο μέτρο, την ίδια διεύθυνση και φορά, αλλά με διαφορετική αρχή (σημείο εφαρμογής). Τέτοια διανύσματα, όταν εκπροσωπούν δυνάμεις στη Φυσική, σε πολλές περιπτώσεις επιφέρουν το ίδιο αποτέλεσμα ανεξάρτητα από το σημείο εφαρμογής τους. Είναι λοιπόν λογικό να θεωρήσουμε τέτοια διανύσματα ως ισοδύναμα και να τα αποδεσμεύσουμε από το σημείο εφαρμογής τους. Έτσι ορίζουμε στο σύνολο των διανυσμάτων του χώρου μία σχέση ισότητας ως εξής:

Ορισμός 4. 1. 1 *Δύο διανύσματα* $\mathbf{AB}$ *και* $\mathbf{\Gamma\Delta}$ *είναι ίσα, αν, και μόνον αν, έχουν την ίδια διεύθυνση και φορά και ίσα μέτρα.*

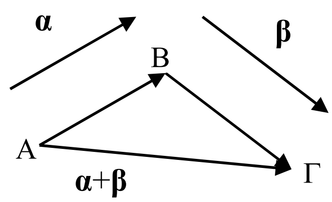
Η σχέση της ισότητας στο σύνολο των διανυσμάτων του χώρου είναι σχέση ισοδυναμίας. Επομένως το σύνολο των διανυσμάτων του χώρου ως προς τη σχέση της ισότητας χωρίζεται σε κλάσεις ισοδυναμίας που αποτελούνται από ίσα διανύσματα. Κάθε κλάση ισοδυναμίας λέγεται **ελεύθερο διάνυσμα** και εκπροσωπείται από οποιοδήποτε από τα ίσα διανύσματα που περιέχει. Το σύνολο των ελεύθερων διανυσμάτων του χώρου συμβολίζεται με το $\mathbf{\Delta}^3$.

Στο σύνολο $\mathbf{\Delta}^3$ είναι δυνατόν να ορίσουμε πράξεις έτσι ώστε αυτό να αποκτήσει μία αλγεβρική δομή. Έτσι ορίζουμε μία εσωτερική πράξη, την **πρόσθεση,** ως εξής:

$$+ : \mathbf{\Delta}^3 \times \mathbf{\Delta}^3 \to \mathbf{\Delta}^3, (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \to \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}, \qquad (1)$$

όπου $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \mathbf{A\Gamma}$, αν είναι $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{AB}$ και $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{B\Gamma}$.

Με όσα ξέρουμε από την Ευκλείδεια Γεωμετρία, μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι το αποτέλεσμα της πρόσθεσης είναι ανεξάρτητο από την εκλογή των αντιπροσώπων των ελεύθερων διανυσμάτων $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$, οπότε η πράξη της πρόσθεσης στο σύνολο $\mathbf{\Delta}^3$ είναι καλά ορισμένη.



Σχήμα 4.4

Οι βασικές ιδιότητες που ικανοποιεί η πράξη της πρόσθεσης απορρέουν εύκολα από τον ορισμό και είναι οι εξής:

(i) $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}$, για κάθε $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbf{\Delta}^3$ **, (αντιμεταθετική ιδιότητα)**,

(ii) $(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} + (\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma})$, για κάθε $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in \mathbf{\Delta}^3$, **(προσεταιριστική ιδιότητα),**

(iii) $\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{0} = \boldsymbol{\alpha}$ **,** για κάθε $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{\Delta}^3$, **(ύπαρξη ουδέτερου στοιχείου),**

(iv) για κάθε $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{\Delta}^3$ υπάρχει $\mathbf{x} \in \mathbf{\Delta}^3$, που συμβολίζεται με $-\boldsymbol{\alpha}$, τέτοιο ώστε : $\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{x} = \mathbf{0}$, **(ύπαρξη αντίθετου στοιχείου του** α **).**

Τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}$ και $-\boldsymbol{\alpha}$ έχουν ίσα μέτρα και ίδια διεύθυνση, αλλά αντίθετη φορά. Αν ένας αντιπρόσωπος του $\boldsymbol{\alpha}$ είναι $\mathbf{AB}$, τότε ένας αντιπρόσωπος του $-\boldsymbol{\alpha}$ είναι το διάνυσμα $\mathbf{BA}$, αφού $\mathbf{AB} + \mathbf{BA} = \mathbf{AA} = \mathbf{0}$.

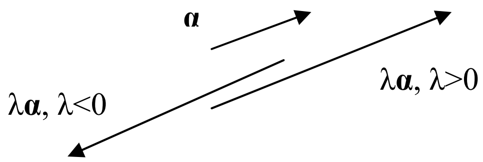
Το σύνολο $\mathbf{\Delta}^3$ εφοδιασμένο με την πράξη της πρόσθεσης γίνεται **αβελιανή ομάδα.**

Το σύνολο $\mathbf{\Delta}^3$ εφοδιάζεται και με μία εξωτερική πράξη με σύνολο συντελεστών το $\mathbb{R}$, η οποία ονομάζεται **βαθμωτός πολλαπλασιασμός,** ως εξής:

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbf{\Delta}^3 \to \mathbf{\Delta}^3,\ (\lambda, \boldsymbol{\alpha}) \to \lambda \cdot \boldsymbol{\alpha} \text{ ή } \lambda\boldsymbol{\alpha}, \tag{2}$$

όπου το ελεύθερο διάνυσμα $\lambda \cdot \boldsymbol{\alpha}$ ή απλά $\lambda\boldsymbol{\alpha}$ ορίζεται από τα στοιχεία :

1. *έχει τη διεύθυνση του* $\boldsymbol{\alpha}$*,*
2. *έχει ίδια (αντίστ. αντίθετη) φορά με το* $\boldsymbol{\alpha}$*, αν* $\lambda > 0$, *(αντίστ.* $\lambda < 0$*),*
3. *έχει μέτρο* $|\lambda \cdot \boldsymbol{\alpha}| = |\lambda||\boldsymbol{\alpha}|$.



Σχήμα 4.5

Με βάση τους ορισμούς των πράξεων (1) και (2) και αυτά που ξέρουμε από την Ευκλείδεια Γεωμετρία, αποδεικνύονται οι ακόλουθες ιδιότητες:

(v) $(\lambda + \mu)\boldsymbol{\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha} + \mu\boldsymbol{\alpha}$, για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{\Delta}^3$, **επιμεριστική ιδιότητα ως προς τη βαθμωτή πρόσθεση,**

(vi) $\lambda(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) = \lambda\boldsymbol{\alpha} + \lambda\boldsymbol{\beta}$**,** για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbf{\Delta}^3$, **επιμεριστική ιδιότητα ως προς τη διανυσματική πρόσθεση**,

(vii) $(\lambda\mu)\boldsymbol{\alpha} = \lambda(\mu\boldsymbol{\alpha})$, για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{\Delta}^3$,

(viii) $1 \cdot \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}$, για κάθε $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{\Delta}^3$.

Έτσι μέχρι τώρα έχουμε εφοδιάσει το σύνολο $\mathbf{\Delta}^3$ με την εσωτερική πράξη της πρόσθεσης και την εξωτερική του βαθμωτού πολλαπλασιασμού που ικανοποιούν τις ιδιότητες **(i)-(viii)**. Λέμε ότι το σύνολο $\mathbf{\Delta}^3$ είναι εφοδιασμένο με τη **δομή διανυσματικού χώρου** ή ότι ο $\mathbf{\Delta}^3$ είναι ένας **διανυσματικός χώρος πάνω στο σώμα** $\mathbb{R}$ **των πραγματικών αριθμών.**

Στα επόμενα θα δούμε ότι είναι δυνατόν να εφοδιάσουμε με τη δομή διανυσματικού χώρου και άλλα σύνολα, όπως το σύνολο των διατεταγμένων τριάδων

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\},$$

κατά φυσικό τρόπο μέσω μιας αμφιμονοσήμαντης απεικόνισης που θα ορίσουμε μεταξύ των συνόλων $\mathbf{\Delta}^3$ και $\mathbb{R}^3$.

Διανύσματα που έχουν την ίδια διεύθυνση λέγονται **συγγραμμικά**.

Αν $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ είναι δύο συγγραμμικά διανύσματα με $\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$, τότε υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε να ισχύει $\boldsymbol{\alpha} = \lambda \boldsymbol{\beta}$.

Αντίστροφα, από τον ορισμό του βαθμωτού πολλαπλασιασμού και την ισότητα $\boldsymbol{\alpha} = \lambda \boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$, έπεται, ότι τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$ έχουν την ίδια διεύθυνση, δηλαδή είναι συγγραμμικά.

Δύο διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ που είναι συγγραμμικά και έχουν:

- την ίδια φορά λέγονται **ομόρροπα** και γράφουμε $\boldsymbol{\alpha} \uparrow\uparrow \boldsymbol{\beta}$,
- αντίθετη φορά λέγονται **αντίρροπα** και γράφουμε $\boldsymbol{\alpha} \uparrow\downarrow \boldsymbol{\beta}$.

Επιπλέον, σύμφωνα με τον ορισμό του βαθμωτού πολλαπλασιασμού, ισχύουν και τα εξής:

- $\lambda \cdot \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ και $\lambda \neq 0 \Rightarrow \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$
- $\lambda \cdot \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ και $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \lambda = 0$.

