ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ-
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 1(ΑΝΑΛΥΣΗ)

I. Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις και οι αντίστροφές τους

1. Η συνάρτηση $y = \sin^{-1} x$.

Η συνάρτηση

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \to [-1,1],\ x \to y = \sin x$$

είναι 1-1, αφού $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x > 0$, για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$. Άρα ορίζεται η συνάρτηση

$$\sin^{-1} \equiv \arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right], x \to \sin^{-1} x = \arcsin x = y$$

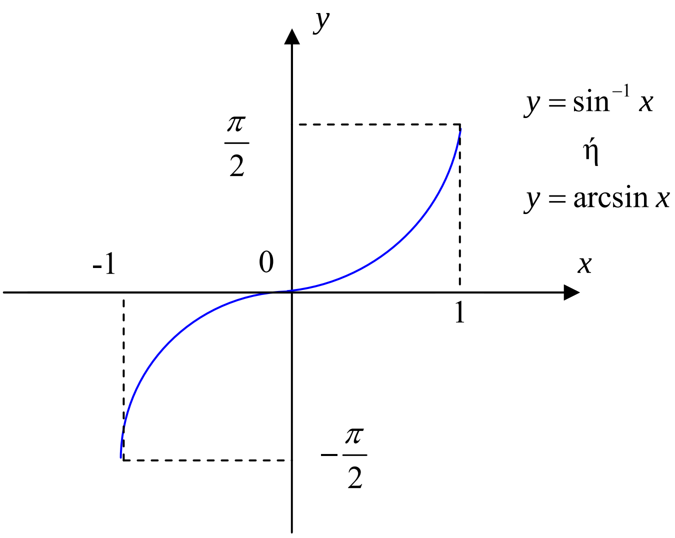
Έτσι έχουμε : $y = \sin^{-1} x \Leftrightarrow \sin y = x$.

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της τελευταίας ισότητας ως προς x, και θεωρώντας $y = y(x)$, λαμβάνουμε για το ανοικτό διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$:

$$\frac{d}{dx}(\sin y) = 1 \Leftrightarrow \frac{d}{dy}(\sin y)\frac{dy}{dx} = 1 \Leftrightarrow (\cos y)\frac{dy}{dx} = 1 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}},$$

αφού για κάθε $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$, ισχύει ότι $\cos y > 0$. Άρα έχουμε

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ x \in (-1,1)}$$



$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + c = \arcsin x + c,\ x \in (-1,1)}$$

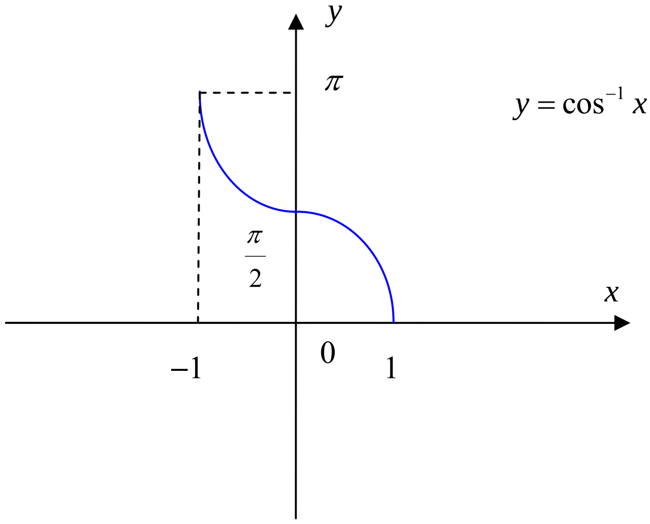
2. Η συνάρτηση $y=\cos^{-1}x$

Ομοίως για τη συνάρτηση $\cos:[0,\pi]\to[-1,1]$, ορίζουμε την αντίστροφή της συνάρτηση

$$\cos^{-1}\equiv\arccos:[-1,1]\to[0,\pi],\ x\to\cos^{-1}x\equiv\arccos x=y$$

Έτσι έχουμε : $y=\cos^{-1}x\Leftrightarrow\cos y=x$, από την οποία με παραγώγιση ως προς x, προκύπτει τελικά ότι:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\cos^{-1}x\right)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ x\in(-1,1)}$$



$$\boxed{\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\cos^{-1}x+c=\arccos x+c,\ x\in(-1,1)}$$

