7 Υπερπεπερασμένη Αναδρομή

Στο ω ορίζουμε συναρτήσεις αναδρομικά (ή όπως πολλές φορές λέμε επαγωγικά) π.χ. αν a είναι σύνολο και $\Theta(x,y)$ είναι συνθήκη, τέτοια ώστε $\forall x \exists ! y \Theta(x,y)$ μπορούμε να ορίσουμε την συνάρτηση f με $\mathrm{dom}(f) = \omega$ έτσι ώστε:

$f(0) = a$

$f(n') =$ το μοναδικό z ώστε $\Theta(f(n), z)$

ή όπως αλλοιώς λέμε «υπάρχει μία μοναδική λύση f» των εξισώσεων

$\mathrm{dom}(f) = \omega$

$f(0) = a$

$\forall n \in \omega,\ \Theta(f(n), f(n'))$.

Η f ορίζεται αναδρομικά σημαίνει ότι σε κάθε βήμα χρησιμοποιεί για τον ορισμό της τις τιμές της στα προηγούμενα βήματα.

Παράδειγμα: Μπορούμε να ορίσουμε την πρόσθεση $n+m$ στο ω $(+ : \omega^2 \to \omega)$ με αναδρομή στο m.

$n + 0 = n$

$n + m' = (n+m)'$.

Για όλες αυτές οι συναρτήσεις, που διαισθητικά φαίνεται ότι ορίζονται με αδιαμφισβήτητο τρόπο, πρέπει, στα πλαίσια της αξιωματικής συνολοθεωρίας, να είμαστε σε θέση να αποδεικνύουμε την ύπαρξή τους δηλ. να μπορούμε να αποδεικνύουμε την ύπαρξη μιας μοναδικής f που να είναι λύση των ιδιοτήτων που πρέπει να ικανοποιεί. Το πρόβλημα αυτό λύνεται γενικά με το θεώρημα της αναδρομής.

Έστω $\Psi(x,y)$ προτασιακή συνάρτηση. Γράφουμε $y = \Psi(x)$ και εννοούμε $\Psi(x,y)$. Ο συμβολισμός αυτός δικαιολογείται από το γεγονός ότι $\forall x \exists ! y \Psi(x,y)$. Δηλαδή όταν γράφουμε $a = \Psi(x)$ εννοούμε ότι a είναι το μοναδικό σύνολο z για το οποίο ισχύει η $\Psi(x,z)$.

Ορισμός 7.1 *Εάν Ψ είναι προτασιακή συνάρτηση και A σύνολο γράφουμε* $\Psi \restriction A = \{\langle x,y\rangle \mid x \in A \wedge \Psi(x,y)\} = \{\langle x, \Psi(x)\rangle \mid x \in A\}$.

(το $\Psi \restriction A$ είναι σύνολο, από το αξίωμα της αντικατάστασης).

Σημείωση: $\Psi \restriction \alpha = \{\langle \beta, \Psi(\beta)\rangle \mid \beta < \alpha\}$

Θεώρημα 7.2 (Υπερπεπερασμένη Αναδρομή) *Αν Ψ προτασιακή συνάρτηση, b σύνολο τότε υπάρχει προτασιακή συνάρτηση Γ[12] ώστε οι τιμές της στους διατακτικούς είναι μονοσήμαντα ορισμένες και ισχύει*

$\Gamma(0) = b$

$\Gamma(\alpha) = \Psi(\Gamma \restriction \alpha)$, *για κάθε διατακτικό α.*

[12] Γράφουμε απλώς Γ και εννοούμε μια προτασιακή συνάρτηση $y = \Gamma(x)$.

Η σχέση αυτή ονομάζεται σχέση αναδρομής.

Παρατήρηση: Μονοσήμαντα ορισμένη στους διατακτικούς σημαίνει ότι για κάθε άλλη προτασιακή συνάρτηση Θ η οποία ικανοποιεί την παραπάνω σχέση της αναδρομής ισχύει ότι $\Gamma(\alpha) = \Theta(\alpha)$, για κάθε διατακτικό α.