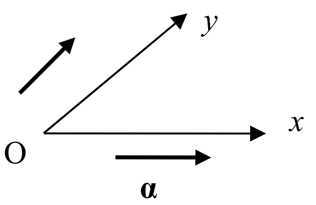
Η γωνία δύο διανυσμάτων

Ορισμός 4.1.2 *Θεωρούμε τα μη μηδενικά διανύσματα* $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ *του* $\boldsymbol{\Delta}^3$. *Με αρχή τυχόν σημείο* Ο *του χώρου γράφουμε ημιευθείες* $\mathrm{O}x$ *και* $\mathrm{O}y$, *έτσι ώστε* $\mathrm{O}x \uparrow\uparrow \boldsymbol{\alpha}$ *και* $\mathrm{O}y \uparrow\uparrow \boldsymbol{\beta}$. *Ορίζουμε ως γωνία* $\left(\widehat{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}\right)$ *των διανυσμάτων* $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, *την κυρτή γωνία των ημιευθειών* $\mathrm{O}x$ *και* $\mathrm{O}y$, *δηλαδή έχουμε:*

$$(\widehat{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}) := \widehat{x\mathrm{O}y}$$

Σύμφωνα με τον ορισμό έχουμε:

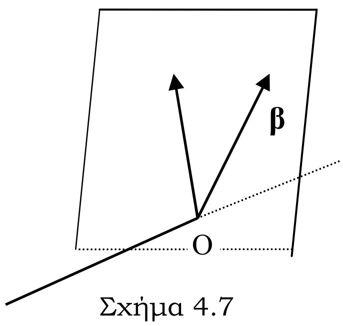
- $(\widehat{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}) = (\widehat{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}})$
- $0 \leq (\widehat{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}) \leq \pi$
- $(\widehat{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha} \uparrow\uparrow \boldsymbol{\beta}$
- $(\widehat{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}) = \pi \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha} \uparrow\downarrow \boldsymbol{\beta}$.



Σχήμα 4.6

Παρατηρήσεις

(α) *Στον ορισμό της γωνίας δύο διανυσμάτων δεν υπάρχει η έννοια της φοράς διαγραφής, η οποία υπάρχει στον ορισμό της γωνίας στο επίπεδο και συγκεκριμένα στον τριγωνομετρικό κύκλο, όπου έχει οριστεί ένας φυσικός προσανατολισμός (θετική και αρνητική φορά διαγραφής). Εκεί γίνεται σιωπηρά η υπόθεση ότι έχουμε επιλέξει να παρατηρούμε τη φορά διαγραφής μιας γωνίας πάντοτε ευρισκόμε-*



Σχήμα 4.7

νοι σε ένα συγκεκριμένο ημίχωρο από τους δύο που ορίζει ένα επίπεδο στο χώρο.
(β) *Στη περίπτωση που έχουμε ένα επίπεδο στο χώρο (σχήμα 4.7) ο προσανατολισμός της γωνίας* $\left(\widehat{\mathbf{\alpha},\mathbf{\beta}}\right)$ *εξαρτάται από τον ημίχωρο στον οποίο βρίσκεται αυτός που παρατηρεί την περιστροφή του διανύσματος* $\mathbf{\alpha}$ *γύρω από το* O*, για να συμπέσει με το* $\mathbf{\beta}$*, διαγράφοντας τη γωνία τους. Έτσι ο ορισμός της γωνίας δύο διανυσμάτων στο χώρο θα έπρεπε να συνοδεύεται με προσδιορισμό του ημίχωρου που βρίσκεται αυτός που παρατηρεί τη φορά διαγραφής της γωνίας.*

Δεξιόστροφο και αριστερόστροφο σύστημα

Ορισμός 4.1.3 *Θεωρούμε διανύσματα* $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ *με κοινή αρχή* O.
(α) *Η διατεταγμένη τριάδα* $(\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$ *ορίζει* ***δεξιόστροφο σύστημα****, αν η φορά του διανύσματος* $\mathbf{k}$ *συμπίπτει με τη φορά κίνησης ενός δεξιόστροφου κοχλία (βίδας), όταν αυτός στρέφεται κατά τη φορά που πρέπει να στραφεί το διάνυσμα* $\mathbf{i}$ *για να συμπέσει με το διάνυσμα* $\mathbf{j}$*, διαγράφοντας την γωνία τους* $(\widehat{\mathbf{i},\mathbf{j}})$.
(β) *Αν η διατεταγμένη τριάδα* $(\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$ *δεν ορίζει δεξιόστροφο σύστημα, τότε*

Η έννοια του δεξιόστροφου συστήματος μπορεί να γενικευθεί ως εξής:

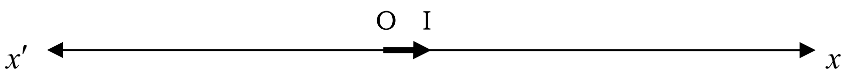
Το σύστημα $(\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$ *είναι* ***δεξιόστροφο*** *(αντίστοιχα,* ***αριστερόστροφο****), αν η γωνία* $(\mathbf{i},\mathbf{j})$ *είναι θετική (αντίστοιχα, αρνητική) ως προς παρατηρητή που βρίσκεται στον ημίχωρο που βρίσκεται το διάνυσμα* $\mathbf{k}$*, αν αυτό έχει αρχή* O.

Παρατήρηση. *Αν το σύστημα* $(\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$ *είναι δεξιόστροφο, τότε και τα συστήματα* $(\mathbf{j},\mathbf{k},\mathbf{i})$ *και* $(\mathbf{k},\mathbf{i},\mathbf{j})$ *είναι δεξιόστροφα, ενώ τα συστήματα* $(\mathbf{i},\mathbf{k},\mathbf{j}),(\mathbf{k},\mathbf{j},\mathbf{i})$ *και* $(\mathbf{j},\mathbf{i},\mathbf{k})$ *είναι αριστερόστροφα.*

4.2 Συντεταγμένες σημείου και διανύσματος

(α) Η έννοια του άξονα

Ορισμός 4.2.1 *Μία προσανατολισμένη ευθεία* $x'\mathrm{O}x$*, με αρχή* O*, στην οποία έχουμε ορίσει ένα σημείο* I *της θετικής ημιευθείας* $\mathrm{O}x$*, έτσι ώστε το μέτρο του διανύσματος* $\mathbf{OI}=\mathbf{i}$ *να ισούται με τη μονάδα μετρήσεως μηκών, λέγεται* ***άξονας.*** *Το διάνυσμα* $\mathbf{OI}$ *είναι η* ***διανυσματική μονάδα*** *ή το* ***μοναδιαίο διάνυσμα*** *της διεύθυνσης που ορίζει ο άξονας* $x'\mathrm{O}x$.



Σχήμα 4. 8

Σε κάθε σημείο A του άξονα $x'\mathrm{O}x$ αντιστοιχίζουμε έναν πραγματικό αριθμό x_{A}, που λέγεται **τετμημένη** του σημείου A, ως εξής:

Επειδή τα διανύσματα $\mathbf{OA}$ και $\mathbf{OI}=\mathbf{i}$ είναι συγγραμμικά, θα υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός x_{A} τέτοιος ώστε $\mathbf{OA}=x_{\mathrm{A}}\mathbf{i}$. Τον πραγματικό αριθμό x_{A} ονομάζουμε **τετμημένη** του σημείου A.

Είναι φανερό ότι τα σημεία του θετικού ημιάξονα $\mathrm{O}x$ έχουν μη αρνητική τετμημένη, ενώ τα σημεία του αρνητικού ημιάξονα έχουν μη θετική τετμημένη. Η τετμημένη της αρχής O είναι ο αριθμός 0. Επίσης δεχόμαστε αξιωματικά ότι για κάθε πραγματικό αριθμό x_{A} υπάρχει σημείο του άξονα $x'\mathrm{O}x$, του οποίου η τετμημένη είναι x_{A}.

Έτσι η απεικόνιση

$$\phi_1 : x'\mathrm{O}x \to \mathbb{R},\ \mathrm{A} \to \phi_1(\mathrm{A}) := x_{\mathrm{A}},$$

όπου x_{A} η τετμημένη του σημείου A, είναι αμφιμονοσήμαντη και επί του $\mathbb{R}$.

Σε κάθε διάνυσμα $\mathbf{AB}$ με φορέα τον άξονα $x'\mathrm{O}x$ αντιστοιχίζουμε ακριβώς έναν πραγματικό αριθμό, που συμβολίζεται με $\overline{\mathrm{AB}}$ και λέγεται αλγεβρική τιμή του διανύσματος $\mathbf{AB}$, μέσω της ισότητας

$$\mathbf{AB}=\overline{\mathrm{AB}}\cdot\mathbf{i}.$$

Σχετικά με την αλγεβρική τιμή διανύσματος πάνω σε άξονα, ισχύει το θεώρημα που ακολουθεί.