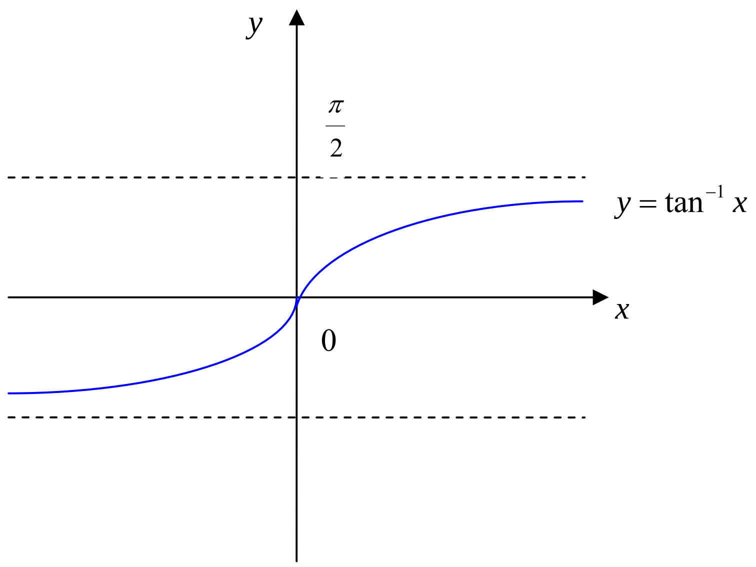
3. Η συνάρτηση $y=\tan^{-1}x$**.**

Η συνάρτηση $\tan:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$ είναι 1-1 στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, αφού $\frac{d}{dx}(\tan x)=1+\tan^2 x>0$, για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Άρα ορίζεται η συνάρτηση

$$\tan^{-1}\equiv\arctan:\mathbb{R}\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),\quad x\to\tan^{-1}x=\arctan x=y\,.$$

Έτσι έχουμε $y=\tan^{-1}x\Leftrightarrow\tan y=x$, οπότε με παραγώγιση της τελευταίας ως προς x λαμβάνουμε τελικά:

$\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}x\right)=\frac{1}{1+x^2},\ x\in\mathbb{R}$
$\int\frac{1}{1+x^2}dx=\tan^{-1}x+c=\arctan x+c,\ x\in\mathbb{R}$