Απόδειξη: (Σκιαγράφηση)

Ιδέα: Να αποδείξουμε πρώτα ότι για κάθε $\alpha > 0$ υπάρχει *μοναδική* συνάρτηση $f_\alpha : \alpha \to \cdots$, (δηλ. $\mathrm{dom}(f_\alpha = \alpha)$, έτσι ώστε:

- $f_\alpha(0) = b$
- $f_\alpha(\beta) = \Psi(f_\alpha \restriction \beta)\ \forall\beta,\ 0 < \beta < \alpha.$

Επιπλέον $\forall\alpha' < \alpha,\ f_{\alpha'} \subset f_\alpha$. (Εδώ $f_{\alpha'} \subset f_\alpha$ σημαίνει ότι η f_α είναι επέκταση της $f_{\alpha'}$ από το α' στο α).

Η απόδειξη του πιο πάνω γίνεται με υπερπεπερασμένη επαγωγή.

Έστω ότι για όλα τα $\alpha < \beta$ ισχύουν αυτά που διατυπώθηκαν πιο πάνω. (Πρέπει να αποδείξουμε ότι αυτά ισχύουν και για το β δηλαδή ότι υπάρχει τέτοιο f_β).

Τρείς περιπτώσεις

1. $\beta = 1$. Τότε $f_1 = \{\langle 0, b\rangle\}$.
2. β είναι επόμενος διατακτικός > 1, έστω $\beta = \gamma' = \gamma + 1$. Τότε f_γ είναι (από υπόθεση) μοναδικά προσδιορισμένη, θέτουμε $f_\beta = f_\gamma \cup \{\langle\gamma, \Psi(f_\gamma)\rangle\}$.
3. β είναι οριακός διατακτικός, θέτουμε $f_\beta = \cup\{f_\gamma \mid \gamma < \beta\}$.

Σε κάθε μία από τις τρείς περιπτώσεις f_β έχει τις απαιτούμενες ιδιότητες, συμπεριλαμβανομένης της μοναδικότητας. Άρα από υπερπεπερασμένη επαγωγή οι ιδιότητες ισχύουν για κάθε $\alpha > 0$.

Τώρα ορίζουμε προτασιακή συνάρτηση Γ με

$\Gamma(\alpha) = y$, αν $\forall\beta > \alpha\ (f_\beta(\alpha) = y),\ \alpha \geq 0$

$\Gamma(x) = \emptyset$, αν x δεν είναι διατακτικός.

Ο τυπικός ορισμός του Γ θα ήταν

$$\Gamma(x, y) \leftrightarrow \exists\alpha(x = \alpha \wedge \forall\beta > \alpha(f_\beta(\alpha) = y)) \vee (\neg\exists\alpha(x = \alpha) \wedge y = \emptyset))$$

Εύκολα βλέπουμε ότι $\forall x\exists! y\Gamma(x, y)$, επειδή $\forall\beta, \beta' > \alpha,\ f_\beta(\alpha) = f_{\beta'}(\alpha)$. Άρα Γ είναι προτασιακή συνάρτηση, «η Γ είναι η 'ένωση' όλων των f_β». Εκ κατασκευής, Γ έχει τις απαιτούμενες ιδιότητες δηλαδή

$$\Gamma(\alpha) = f_{\alpha+1}(\alpha) = \Psi(f_{\alpha+1} \restriction \alpha) = \Psi(\Gamma \restriction \alpha)$$

Μένει να αποδείξουμε ότι Γ ορίζεται μοναδικά στους διατακτικούς. Ας υποθέσουμε ότι όχι. Έστω ότι υπάρχει κάποια άλλη προτασιακή συνάρτηση

Γ' ώστε $\Gamma'(\alpha) \neq \Gamma(\alpha)$ για κάποιο α. Παίρνουμε το ελάχιστο τέτοιο α έστω β. Τότε

$$\Gamma'(\beta) = \Psi(\Gamma' \restriction \beta) = \Psi(\Gamma \restriction \beta) = \Gamma(\beta), \text{ άτοπο}$$