Θεώρημα 4.2.1 **(i)** *Για κάθε σημείο του άξονα $x'\mathrm{O}x$, η αλγεβρική τιμή του διανύσματος $\mathbf{OA}$ ισούται με την τετμημένη x_{A} του σημείου A, δηλαδή*

$$\overline{\mathrm{OA}}=x_{\mathrm{A}}$$

(ii) *Για κάθε διάνυσμα $\mathbf{AB}$ με φορέα τον άξονα $x'\mathrm{O}x$ η αλγεβρική τιμή του ισούται με τη διαφορά της τετμημένης x_{B} του τέλους του B μείον την τετμημένη x_{A} της αρχής του A, είναι δηλαδή*

$$\overline{\mathrm{AB}}=x_{\mathrm{B}}-x_{\mathrm{A}}.$$

Απόδειξη (i) Σύμφωνα με τον ορισμό της τετμημένης του σημείου A θα έχουμε $\mathbf{OA} = x_{\mathrm{A}} \cdot \mathbf{i} = \overline{\mathrm{OA}} \cdot \mathbf{i}$, οπότε $\left(\overline{\mathrm{OA}} - x_{\mathrm{A}}\right) \cdot \mathbf{i} = \mathbf{0} \Rightarrow \overline{\mathrm{OA}} = x_{\mathrm{A}}$.

(ii) Έχουμε $\mathbf{AB} = \mathbf{OB} - \mathbf{OA} = x_{\mathrm{B}} \cdot \mathbf{i} - x_{\mathrm{A}} \cdot \mathbf{i} = \left(x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}\right) \cdot \mathbf{i}$, οπότε $\overline{\mathrm{AB}} = x_{\mathrm{B}} \text{-} x_{\mathrm{A}}$.

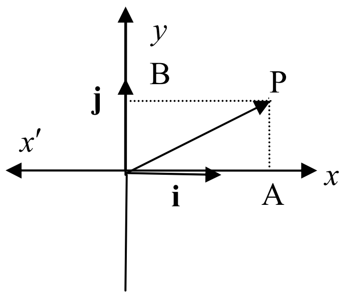
(β) Συντεταγμένες σημείου και διανύσματος στο επίπεδο

Σε κάθε σημείο ενός επιπέδου Π αντιστοιχίζουμε ένα διατεταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, όπου $\mathbb{R}^2 = \left\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\right\}$, ως εξής:

Ορισμός 4.2.2 *Ένα* ***ορθοκανονικό*** *ή* ***καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων*** $\mathrm{O}xy$ *ή* $\left(\mathrm{O}, \mathbf{i}, \mathbf{j}\right)$ *στο επίπεδο* Π *, είναι δύο άξονες* $x'x$ *και* $y'y$ *τέτοιοι ώστε:*

- *έχουν κοινή αρχή* O *,*
- *είναι μεταξύ τους κάθετοι και*
- *έχουν αντίστοιχα μοναδιαία διανύσματα* $\mathbf{i}$ *και* $\mathbf{j}$ *ισομήκη.*

Έστω P τυχόν σημείο του επιπέδου Π . Προβάλλουμε το σημείο P στους άξονες $x'x$ και $y'y$. Έστω A, B οι προβολές του P πάνω στον άξονα $x'x$ και $y'y$, αντίστοιχα. Αν είναι $\mathbf{OA} = x\mathbf{i}$ και $\mathbf{OB} = y\,\mathbf{j}$, τότε τους αριθμούς $x = \overline{\mathrm{OA}}$ και $y = \overline{\mathrm{OB}}$ τους ονομάζουμε συντεταγμένες του σημείου P . Ο αριθμός x είναι η **τετμημένη** του σημείου P , ενώ ο αριθμός y είναι η **τεταγμένη** του P . Γράφουμε $\mathrm{P}\left(x, y\right)$. Επιπλέον, η απεικόνιση



Σχήμα 4.9

$$\phi_2 : \Pi \to \mathbb{R}^2,\ \mathrm{P} \to \phi_2(\mathrm{P}) := \left(x, y\right), \tag{1}$$

όπου x και y είναι οι συντεταγμένες του σημείου P ως προς το ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $\left(\mathrm{O}, \mathbf{i}, \mathbf{j}\right)$ είναι αμφιμονοσήμαντη και επί του $\mathbb{R}^2$.

Στο τυχόν σημείο P του επιπέδου αντιστοιχίζουμε το διάνυσμα θέσης του $\mathbf{OP}$. Σύμφωνα με τα παραπάνω, θα έχουμε

$$\mathbf{OP} = \mathbf{OA} + \mathbf{OB} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} . \tag{2}$$

*Τους αριθμούς x και y τους ονομάζουμε **συντεταγμένες του διανύσματος** $\mathbf{OP}$. Ο αριθμός x είναι η **τετμημένη**, ενώ ο αριθμός y είναι η **τεταγμένη** του $\mathbf{OP}$. Γράφουμε $\mathbf{OP}=(x,y)$, δηλαδή οι συντεταγμένες του διανύσματος θέσης $\mathbf{OP}$ του σημείου P ταυτίζονται με τις συντεταγμένες του σημείου P ως προς το ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων $(\mathrm{O},\mathbf{i},\mathbf{j})$.*

Η σχέση (2) εκφράζει κατά μοναδικό τρόπο το διάνυσμα $\mathbf{OP}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\mathbf{i}$ και $\mathbf{j}$. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι ισχύει και η ισότητα

$$\mathbf{OP}=x'\mathbf{i}+y'\mathbf{j} \tag{3}$$

με $(x',y')\neq(x,y)$, τότε από την ισότητα $x\mathbf{i}+y\mathbf{j}=x'\mathbf{i}+y'\mathbf{j}$ λαμβάνουμε

$$\mathbf{i}=\left(\frac{y'-y}{x'-x}\right)\mathbf{j},\ \text{αν } x'\neq x \qquad \text{ή} \qquad \mathbf{j}=\left(\frac{x'-x}{y'-y}\right)\mathbf{i},\ \text{αν } y'\neq y\ ,$$

δηλαδή τα διανύσματα $\mathbf{i}$ και $\mathbf{j}$ είναι συγγραμμικά, (άτοπο).

Ονομάζουμε $\mathbf{\Delta^2}$ το σύνολο των ελεύθερων διανυσμάτων του επιπέδου Π
Έστω $\mathbf{AB}$ τυχόν διάνυσμα του επιπέδου με $\mathrm{A}(x_\mathrm{A},y_\mathrm{A})$ και $\mathrm{B}(x_\mathrm{B},y_\mathrm{B})$. Τότε

$$\mathbf{AB}=\mathbf{OB}-\mathbf{OA}=x_\mathrm{B}\mathbf{i}+y_\mathrm{B}\mathbf{j}-(x_\mathrm{A}\mathbf{i}+y_\mathrm{A}\mathbf{j})=(x_\mathrm{B}-x_\mathrm{A})\mathbf{i}+(y_\mathrm{B}-y_\mathrm{A})\mathbf{j},$$

οπότε στο διάνυσμα $\mathbf{AB}$ αντιστοιχίζουμε τις συντεταγμένες $x_\mathrm{B}-x_\mathrm{A}, y_\mathrm{B}-y_\mathrm{A}$ και γράφουμε

$$\mathbf{AB}=(x_\mathrm{B}-x_\mathrm{A},y_\mathrm{B}-y_\mathrm{A}).$$

Με τα παραπάνω έχουμε αποδείξει το θεώρημα που ακολουθεί:

Θεώρημα 4.2.2 *Έστω επίπεδο Π και ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων $(\mathrm{O},\mathbf{i},\mathbf{j})$ του επιπέδου Π. Τότε ισχύουν:*

(α) *Σε κάθε σημείο P του επιπέδου Π αντιστοιχίζεται μοναδικό ζεύγος πραγματικών αριθμών x (**τετμημένη**) και y (**τεταγμένη**), ώστε να ισχύει:*

$$\mathbf{OP}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}.$$

(β) *Το διάνυσμα $\mathbf{AB}$ του επιπέδου Π με $\mathrm{A}(x_\mathrm{A},y_\mathrm{A})$ και $\mathrm{B}(x_\mathrm{B},y_\mathrm{B})$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των μοναδιαίων διανυσμάτων $\mathbf{i}$ και $\mathbf{j}$ ως*

$$\mathbf{AB}=(x_\mathrm{B}-x_\mathrm{A})\mathbf{i}+(y_\mathrm{B}-y_\mathrm{A})\mathbf{j},$$

*οπότε έχει συντεταγμένες $x_\mathrm{B}-x_\mathrm{A}$ (**τετμημένη**) και $y_\mathrm{B}-y_\mathrm{A}$ (**τεταγμένη**), δηλαδή είναι*

$$\mathbf{AB}=(x_\mathrm{B}-x_\mathrm{A},y_\mathrm{B}-y_\mathrm{A}).$$

Ερχόμαστε τώρα στις πράξεις που έχουμε ορίσει στο σύνολο των ελεύθερων διανυσμάτων του χώρου περιοριζόμενοι μόνο σε διανύσματα του επιπέδου Π, δηλαδή σε ελεύθερα διανύσματα του συνόλου $\mathbf{\Delta}^2$.