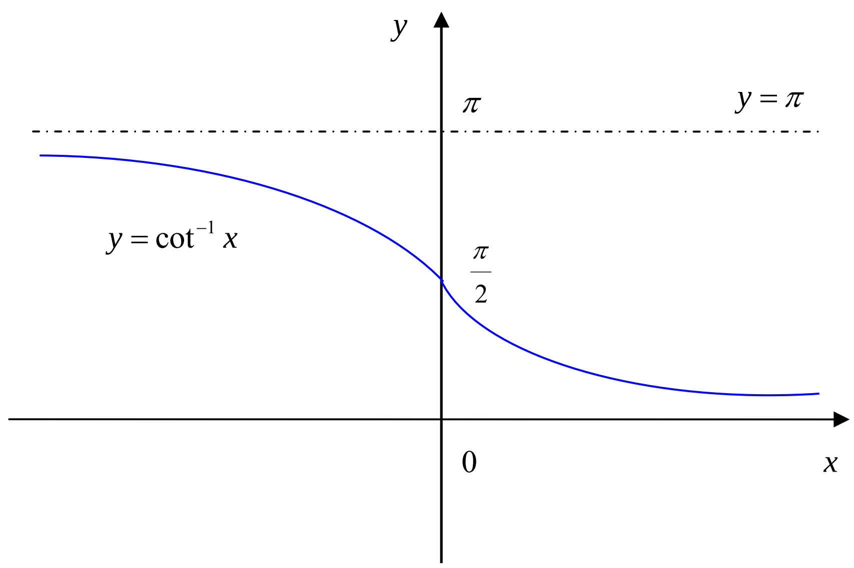
4. Η συνάρτηση $y=\cot^{-1}x$

Ομοίως για τη συνάρτηση $\cot:(0,\pi)\to\mathbb{R}$ ορίζεται η αντίστροφή της συνάρτηση

$$\cot^{-1}\equiv arc\cot:\mathbb{R}\to(0,\pi),x\to\cot^{-1}x=arc\cot x$$

και έχει παράγωγο

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\cot^{-1}x\right)=-\frac{1}{1+x^2},x\in\mathbb{R}}$$



$$\boxed{\int\frac{1}{1+x^2}dx=-\cot^{-1}x+c=-arc\cot x+c,x\in\mathbb{R}}$$

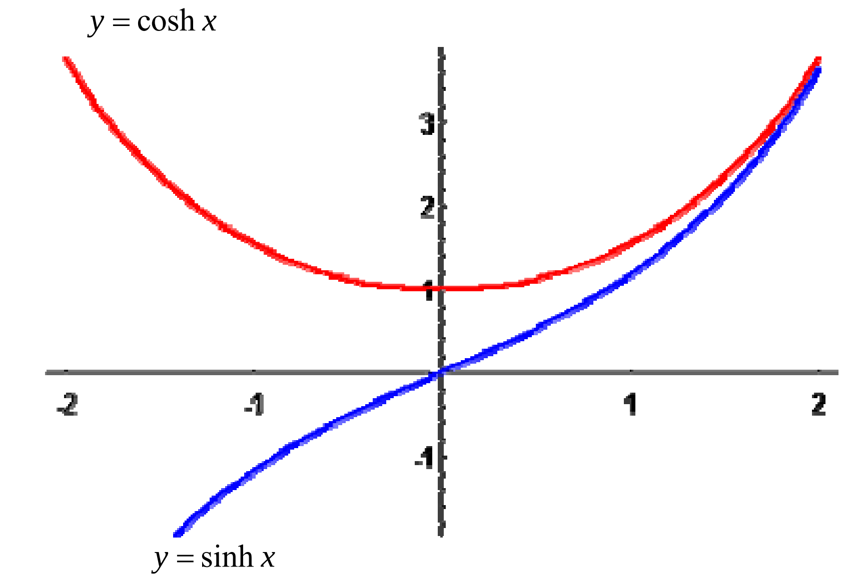
ΙΙ. Οι υπερβολικές συναρτήσεις

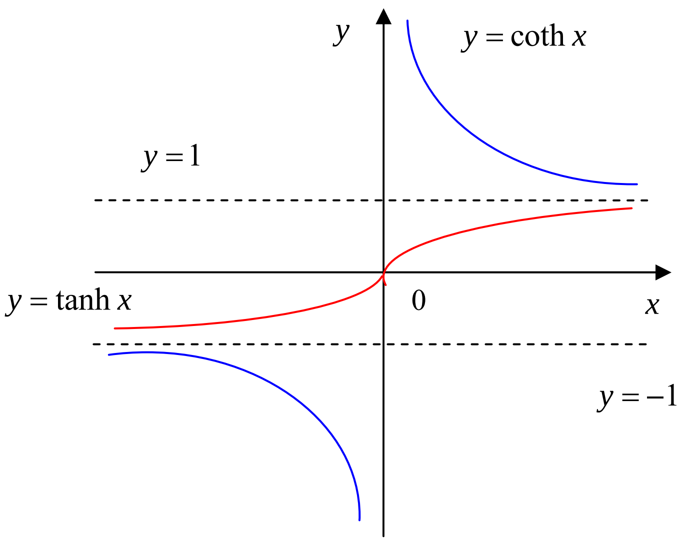
Υπερβολικό ημίτονο

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2},\, x \in \mathbb{R},$$

Υπερβολικό συνημίτονο

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2},\, x \in \mathbb{R}$$





Υπερβολική εφαπτομένη

$$\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},\, x \in \mathbb{R},$$

Υπερβολική συνεφαπτομένη

$$\coth x := \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}},\, x \in \mathbb{R}^*$$