Πόρισμα 7.3 (Αναδρομή μέχρι ένα δοθέντα διατακτικό) *Αν Ψ προτασιακή συνάρτηση και b σύνολο τότε υπάρχει μία μοναδική συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα δοθέντα διατακτικό δ ώστε*
$f(0) = b$
$f(\alpha) = \Psi(f \restriction \alpha)$ *για κάθε α με $0 < \alpha < \delta$*

Απόδειξη: Ο περιορισμός της Γ, του προηγούμενου θεωρήματος, στον δ είναι συνάρτηση, από αξίωμα αντικατάστασης.

Παρατήρηση: Αν $\delta = \omega$ τότε παίρνουμε ακριβώς την αναδρομή στους φυσικούς αριθμούς.

Παράδειγμα: Για δοθέντα α, ορίζουμε προτασιακή συνάρτηση $\boxed{\alpha+}$ ώστε να ικανοποιεί τις συνθήκες
$\boxed{\alpha+}(0) = \alpha$
$\boxed{\alpha+}(\beta') = (\boxed{\alpha+}(\beta))'$
$\boxed{\alpha+}(\delta) = \cup\{\boxed{\alpha+}(\beta) \mid \beta < \delta\}$
Εδώ η Ψ μέσω της οποίας ορίζεται η $\Gamma = \boxed{\alpha+}$ είναι η εξής:

$$\begin{aligned}\Psi(x,y) \quad \leftrightarrow \quad & (x \text{ είναι συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα επόμενο διατακτικό } \beta' \\ & \qquad\qquad \text{και } \exists z(\langle \beta, z\rangle \in x \wedge y = z')) \\ & \vee (x \text{ είναι συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα οριακό διατακτικό } \delta \\ & \qquad\qquad \text{και } y = \cup\{z \mid \exists \gamma(\langle \gamma, z\rangle \in x)\}) \\ & \vee (x \text{ δεν είναι συνάρτηση με πεδίο ορισμού διατακτικό και } y = \emptyset)\end{aligned}$$

Τότε $\boxed{\alpha+}(\beta) = \Psi(\boxed{\alpha+} \restriction \beta),\ \forall \beta > 0$.
Αν αντί του $\boxed{\alpha+}(\beta)$ γράψουμε $\alpha+\beta$ ο αναδρομικός ορισμός έχει τη μορφή
$\alpha + 0 = \alpha$
$\alpha + \beta' = (\alpha + \beta)'$
$\alpha + \lambda = \sup\{\alpha + \mu \mid \mu < \lambda\}$
Το $\alpha + \beta$ ορίζει την πρόσθεση των διατακτικών.

Μπορούμε να γράφουμε τέτοιους αναδρομικούς ορισμούς και να είμαστε βέβαιοι ότι η προτασιακή συνάρτηση ή η συνάρτηση που εισάγεται μέσω αυτού του ορισμού υπάρχει. Την ύπαρξη μας την εξασφαλίζει το θεώρημα της υπερπεπερασμένης αναδρομής και το πόρισμά του.

Για παράδειγμα μπορούμε να ορίσουμε τον πολλαπλασιασμό $\alpha \cdot \beta$ των διατακτικών ως ακολούθως. Για διατακτικό α γράφουμε την αναδρομική σχέση

$\alpha \cdot 0 = \alpha$
$\alpha \cdot (\beta + 1) = (\alpha \cdot \beta) + \alpha$
$\alpha \cdot \lambda = \sup\{\alpha \cdot \mu \mid \mu < \lambda\}$

Από θεώρημα αναδρομής ξέρουμε ότι η προτασιακή συνάρτηση Γ που δίνει τον πολλαπλασιασμό (δηλ. η Γ ώστε για κάθε β, $\Gamma(\beta)$ είναι το $\alpha \cdot \beta$) υπάρχει και ορίζεται μονοσήμαντα.