Αν θεωρήσουμε τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,y_1),\boldsymbol{\beta}=(x_2,y_2)$ και $\lambda\in\mathbb{R}$, τότε είναι εύκολο να διαπιστώσουμε γεωμετρικά και αλγεβρικά ότι το διάνυσμα $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ έχει συντεταγμένες (x_1+x_2,y_1+y_2), ενώ το διάνυσμα $\lambda\boldsymbol{\alpha}$ έχει συντεταγμένες $(\lambda x_1,\lambda y_1)$. Πράγματι, έχουμε

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j})+(x_2\mathbf{i}+y_2\mathbf{j})=(x_1+x_2)\mathbf{i}+(y_1+y_2)\mathbf{j}$$

$$\lambda\boldsymbol{\alpha}=\lambda(x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j})=\lambda x_1\mathbf{i}+\lambda y_1\mathbf{j},$$

οπότε είναι φυσικό να ορίσουμε αντίστοιχες πράξεις στο σύνολο $\mathbb{R}^2$ μέσω των ισοτήτων:

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2):=(x_1+x_2,y_1+y_2),$$

$$\lambda(x_1,y_1):=(\lambda x_1,\lambda y_1).$$

Αποδεικνύεται ότι και το σύνολο $\mathbb{R}^2$ εφοδιασμένο με τις δύο αυτές πράξεις είναι διανυσματικός χώρος πάνω στο $\mathbb{R}$.

(γ) Συντεταγμένες σημείου και διανύσματος στο χώρο.

Στη συνέχεια θα δούμε πως σε κάθε σημείο του χώρου αλλά και σε κάθε διάνυσμα του χώρου αντιστοιχίζουμε την διατεταγμένη τριάδα των συντεταγμένων του. Για το σκοπό αυτό θεωρούμε πρώτα ένα κατάλληλο σύστημα αναφοράς.

Ορισμός 4.2.3 Καρτεσιανό ή **ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων (αναφοράς)** $\mathrm{O}xyz$ *ή* $(\mathrm{O},\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$ *στο χώρο είναι τρεις άξονες* $x'x, y'y$ *και* $z'z$ *τέτοιοι ώστε:*

- *έχουν κοινή αρχή* O,
- *ανά δύο είναι μεταξύ τους κάθετοι,*
- *έχουν αντίστοιχα μοναδιαία διανύσματα* $\mathbf{i},\mathbf{j}$ και $\mathbf{k}$ *ισομήκη και*
- *η τριάδα* $(\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$ *των μοναδιαίων διανυσμάτων ορίζει δεξιόστροφο σύστημα.*

Έστω P τυχόν σημείο του χώρου, τον οποίο θεωρούμε εφοδιασμένο με ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $(\mathrm{O},\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$. Έστω Q η ορθή προβολή του σημείου P στο επίπεδο $x\mathrm{O}y$ και A,B, Γ οι ορθές προβολές του Q πάνω στους άξονες $x'x$, $y'y$, $z'z$, αντίστοιχα.

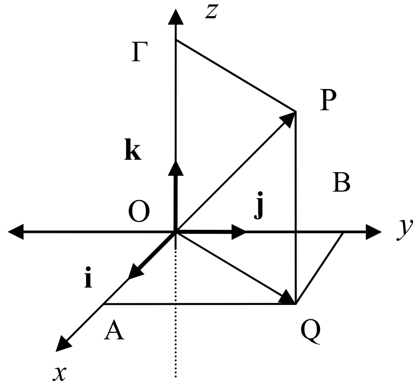
Αν είναι $\mathbf{OA}=x\mathbf{i}$, $\mathbf{OB}=y\mathbf{j}$ και $\mathbf{O\Gamma}=z\mathbf{k}$, τότε

$$\mathbf{OP} = \mathbf{OA} + \mathbf{OB} + \mathbf{O\Gamma} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} .$$

Στο σημείο P αντιστοιχίζουμε τη διατεταγμένη τριάδα (x, y, z) των συντεταγμένων του, οι οποίες κατά σειρά ονομάζονται **τετμημένη, τεταγμένη** και **κατηγμένη**. Γράφουμε το σημείο P ως $\mathrm{P}(x, y, z)$.

Επίσης, αντιστοιχίζουμε στο διάνυσμα θέσης του σημείου P την ίδια τριάδα συντεταγμένων και γράφουμε

$$\mathbf{OP} = (x, y, z).$$



Σχήμα 4. 10

Στη συνέχεια, για το τυχόν διάνυσμα $\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{\Delta}^3$, θεωρούμε ένα διάνυσμα ίσο του με αρχή O, έστω το $\mathbf{OP} = \boldsymbol{\alpha}$. Αν είναι $\mathbf{OP} = (x, y, z)$, τότε αντιστοιχίζουμε στο $\boldsymbol{\alpha}$ τις συντεταγμένες του διανύσματος $\mathbf{OP}$ και έχουμε

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{OP} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \equiv (x, y, z).$$

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας το Πυθαγόρειο θεώρημα, λαμβάνουμε

$$|\boldsymbol{\alpha}| = |\mathbf{OP}| = \sqrt{|\mathbf{OQ}|^2 + |\mathbf{QP}|^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} .$$

Επίσης, για το διάνυσμα $\mathbf{AB}$ με άκρα $\mathrm{A}(x_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{A}}, z_{\mathrm{A}})$ και $\mathrm{B}(x_{\mathrm{B}}, y_{\mathrm{B}}, z_{\mathrm{B}})$, έχουμε

$$\mathbf{AB} = \mathbf{OB} - \mathbf{OA} = (x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}})\mathbf{i} + (y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}})\mathbf{j} + (z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}})\mathbf{k} ,$$

οπότε θα είναι

$$|\mathbf{AB}| = \sqrt{(x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}})^2 + (y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}})^2 + (z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}})^2} .$$

Επομένως, όπως και στην περίπτωση του $\boldsymbol{\Delta}^2$, έχουμε αποδείξει το θεώρημα που ακολουθεί:

Θεώρημα 4.2.3 *Αν είναι* $\mathrm{A}(x_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{A}}, z_{\mathrm{A}})$ *και* $\mathrm{B}(x_{\mathrm{B}}, y_{\mathrm{B}}, z_{\mathrm{B}})$, *τότε το διάνυσμα* $\mathbf{AB}$ *έχει συντεταγμένες* $(x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}}, z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}})$, *δηλαδή είναι*

$$\mathbf{AB} = (x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}}, z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}).$$

Επιπλέον ισχύει:

$$|\mathbf{AB}| = \sqrt{(x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}})^2 + (y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}})^2 + (z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}})^2} .$$

Εργαζόμενοι όπως και στη περίπτωση του $\boldsymbol{\Delta}^2$, εύκολα αποδεικνύουμε το θεώρημα που ακολουθεί:

Θεώρημα 4.2.4 *Αν* $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,y_1,z_1)$, $\boldsymbol{\beta}=(x_2,y_2,z_2)$ *και* $\lambda\in\mathbb{R}$, *τότε θα είναι:*

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2),$$
$$\lambda\boldsymbol{\alpha}=(\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1).$$

(δ) Διαίρεση ευθυγράμμου τμήματος σε λόγο λ

Θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ με διαφορετικά άκρα $\mathrm{P}_1(x_1,y_1,z_1)$ και $\mathrm{P}_2(x_2,y_2,z_2)$ και σημείο P τέτοιο ώστε $\mathbf{P_1P}=\lambda\mathbf{PP_2}$. Τότε λέμε ότι το σημείο P διαιρεί το τμήμα $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ σε λόγο λ. Κατ' αρχήν παρατηρούμε ότι πρέπει να είναι $\lambda\neq-1$, αφού, αν ήταν $\lambda=-1$, θα είχαμε

$$\mathbf{P_1P_2}=\mathbf{P_1P}+\mathbf{PP_2}=\mathbf{0},\ \text{(άτοπο)}.$$

Έστω $\mathbf{r}=(x,y,z)$ το διάνυσμα θέσης του σημείου P και $\mathbf{r_1}=(x_1,y_1,z_1)$, $\mathbf{r_2}=(x_2,y_2,z_2)$ τα διανύσματα θέσης των σημείων P_1 και P_2, αντίστοιχα. Τότε έχουμε

$$\mathbf{P_1P}=\lambda\mathbf{PP_2}\Leftrightarrow\mathbf{r}-\mathbf{r}_1=\lambda(\mathbf{r_2}-\mathbf{r})\Leftrightarrow\mathbf{r}=\frac{\mathbf{r_1}+\lambda\mathbf{r_2}}{1+\lambda},$$

αφού είναι $\lambda\neq-1$.

4.3 Το εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

Ορισμός 4.3.1 *Στο σύνολο* $\boldsymbol{\Delta}^3$ *ορίζουμε μία απεικόνιση που ονομάζεται* ***εσωτερικό γινόμενο*** *και είναι της μορφής*

$$\cdot:\boldsymbol{\Delta}^3\times\boldsymbol{\Delta}^3\to\mathbb{R},(\mathbf{a},\mathbf{b})\to\mathbf{a}\cdot\mathbf{b},$$

όπου ο πραγματικός αριθμός $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ *ορίζεται από τη σχέση*

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\begin{cases}|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\mathbf{a},\mathbf{b}),\text{αν } \mathbf{a},\mathbf{b}\neq\mathbf{0}\\ 0,\ \text{αν } \mathbf{a}=\mathbf{0} \text{ ή } \mathbf{b}=\mathbf{0}\end{cases}.$$

Άμεση συνέπεια του ορισμού του εσωτερικού γινομένου είναι οι ακόλουθες ιδιότητες:

(i) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$, για κάθε $\mathbf{a},\mathbf{b}\in\boldsymbol{\Delta}^3$,

(ii) $(\lambda\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot(\lambda\mathbf{b})=\lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R},\mathbf{a},\mathbf{b}\in\boldsymbol{\Delta}^3$,

(iii) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0 \Leftrightarrow \mathbf{a}=\mathbf{0}$ ή $\mathbf{b}=\mathbf{0}$ ή $\left(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}}\right)=\dfrac{\pi}{2}$ (δηλαδή είναι $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$),

(iv) $\mathbf{a}^2 := \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=|\mathbf{a}|^2$.