Ιδιότητες

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, $1 - \tanh^2 x = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$, $1 - \coth^2 x = -\dfrac{1}{\sinh^2 x}$,	$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$ $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$ $\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x$ $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$
$\sinh(-x) = -\sinh x,\ \cosh(-x) = \cosh x,\ \tanh(-x) = -\tanh x,\ \coth(-x) = -\coth x$ $\cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x} > 0$	

Παράγωγοι	Ολοκληρώματα
$\frac{d}{dx}\left(\sinh x\right) = \cosh x, x \in R$	$\int \sinh x dx = \cosh x + c$
$\frac{d}{dx}\left(\cosh x\right) = \sinh x, x \in R$	$\int \cosh x dx = \sinh x + c$
$\frac{d}{dx}\left(\tanh x\right) = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$	$\int \frac{1}{\cosh^2 x} dx = \tanh x + c$
$\frac{d}{dx}\left(\coth x\right) = -\frac{1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x$	$\int \frac{1}{\sinh^2 x} dx = -\coth x + c$

III. Οι αντίστροφες των υπερβολικών συναρτήσεων

1. Η συνάρτηση $f(x) = \sinh x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, αφού $f'(x) = \cosh x > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της, η οποία μπορεί να προσδιοριστεί από την επίλυση της εξίσωσης $y = \sinh x$ ως προς x. Έχουμε

$$y = \sinh x \Leftrightarrow y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Leftrightarrow e^x - \frac{1}{e^x} - 2y = 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow e^x = y + \sqrt{y^2 + 1} \text{ ,για κάθε } y \in \mathbb{R} \text{ (αφού } y + \sqrt{y^2 + 1} = e^x > 0)$$

$$\Leftrightarrow x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right), y \in \mathbb{R}.$$

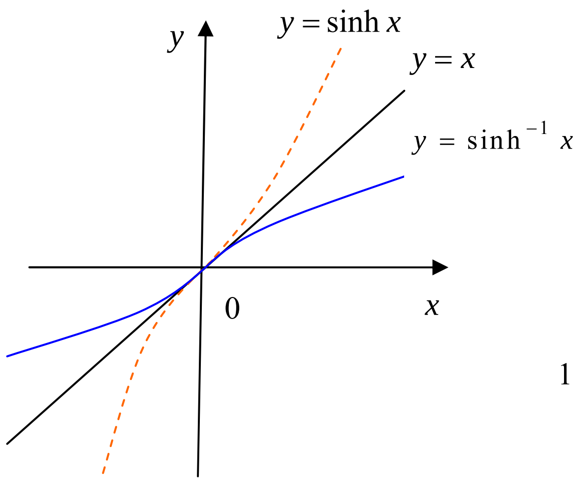
Άρα έχουμε τη συνάρτηση

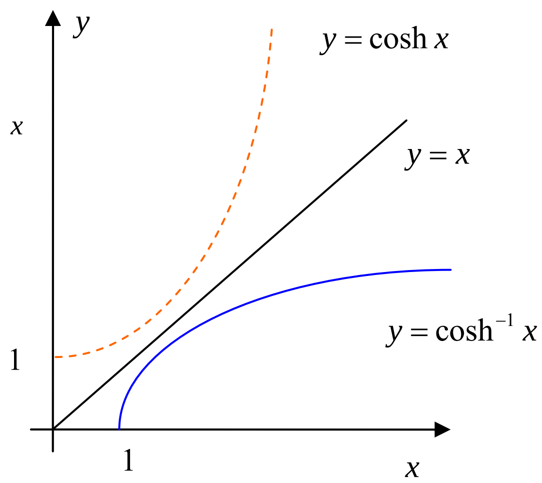
$$\sinh^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to y = \sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right).$$