(v) Αν $\mathbf{a},\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$, τότε $\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})=\dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$.

(vi) $\mathbf{i}^2=\mathbf{j}^2=\mathbf{k}^2=1,\ \mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=0, \mathbf{j}\cdot\mathbf{k}=0, \mathbf{k}\cdot\mathbf{i}=0$.

(vii) Αν θεωρήσουμε τα μη μηδενικά διανύσματα $\mathbf{a}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $\mathbf{b}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ ως προς το ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $Oxyz$ και γράψουμε τους αντιπροσώπους τους $\mathbf{OA}=\mathbf{a}$ και $\mathbf{OB}=\mathbf{b}$, τότε εφαρμόζοντας το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο OAB λαμβάνουμε:

$$|\mathbf{AB}|^2=|\mathbf{OA}|^2+|\mathbf{OB}|^2-2|\mathbf{OA}||\mathbf{OB}|\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})$$

$$\Leftrightarrow (\beta_1-\alpha_1)^2+(\beta_2-\alpha_2)^2+(\beta_3-\alpha_3)^2$$

$$=\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2-2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3.$$

Έτσι έχουμε καταλήξει σε μία αλγεβρική έκφραση του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων, δηλαδή στον προσδιορισμό του μέσω των συντεταγμένων των δύο διανυσμάτων ως εξής:

$$\boxed{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3.}$$

Χρησιμοποιώντας την αλγεβρική έκφραση του εσωτερικού γινομένου, εύκολα αποδεικνύουμε, για κάθε $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\in\mathbf{\Delta}^3$, ότι:

(viii) $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$, **(επιμεριστική ιδιότητα).**

(ix) Θεωρούμε δύο μη μηδενικά διανύσματα $\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbf{\Delta}^3$ και αντιπροσώπους αυτών $\mathbf{OA}=\mathbf{a}$ και $\mathbf{OB}=\mathbf{b}$. Αναλύουμε το διάνυσμα $\mathbf{b}$ σε δύο συνιστώσες $\mathbf{OK}$ και $\mathbf{O\Lambda}$, δηλαδή έχουμε

$$\mathbf{b}=\mathbf{OK}+\mathbf{O\Lambda}\ . \qquad (1)$$

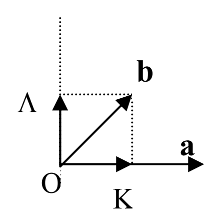
Ονομάζουμε **προβολή** του διανύσματος $\mathbf{b}$ πάνω στο διάνυσμα $\mathbf{a}$, το διάνυσμα $\mathbf{OK}$ και γράφουμε

$$pr_{\mathbf{a}}\mathbf{b}:=\mathbf{OK}\ .$$

Από τη σχέση (1) λαμβάνουμε

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{OK}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{O\Lambda}\Leftrightarrow \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot pr_{\mathbf{a}}\mathbf{b}\ ,$$

αφού είναι $\mathbf{a}\perp\mathbf{O\Lambda}$.



Σχήμα 4.11

Άρα έχουμε αποδείξει την ιδιότητα

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot pr_{\mathbf{a}}\mathbf{b}\,. \qquad (2)$$

Μπορούμε ακόμη να εκφράσουμε το διάνυσμα $pr_{\mathbf{a}}\mathbf{b}:=\mathbf{OK}$ σε συνάρτηση των διανυσμάτων $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$. Επειδή είναι $pr_{\mathbf{a}}\mathbf{b}:=\mathbf{OK}=\lambda\mathbf{a},\ \lambda\in\mathbb{R}$, μέσω της (2) λαμβάνουμε $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot\lambda\mathbf{a}\Leftrightarrow\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\lambda\mathbf{a}^2\Leftrightarrow\lambda=\dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{a}^2}$, οπότε έχουμε:

$$\boxed{pr_{\mathbf{a}}\mathbf{b}=\left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{a}^2}\right)\mathbf{a} \qquad \text{και} \qquad \mathbf{O\Lambda}=\mathbf{b}-\left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{a}^2}\right)\mathbf{a}\,.}$$

Εφαρμογές

1. Σε κάθε τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ με $\mathrm{B\Gamma}=\alpha, \Gamma\mathrm{A}=\beta, \mathrm{AB}=\gamma$, να αποδείξετε ότι:

$$\boxed{\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\cos\mathrm{A}\ \ \textbf{(Νόμος των συνημιτόνων).}}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ και ορίζουμε τα διανύσματα $\mathbf{B\Gamma}=\mathbf{a}$, $\mathbf{A\Gamma}=\mathbf{b}$, $\mathbf{AB}=\mathbf{c}$. Τότε έχουμε $|\mathbf{B\Gamma}|=|\mathbf{a}|=\alpha, |\mathbf{A\Gamma}|=|\mathbf{b}|=\beta$ και $|\mathbf{AB}|=|\mathbf{c}|=\gamma$.

Επιπλέον ισχύει ότι:

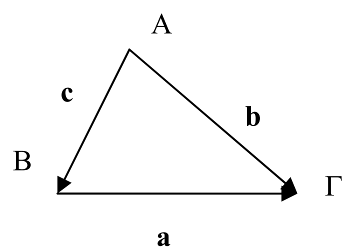
$$\mathbf{a}+\mathbf{c}=\mathbf{b}\Leftrightarrow\mathbf{a}=\mathbf{b}-\mathbf{c}\ ,$$

οπότε έχουμε

$$\mathbf{a}^2=(\mathbf{b}-\mathbf{c})^2=\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2-2(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$$

$$\Leftrightarrow\mathbf{a}^2=\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2-2|\mathbf{b}||\mathbf{c}|\cos(\mathbf{b},\mathbf{c})$$

$$\Leftrightarrow\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\cos\mathrm{A}\,.$$



Σχήμα 4.12

Στην περίπτωση που το τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ είναι ορθογώνιο με $\hat{\mathrm{A}}=90^\circ$, τότε καταλήγουμε στη σχέση:

$$\boxed{\alpha^2=\beta^2+\gamma^2\ \ \textbf{(Πυθαγόρειο θεώρημα).}}$$

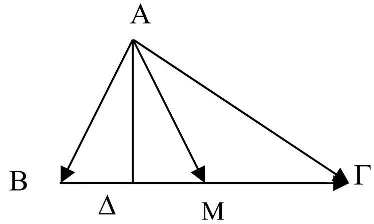
2. Σε κάθε τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ με $\mathrm{B\Gamma}=\alpha, \Gamma\mathrm{A}=\beta, \mathrm{AB}=\gamma$, να αποδείξετε ότι

$$\boxed{\textbf{(i)}\qquad \beta^2+\gamma^2=2\mu_\alpha^2+\frac{\alpha^2}{2}\,,\ (\ \textbf{πρώτο θεώρημα διαμέσων}\ ),}$$

$$\boxed{\textbf{(ii)}\qquad \left|\beta^2-\gamma^2\right|=2\alpha\cdot\mathrm{M\Delta}\,,\ (\textbf{δεύτερο θεώρημα διαμέσων})\ ,}$$

όπου μ_α είναι η διάμεσος AM του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$ και $\mathrm{M\Delta}$ είναι η προβολή της πάνω στην $\mathrm{B\Gamma}$.

Απόδειξη. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και ορίζουμε τα διανύσματα $\mathbf{B\Gamma} = \mathbf{a}$, $\mathbf{A\Gamma} = \mathbf{b}$, $\mathbf{AB} = \mathbf{c}$ και $\mathbf{AM} = \boldsymbol{\mu}_\alpha$. Τότε είναι $|\mathbf{B\Gamma}| = |\mathbf{a}| = \alpha$, $|\mathbf{A\Gamma}| = |\mathbf{b}| = \beta$, $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{c}| = \gamma$ και $|\mathbf{AM}| = |\boldsymbol{\mu}_\alpha| = \mu_\alpha$. Επίσης, ισχύουν οι ισότητες $\mathbf{a} = \mathbf{b} - \mathbf{c}$, $\mathbf{b} = \boldsymbol{\mu}_\alpha + \frac{1}{2}\mathbf{a}$ και $\mathbf{c} = \boldsymbol{\mu}_\alpha - \frac{1}{2}\mathbf{a}$, οπότε θα έχουμε



Σχήμα 4.13

(i) $\mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 = \left(\boldsymbol{\mu}_\alpha + \frac{1}{2}\mathbf{a}\right)^2 + \left(\boldsymbol{\mu}_\alpha - \frac{1}{2}\mathbf{a}\right)^2$

$$\Leftrightarrow \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 = 2\boldsymbol{\mu}_\alpha^2 + \frac{1}{2}\mathbf{a}^2$$

$$\Leftrightarrow \beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{1}{2}\alpha^2.$$

(ii) $\mathbf{b}^2 - \mathbf{c}^2 = \left(\boldsymbol{\mu}_\alpha + \frac{1}{2}\mathbf{a}\right)^2 - \left(\boldsymbol{\mu}_\alpha - \frac{1}{2}\mathbf{a}\right)^2 \Leftrightarrow \mathbf{b}^2 - \mathbf{c}^2 = 2(\boldsymbol{\mu}_\alpha \cdot \mathbf{a})$

$$\Leftrightarrow \beta^2 - \gamma^2 = 2(\mathbf{a} \cdot pr_{\mathbf{a}}\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{a}}) = \pm 2|\mathbf{a}||\Delta\mathrm{M}| \Leftrightarrow |\beta^2 - \gamma^2| = 2a \cdot \Delta\mathrm{M}\,\mathbf{,}$$

όπου Δ είναι η προβολή της κορυφής Α πάνω στην ΒΓ.

4.4 Εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

Ορισμός 4. 4.1 *Στο σύνολο* $\mathbf{\Delta}^3$ *θεωρούμε μία εσωτερική πράξη που ονομάζεται* ***εξωτερικό γινόμενο*** *και είναι της μορφής*

$$\times : \mathbf{\Delta}^3 \times \mathbf{\Delta}^3 \to \mathbf{\Delta}^3,\ (\mathbf{a},\mathbf{b}) \to \mathbf{a}\times\mathbf{b},$$

όπου το διάνυσμα $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ *έχει:*

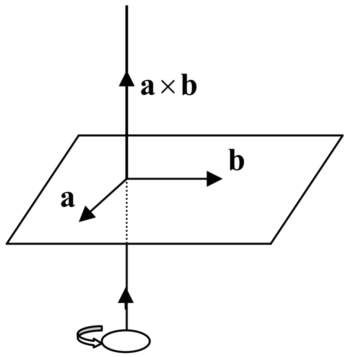
- *μέτρο* $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = \begin{cases} |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\mathbf{a},\mathbf{b}), \text{ αν } \mathbf{a},\mathbf{b} \neq \mathbf{0}, \\ 0, \text{ αν } \mathbf{a} = \mathbf{0} \text{ ή } \mathbf{b} = \mathbf{0}, \end{cases}$
- *διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο των* $\mathbf{a}$ *και* $\mathbf{b}$,
- *φορά τέτοια ώστε το σύστημα των διανυσμάτων* $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$ *να είναι δεξιόστροφο.*

Το διάνυσμα $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ *ονομάζεται* ***εξωτερικό γινόμενο*** *των διανυσμάτων* $\mathbf{a}$ *και* $\mathbf{b}$.

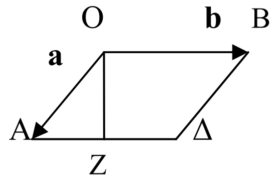
Από τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων, εύκολα προκύπτει η γεωμετρική του σημασία, αφού έχουμε (σχήμα 4.15)

$$\mathrm{E}(\mathbf{a},\mathbf{b}) := (\mathrm{OA\Delta B}) = (\mathrm{A\Delta})(\mathrm{OZ}) = |\mathbf{b}||\mathbf{a}|\sin(\mathbf{a},\mathbf{b}) = |\mathbf{a}\times\mathbf{b}|,$$

δηλαδή έχουμε αποδείξει ότι :



Σχήμα 4. 14



Σχήμα 4. 15

Το μέτρο του εξωτερικού γινομένου δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ *ισούται με το εμβαδόν* $\mathrm{E}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ *του παραλληλογράμμου που ορίζεται από τα διανύσματα αυτά, δηλαδή*

$$\mathrm{E}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$$

Από τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων, εύκολα προκύπτουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

(i) $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$**,** για κάθε $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{\Delta}^3$,

(ii) $(\lambda\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda\mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$, για κάθε $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{\Delta}^3, \lambda \in \mathbb{R}$,

(iii) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}$ ή $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ ή $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$,

(iv) $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k},\ \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i},\ \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$**,**

(v) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$**,** για κάθε $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbf{\Delta}^3$ **(επιμεριστική ιδιότητα).**

Η αλγεβρική έκφραση του εξωτερικού γινομένου

Η αλγεβρική έκφραση του εξωτερικού γινομένου των διανυσμάτων $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ και $\mathbf{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ δίνεται μέσω μιας συμβολικής ορίζουσας ως εξής:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}.$$

Πράγματι, έχουμε

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\times\mathbf{b} &= \left(\alpha_1\mathbf{i}+\alpha_2\mathbf{j}+\alpha_3\mathbf{k}\right)\times\left(\beta_1\mathbf{i}+\beta_2\mathbf{j}+\beta_3\mathbf{k}\right)\\ &= \left(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2\right)\mathbf{i}+\left(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3\right)\mathbf{j}+\left(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\right)\mathbf{k}\\ &\Leftrightarrow \mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Παράδειγμα 1. Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$\left(\mathbf{a}\times\mathbf{b}\right)^2 = \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 - \left(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\right)^2.$$

Απόδειξη.

$$\left(\mathbf{a}\times\mathbf{b}\right)^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2\sin^2\left(\mathbf{a},\mathbf{b}\right) = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2\cos^2\left(\mathbf{a},\mathbf{b}\right) = \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 - \left(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\right)^2.$$

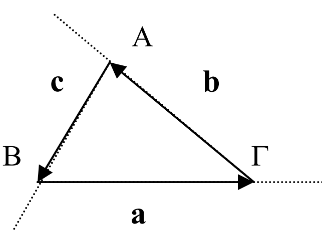
Παράδειγμα 2. Σε κάθε τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ με $\alpha = |\mathbf{B\Gamma}|, \beta = |\mathbf{\Gamma A}|, \gamma = |\mathbf{AB}|$, να αποδείξετε ότι

$$\frac{\alpha}{\sin \mathrm{A}} = \frac{\beta}{\sin \mathrm{B}} = \frac{\gamma}{\sin \Gamma},$$ **(νόμος των ημιτόνων).**

Απόδειξη.

Θεωρούμε τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ και θέτουμε $\mathbf{B\Gamma} = \mathbf{a}, \mathbf{\Gamma A} = \mathbf{b}, \mathbf{AB} = \mathbf{c}$, οπότε θα έχουμε $\mathrm{A} = \pi - \left(\mathbf{b},\mathbf{c}\right), \mathrm{B} = \pi - \left(\mathbf{c},\mathbf{a}\right), \Gamma = \pi - \left(\mathbf{a},\mathbf{b}\right)$ και

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c} = \mathbf{0}.$$



Σχήμα 4.16

Επομένως μπορούμε να έχουμε

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{a}\times\left(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}\right)=\mathbf{0}\\ \mathbf{b}\times\left(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}\right)=\mathbf{0}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{b}\times\mathbf{c} = \mathbf{c}\times\mathbf{a}$$

$$\Rightarrow |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\left(\mathbf{a},\mathbf{b}\right) = |\mathbf{b}||\mathbf{c}|\sin\left(\mathbf{b},\mathbf{c}\right) = |\mathbf{c}||\mathbf{a}|\sin\left(\mathbf{c},\mathbf{a}\right)$$

$$\Rightarrow \alpha\beta\sin\Gamma = \beta\gamma\sin\mathrm{A} = \gamma\alpha\sin\mathrm{B} \Rightarrow \frac{\alpha}{\sin\mathrm{A}} = \frac{\beta}{\sin\mathrm{B}} = \frac{\gamma}{\sin\Gamma}.$$

Παράδειγμα 3. Αν $\mathbf{a},\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ και υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b} = \mathbf{e}$, όπου $\mathbf{e}$ μοναδιαίο διάνυσμα, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που ορίζεται από τα $\mathbf{a},\mathbf{b}$, είναι μικρότερο ή ίσο με $|\mathbf{b}|$.

Απόδειξη (1ος τρόπος). Αρκεί να αποδείξουμε ότι: $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|\le|\mathbf{b}|$.
Πράγματι, έχουμε

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=\left|(\mathbf{e}-\lambda\mathbf{b})\times\mathbf{b}\right|=\left|\mathbf{e}\times\mathbf{b}-\lambda(\mathbf{b}\times\mathbf{b})\right|=|\mathbf{e}\times\mathbf{b}|=|\mathbf{e}||\mathbf{b}|\sin(\mathbf{e},\mathbf{b})\le|\mathbf{b}|,$$

αφού είναι $|\mathbf{e}|=1$ και $\sin(\mathbf{e},\mathbf{b})\le 1$.

(2ος τρόπος). Από την ισότητα $\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}=\mathbf{e}$ προκύπτει ότι:

$$(\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b})^2=\mathbf{e}^2\Leftrightarrow|\mathbf{b}|^2\lambda^2+2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\lambda+\left(|\mathbf{a}|^2-1\right)=0,\text{ για κάποιο }\lambda\in\mathbb{R}.$$

Επομένως θα είναι

$$\Delta=4\left[(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2-|\mathbf{b}|^2\left(|\mathbf{a}|^2-1\right)\right]\ge 0\Leftrightarrow|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2\cos^2(\mathbf{a},\mathbf{b})-|\mathbf{b}|^2|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2\ge 0$$

$$\Leftrightarrow|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2\sin^2(\mathbf{a},\mathbf{b})\le|\mathbf{b}|^2\Leftrightarrow|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\mathbf{a},\mathbf{b})\le|\mathbf{b}|\Leftrightarrow|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|\le|\mathbf{b}|.$$

4.5 Τα τριπλά γινόμενα διανυσμάτων

Υπάρχουν δύο τριπλά γινόμενα διανυσμάτων. Το πρώτο είναι το βαθμωτό τριπλό ή μικτό γινόμενο και το δεύτερο είναι το διανυσματικό τριπλό ή δις εξωτερικό γινόμενο.