Επίσης έχουμε :

$$\frac{d}{dx}\left(\sinh^{-1} x\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}},\ x \in \mathbb{R},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) + c = \sinh^{-1} x + c,\ x \in \mathbb{R}.$$





2. Η συνάρτηση $f(x) = \cosh x$ δεν είναι 1-1 στο $\mathbb{R}$, είναι όμως 1-1 στο $[0,+\infty)$, οπότε από την επίλυση της εξίσωσης $y = \cosh x$ στο $[0,+\infty)$ έχουμε

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, x \ge 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 2ye^x + 1 = 0, x \ge 0 \Leftrightarrow e^x = y + \sqrt{y^2 - 1}, \gamma\iota\alpha\ y \ge 1.$$

Άρα ορίζεται η συνάρτηση

$$\boxed{\cosh^{-1} : [1,+\infty) \to [0,+\infty) \subseteq \mathbb{R},\ x \to y = \cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right).}$$

Επίσης έχουμε:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\cosh^{-1} x\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, x > 1, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) + c, x > 1.}$$

3. Η συνάρτηση $f(x) = \tanh x$ είναι 1-1 στο $\mathbb{R}$, αφού $f'(x) = \dfrac{1}{\cosh^2 x} > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της . Επειδή είναι

$$y = \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}, x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (y-1)e^{2x} + (y+1) = 0, x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} = \frac{1+y}{1-y}, |y| < 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right), |y| < 1,$$

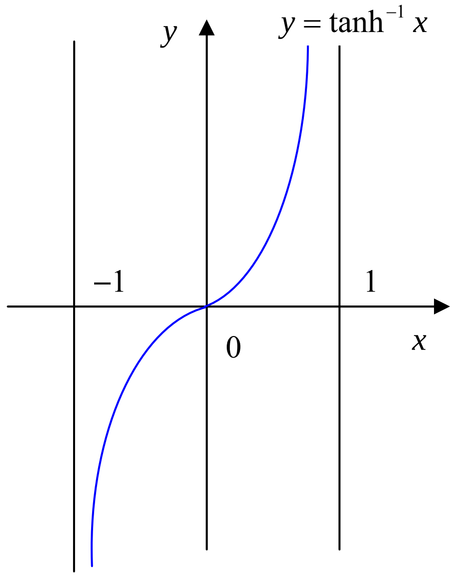
έχουμε τη συνάρτηση :

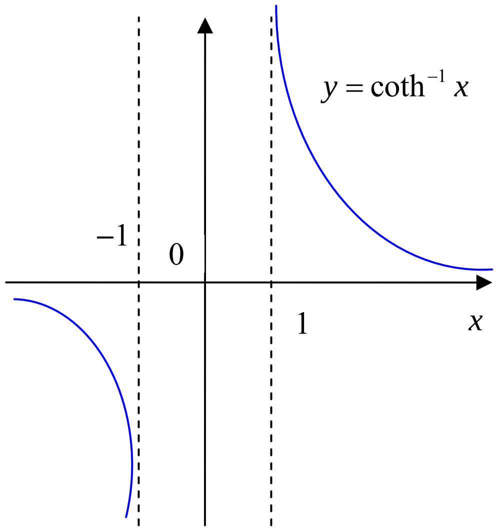
$$\boxed{\tanh^{-1} : (-1,1) \to \mathbb{R}, x \to \tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).}$$

Επιπλέον έχουμε:

$$\frac{d}{dx}\left(\tanh^{-1} x\right) = \frac{1}{1-x^2}, |x| < 1,$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \tanh^{-1} x + c = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + c, |x| < 1.$$





4. Η συνάρτηση $f(x)=\coth x, x\in\mathbb{R}^*$ είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0],[0,+\infty)$ αλλά και 1-1 στο πεδίο ορισμού της $\mathbb{R}^*$, οπότε ορίζεται η αντίστροφη συνάρτησή της. Έχουμε σχετικά:

$$y=\coth x=\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}, x\neq 0 \Leftrightarrow (y-1)e^{2x}=1+y, x\neq 0 \Leftrightarrow e^{2x}=\frac{y+1}{y-1}, για\ |y|>1$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{y+1}{y-1}\right), |y|>1.$$

Άρα ορίζεται η συνάρτηση

$$\coth^{-1}:(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\to\mathbb{R}^* \text{ με τύπο } \coth^{-1}x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right), |x|>1.$$

Επίσης έχουμε:

$$\frac{d}{dx}\left(\coth^{-1}x\right)=\frac{1}{1-x^2}, |x|>1 \text{ και}$$

$$\int\frac{dx}{1-x^2}=\coth^{-1}x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+c, |x|>1.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. (Λογαριθμική παραγώγιση). Δίνονται οι συναρτήσεις :

(α) $y=\dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{(x+1)^{\frac{2}{3}}}, x>0$, **(β)** $y=\sqrt[3]{\dfrac{x(x-2)}{x^2+1}}, x\leq 0 \text{ ή } x\geq 2$, **(γ)** $y=\dfrac{2(x^2+1)}{\sqrt{\cos 2x}}, x\in \mathrm{A}$.

Να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό σύνολο A. Στη συνέχεια θεωρώντας το φυσικό λογάριθμο των δύο μελών των ισοτήτων και παραγωγίζοντας ως προς x να προσδιορίσετε την παράγωγο $y'(x)$ των δεδομένων συναρτήσεων.

2. **(α)**Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση

$$f(x)=\frac{\ln x}{x},\ x>0.$$

(β) Να προσδιορίσετε το πλήθος των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $y=2^x$ και $y=x^2$.

3. Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση

$$f\left(x\right)=xe^{-x^2},x\in\mathbb{R}.$$

Ποια είναι τα ολικά ακρότατα της f ;

4. **(α)** Να αποδείξετε ότι: $\tan x>x$, για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

(β) Να αποδείξετε ότι: $\sinh x>x$, για κάθε $x>0$.

5. Η συνάρτηση $\sec x$ (τέμνουσα x) ορίζεται από την ισότητα

$$\sec x:=\frac{1}{\cos x},\ x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}.$$

(A) Να αποδείξετε ότι ορίζεται η συνάρτηση

$$\sec^{-1}x:(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)\rightarrow[0,\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2},\pi]$$

και ισχύουν:

(i) $\sec^{-1}x=\cos^{-1}\frac{1}{x}$ και **(ii)** $\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x)=\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$, $|x|>1.$

(B) Να γίνει η γραφική παράσταση των συναρτήσεων

$$y=\sec x \text{ και } y=\sec^{-1}x$$

6. Να αποδείξετε τις ισότητες :

(i) $\sin^{-1}x=\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$, $|x|<1.$ **(ii)** $\sec^{-1}x=\begin{cases}\tan^{-1}\sqrt{x^2-1}, & \text{αν } x>1\\ \pi-\tan^{-1}\sqrt{x^2-1}, & \text{αν } x<-1\end{cases}$

7. Να προσδιορίσετε τα όρια :

(α) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{\sin 2x}$, **(β)** $\lim\limits_{x\to1}\frac{1-x+\ln x}{1+\cos\pi x}$, **(γ)** $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$,

(δ) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{1/x^2}$, **(ε)** $\lim\limits_{x\to0}x^{\tan x}$.

8. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x=at, a>0$, να αποδείξετε ότι :

(α) $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c$, $|x|<a$. **(β)** $\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c$, $x\in\mathbb{R}$

(γ) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right|+c=\frac{1}{a}\cos^{-1}\left|\frac{a}{x}\right|+c$, $|x|>a$.