(α) Το μικτό γινόμενο τριών διανυσμάτων

Ορισμός 4.5.1 *Αν* $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\in\boldsymbol{\Delta}^3$, *τότε ο πραγματικός αριθμός* $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$ *ονομάζεται* ***μικτό γινόμενο ή βαθμωτό τριπλό γινόμενο*** *των διανυσμάτων* $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ *και συμβολίζεται με* $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$ *ή* $(\mathbf{abc})$. *Έχουμε δηλαδή*

$$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}):=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}.$$

Σχετικά με τη γεωμετρική σημασία του μικτού γινομένου, θα αποδείξουμε στη συνέχεια ότι η απόλυτη τιμή του μικτού γινομένου τριών μη συνεπίπεδων διανυσμάτων ισούται με τον όγκο του παραλληλεπιπέδου που ορίζεται από τα τρία διανύσματα.

Θεώρημα 4.5.1 (α) *Αν* $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ *είναι μη συνεπίπεδα διανύσματα του* $\boldsymbol{\Delta}^3$, *τότε η απόλυτη τιμή του μικτού γινομένου των* $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ *ισούται με τον όγκο του παραλληλεπιπέδου που έχει τρεις ακμές με κοινή αρχή τα διανύσματα* $\mathbf{a},\mathbf{b}$ και $\mathbf{c}$. *Έχουμε δηλαδή*

$$\mathbf{V}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=\left|(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})\right|.$$

(β) *Επιπλέον ισχύει:*

$$\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\ \text{συνεπίπεδα}\Leftrightarrow(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=0.$$

Απόδειξη (α) Έχουμε

$$\mathbf{V}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = (\text{Εμβαδόν.βάσης})\times(\text{ύψος}) = |\mathbf{a}\times\mathbf{b}|\upsilon$$
$$= |\mathbf{a}\times\mathbf{b}||\mathbf{c}||\cos(\mathbf{a}\times\mathbf{b},\mathbf{c})| = |(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})|.$$

Στη συνέχεια διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν το σύστημα $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$ είναι δεξιόστροφο, τότε $(\mathbf{a}\times\mathbf{b},\mathbf{c})\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$,

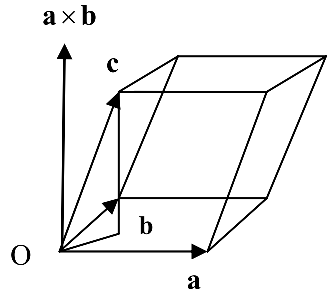
  αφού το $\mathbf{c}$ βρίσκεται στον ίδιο ημίχωρο με το $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, και ισχύει:
  $$\mathbf{V}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}).$$

- Αν το σύστημα $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$ είναι αριστερόστροφο, τότε τα διανύσματα $\mathbf{c}$ και $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ βρίσκονται σε διαφορετικούς ημίχωρους, οπότε

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b},\mathbf{c})\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$$

και ισχύει:

$$\mathbf{V}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = -(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}).$$



Σχήμα 4. 17

(β) $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ συνεπίπεδα $\Leftrightarrow \mathbf{a}\times\mathbf{b},\mathbf{c}$ κάθετα

$$\Leftrightarrow (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = 0.$$

Αλγεβρική έκφραση του μικτού γινομένου

Αν είναι $\mathbf{a}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $\mathbf{b}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ και $\mathbf{c}=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$, τότε

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)\mathbf{i}+(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3)\mathbf{j}+(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)\mathbf{k},$$
$$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = (\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)\gamma_1+(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3)\gamma_2+(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)\gamma_3,$$

οπότε θα έχουμε:

$$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = \begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}$$

Από την αλγεβρική μορφή του μικτού γινομένου, εύκολα προκύπτουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

(i) $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = (\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{a}) = (\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{b})$,

αφού η μετάβαση από το ένα μικτό γινόμενο στο άλλο γίνεται με δύο εναλλαγές θέσης μεταξύ των διανυσμάτων $\mathbf{a},\mathbf{b}$ και $\mathbf{c}$.

(ii) $\left(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\right)=-\left(\mathbf{b},\mathbf{a},\mathbf{c}\right)=-\left(\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{b}\right)=-\left(\mathbf{c},\mathbf{b},\mathbf{a}\right)$,
αφού τα τρία τελευταία μικτά γινόμενα προκύπτουν από το πρώτο με μία μόνο εναλλαγή θέσης.

(iii) $\mathbf{a}\cdot\left(\mathbf{b}\times\mathbf{c}\right)=\left(\mathbf{a}\times\mathbf{b}\right)\cdot\mathbf{c}$.
Πράγματι, έχουμε

$$\mathbf{a}\cdot\left(\mathbf{b}\times\mathbf{c}\right)=\left(\mathbf{b}\times\mathbf{c}\right)\cdot\mathbf{a}=\left(\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{a}\right)=\left(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\right).$$

(β) Τα δις εξωτερικά γινόμενα διανυσμάτων

Ορισμός 4.5.2 *Αν* $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\in\Delta^3$ *, τότε καθένα από τα γινόμενα*

$$\left(\mathbf{a}\times\mathbf{b}\right)\times\mathbf{c},\ \mathbf{a}\times\left(\mathbf{b}\times\mathbf{c}\right)$$

ονομάζεται ***δις εξωτερικό ή διανυσματικό τριπλό γινόμενο*** *των διανυσμάτων* $\mathbf{a},\mathbf{b}$ *και* $\mathbf{c}$.

Το θεώρημα που ακολουθεί μας δίνει μία έκφραση των παραπάνω δις εξωτερικών γινομένων ως γραμμικών συνδυασμών δύο εκ των τριών διανυσμάτων $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ και επιπλέον απαντά στο εύλογο ερώτημα σχετικά με το αν, τα δύο παραπάνω δις εξωτερικά γινόμενα, είναι ίσα.

Θεώρημα 4.5.2 *Αν* $\mathbf{a},\mathbf{b}$ *και* $\mathbf{c}$ *είναι διανύσματα του* Δ^3*, τότε:*

(i) $\left(\mathbf{a}\times\mathbf{b}\right)\times\mathbf{c}=\left(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}\right)\mathbf{b}-\left(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\right)\mathbf{a}$,

(ii) $\mathbf{a}\times\left(\mathbf{b}\times\mathbf{c}\right)=\left(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}\right)\mathbf{b}-\left(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\right)\mathbf{c}$.

Απόδειξη. (i) Πρώτα σημειώνουμε, ότι το διάνυσμα $\left(\mathbf{a}\times\mathbf{b}\right)\times\mathbf{c}$ είναι κάθετο προς τα διανύσματα $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ και $\mathbf{c}$, οπότε θα είναι συνεπίπεδο προς τα $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ και συνεπώς μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$. Επομένως υπάρχουν $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $\left(\mathbf{a}\times\mathbf{b}\right)\times\mathbf{c}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}$.

Αν $\mathbf{a}=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)$ και $\mathbf{b}=\left(\beta_1,\beta_2,\beta_3\right)$, τότε με απευθείας υπολογισμό βρίσκουμε ότι: $\lambda=-\left(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\right)$ και $\mu=\left(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}\right)$. Πράγματι, έχουμε

$$\left(\mathbf{a}\times\mathbf{b}\right)\times\mathbf{c}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2 & \alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3 & \alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}$$

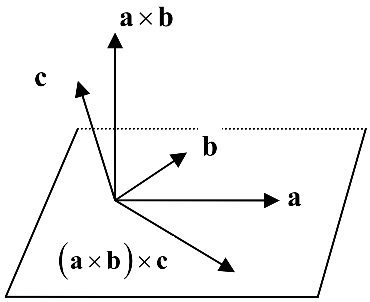
ή μετά από αρκετές πράξεις

$$\left(\mathbf{a}\times\mathbf{b}\right)\times\mathbf{c}=\left(\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2+\alpha_3\gamma_3\right)\mathbf{b}-\left(\beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2+\beta_3\gamma_3\right)\mathbf{a}=\left(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}\right)\mathbf{b}-\left(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\right)\mathbf{a}$$

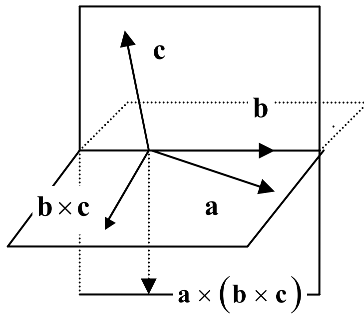
ή ισοδύναμα

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}=(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})\mathbf{b}-(\mathbf{c}\cdot\mathbf{b})\mathbf{a}.$$

(ii) $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=-\left[(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times\mathbf{a}\right]=-\left[(\mathbf{b}\cdot\mathbf{a})\mathbf{c}-(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})\mathbf{b}\right]=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$.



Σχήμα 4.18



Σχήμα 4.19

Παρατήρηση (Μνημονικός κανόνας)

$$\overset{+}{(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}}=(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})\mathbf{b}-(\mathbf{c}\cdot\mathbf{b})\mathbf{a}$$

-

Μνημονικά, μπορεί κανείς να θυμάται τον προσδιορισμό του δις εξωτερικού γινομένου ως εξής:

Θεωρούμε πρώτα το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος **c** *που είναι εκτός παρενθέσεως, με το διάνυσμα που βρίσκεται πιο μακριά του μέσα στην παρένθεση με πρόσημο +. Αυτός είναι ο συντελεστής του τρίτου διανύσματος, εδώ του* **b** .

Θεωρούμε στη συνέχεια το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος **c** *που είναι εκτός παρενθέσεως, με το διάνυσμα που βρίσκεται πιο κοντά του μέσα στην παρένθεση με πρόσημο -. Αυτός είναι ο συντελεστής του τρίτου διανύσματος, εδώ του* **a** .

Μία αξιοσημείωτη σχέση που ικανοποιεί το δις εξωτερικό γινόμενο είναι η λεγόμενη **ταυτότητα του Jacobi.**

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}+(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times\mathbf{a}+(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\times\mathbf{b}=\mathbf{0},$$

που παίζει πρωτεύοντα ρόλο στον ορισμό της άλγεβρας του Lie.

Παράδειγμα 1. Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})=\begin{vmatrix}\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{d}\\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{c} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{d}\end{vmatrix}.$$

Απόδειξη. Αν θέσουμε $\mathbf{w}=\mathbf{c}\times\mathbf{d}$, τότε έχουμε:

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})&=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{w}=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{w})\\&=\mathbf{a}\cdot\left[\mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})\right]=\mathbf{a}\cdot\left[(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})\mathbf{c}-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{d}\right]\\&=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}).\end{aligned}$$

Παράδειγμα 2. Δίνονται τα διανύσματα $\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbf{\Delta}^3$, $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$. Να προσδιορίσετε τα διανύσματα $\mathbf{w}$ που ικανοποιούν την εξίσωση $\mathbf{a}\times\mathbf{w}=\mathbf{b}$.

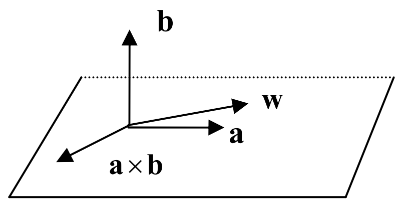
Λύση. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $\mathbf{b}=\mathbf{0}$, τότε $\mathbf{a}\times\mathbf{w}=\mathbf{0}\Leftrightarrow\mathbf{w}=\lambda\mathbf{a},\lambda\in\mathbb{R}$.
- Αν $\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$, τότε θα είναι $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$, οπότε $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$. Επιπλέον τα $\mathbf{w},\mathbf{a}$

και $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ είναι συνεπίπεδα και αφού τα διανύσματα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ είναι μη συγγραμμικά, το $\mathbf{w}$ μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων αυτών, δηλαδή ισχύει:

$$\mathbf{w}=\lambda\mathbf{a}+\mu(\mathbf{a}\times\mathbf{b}),\lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

Όμως το $\mathbf{w}$ πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση $\mathbf{a}\times\mathbf{w}=\mathbf{b}$, οπότε



Σχήμα 4. 20

$$\mathbf{a}\times\mathbf{w}=\mathbf{b}\Leftrightarrow\mathbf{a}\times\left[\lambda\mathbf{a}+\mu(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\right]=\mathbf{b}$$

$$\Leftrightarrow\mu\mathbf{a}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{b}\Leftrightarrow\mu\left[(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{a}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})\mathbf{b}\right]=\mathbf{b}\Leftrightarrow\left(\mu|a|^2+1\right)\mathbf{b}=\mathbf{0}$$

$\Leftrightarrow\mu=-\dfrac{1}{|\mathbf{a}|^2}$, αφού είναι $\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$. Άρα έχουμε

$$\mathbf{w}=-\frac{1}{|\mathbf{a}|^2}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})+\lambda\mathbf{a}=\lambda\mathbf{a}+\frac{1}{|\mathbf{a}|^2}(\mathbf{b}\times\mathbf{a}),\lambda\in\mathbb{R}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνονται τα διανύσματα $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \mathbf{b} = \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ και $\mathbf{c} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$.
Να υπολογίσετε τα γινόμενα:
(i) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ (ii) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (iii) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$
(iv) $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{a})$ (v) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ (vi) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$

2. Αν $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbf{\Delta}^3$, να αποδείξετε ότι:
(i) $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$
(ii) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ και $\mathbf{a} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{c}$
(iii) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{c} + \mathbf{a}) = 2(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

3. Αν $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbf{\Delta}^3$, να αποδείξετε ότι:
(i) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})\mathbf{a}$
(ii) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{b} \times \mathbf{c}, \mathbf{c} \times \mathbf{a}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})^2$
(iii) Τα διανύσματα $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbf{\Delta}^3$ είναι συνεπίπεδα, αν, και μόνον αν, τα διανύσματα $\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{b} \times \mathbf{c}, \mathbf{c} \times \mathbf{a}$ είναι συνεπίπεδα.

4. Τα σημεία Α, Β, Γ και Δ έχουν διανύσματα θέσης ως προς το καρτεσιανό σύστημα αναφοράς $Oxyz$, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ και $\mathbf{d}$, αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι:
$\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma, \Delta$ συνεπίπεδα $\Leftrightarrow (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) - (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) + (\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{a}) - (\mathbf{d}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$.

5. Τα σημεία Α, Β και Γ έχουν διανύσματα θέσης ως προς το καρτεσιανό σύστημα αναφοράς $Oxyz$, $\mathbf{a}, \mathbf{b},$ και $\mathbf{c}$, αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι:
$$\mathrm{E}(\mathrm{AB}\Gamma) = \frac{1}{2}\left|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{c} \times \mathbf{a})\right|.$$

6. Αν $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ είναι μη συγγραμμικά μοναδιαία διανύσματα και $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\pi}{3}$,
να βρεθεί το διάνυσμα $\mathbf{u}$ που είναι λύση της εξίσωσης
$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{u})\mathbf{b} + 4\mathbf{a} = 2\mathbf{u}.$$

7. Να αποδείξετε ότι η διανυσματική εξίσωση
$$\mathbf{x} + \mathbf{x} \times \mathbf{a} = \mathbf{b},$$
όπου $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ είναι γνωστά διανύσματα, έχει μοναδική λύση. Στη συνέχεια να προσδιορίσετε τη λύση της εξίσωσης.

8. Αν το διάνυσμα $\mathbf{w}$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{w}\times\mathbf{a})+\mathbf{w}=\mathbf{b},$$

όπου $\mathbf{a},\mathbf{b}$ είναι γνωστά διανύσματα, τότε:

(i) να αποδείξετε ότι $\mathbf{a}\cdot\mathbf{w}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ και $\mathbf{w}\times\mathbf{a}=\left(\dfrac{1}{1+|\mathbf{a}|^2}\right)(\mathbf{b}\times\mathbf{a})$,

(ii) να προσδιορίσετε τη λύση της εξίσωσης.

9. Έστω $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{r}\in\mathbf{\Delta}^3$, $\mathbf{a},\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$ και $t\in\mathbb{R}$. Να προσδιορίσετε την τιμή του t για την οποία έχει λύση ως προς $\mathbf{r}$ η εξίσωση

$$\mathbf{a}\times\mathbf{r}=\mathbf{a}+t\mathbf{b}$$

και στη συνέχεια να προσδιορίσετε τη λύση της εξίσωσης.

10. Αν $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ και $\mathbf{d}$ είναι διανύσματα του $\mathbf{\Delta}^3$, να αποδείξετε ότι:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=(\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{d})\mathbf{b}-(\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d})\mathbf{a}=(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{d})\mathbf{c}-(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})\mathbf{d}$$

11. Αν $\mathbf{a},\mathbf{b}$ και $\mathbf{c}$ είναι μη συνεπίπεδα διανύσματα του $\mathbf{\Delta}^3$, τότε για κάθε άλλο διάνυσμα $\mathbf{d}\in\mathbf{\Delta}^3$, να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικοί συντελεστές $\lambda,\mu,\nu\in\mathbb{R}$ τέτοιοι, ώστε

$$\mathbf{d}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}+\nu\mathbf{c},$$

όπου

$$\lambda=\frac{(\mathbf{d},\mathbf{b},\mathbf{c})}{(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})},\ \mu=\frac{(\mathbf{d},\mathbf{c},\mathbf{a})}{(\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{a})},\ \nu=\frac{(\mathbf{d},\mathbf{a},\mathbf{b})}{(\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{b})}.$$

12. Αν ο πίνακας $\mathrm{A}\in\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ είναι τέτοιος ώστε τα διανύσματα $\mathrm{A}\mathbf{u}$ και $\mathbf{u}$ να είναι κάθετα, για κάθε $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^3$, να αποδείξετε ότι:

(i) $\mathrm{A}^T=-\mathrm{A}$,

(ii) υπάρχει $\boldsymbol{\upsilon}\in\mathbb{R}^3$ τέτοιο, ώστε $\mathrm{A}\mathbf{u}=\boldsymbol{\upsilon}\times\mathbf{u}$, για κάθε $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^3$.