Παραδείγματα

1. Για οποιουσδήποτε διατακτικούς α, β, γ ισχύει $(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$.

Απόδειξη: Για να αποδείξουμε ιδιότητες που αναφέρονται σε αντικείμενα που έχουν οριστεί με αναδρομή χρησιμοποιούμε συνήθως (υπερπεπερασμένη) επαγωγή. Θα δουλέψουμε λοιπόν με επαγωγή στον διατακτικό γ. Για να αποδείξουμε ότι η ιδιότητα ισχύει για όλα τα γ αρκεί να αποδείξουμε το επαγωγικό βήμα δηλ. να αποδείξουμε ότι με βάση την υπόθεση ότι η ιδιότητα ισχύει για όλα τα μικρότερα του γ επάγεται ότι η ιδιότητα ισχύει και για το γ. Και επειδή το (κάθε) γ είναι είτε 0 είτε επόμενος είτε οριακός μπορούμε να δουλέψουμε με περιπτώσεις:

1. Αν $\gamma = 0$, $(\alpha + \beta) + 0 = \alpha + \beta = \alpha + (\beta + 0)$.
2. Υποθέτουμε τώρα ότι έχουμε τον επόμενο διατακτικό γ' και ότι η ιδιότητα ισχύει για όλα τα $\beta < \gamma'$. Τότε

   $(\alpha+\beta)+\gamma' = ((\alpha+\beta)+\gamma)' = (\alpha+(\beta+\gamma))' = \alpha+(\beta+\gamma)' = \alpha+(\beta+\gamma')$.
3. Τέλος, υποθέτουμε ότι η ιδιότητα είναι αληθής για όλα τα $\beta < \gamma$, όπου γ είναι οριακός διατακτικός. Τότε

   $(\alpha + \beta) + \gamma = \sup\{(\alpha + \beta) + \delta \mid \delta < \gamma\} = \sup\{\alpha + (\beta + \delta) \mid \delta < \gamma\} = \alpha + \sup\{\beta + \delta \mid \delta < \gamma\} = \alpha + (\beta + \gamma)$.

2. Για $\alpha, \beta \in \omega$, $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

Απόδειξη: Πρώτα αποδεικνύουμε με επαγωγή ότι για κάθε $\gamma \in \omega$

$$0 + \gamma = \gamma \text{ και } 1 + \gamma = \gamma'$$

Για το πρώτο: $0 + 0 = 0$ και αν $0 + \gamma = \gamma$ τότε $0 + \gamma' = (0 + \gamma)' = \gamma'$ άρα αληθές $\forall \gamma \in \omega$.

Για το δεύτερο: $1 + 0 = 1 = 0'$

Αν $1 + \gamma = \gamma'$ τότε $1 + \gamma' = (1 + \gamma)' = \gamma''$ άρα αληθές για όλα τα $\gamma \in \omega$.

Τώρα για να αποδείξουμε $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ για $\alpha, \beta \in \omega$ δουλεύουμε με επαγωγή στο β. έχουμε $\alpha + 0 = \alpha = 0 + \alpha$ όπως έχει αποδειχτεί. Αν $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ τότε

$$\alpha + \beta' = (\alpha + \beta)' = (\beta + \alpha)' = \beta + \alpha' = \beta + (1 + \alpha) = (\beta + 1) + \alpha = \beta' + \alpha$$

όπου η προπροτελευταία ισότητα βγαίνει από το πρώτο μέρος και η προτελευταία από τη μεταβατικότητα.

8 Αρχή της καλής διάταξης

Ορισμός 8.1 *Το σύνολο A μπορεί να διαταχθεί καλώς εάν υπάρχει $R \subseteq A \times A$ έτσι ώστε $\langle A, R\rangle$ είναι καλά διατεταγμένος χώρος. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η R* διατάσσει καλώς *το A ή ότι είναι* καλή διάταξη *του A.*

Θεώρημα 8.2 *Το σύνολο A μπορεί να διαταχθεί καλώς εάν και μόνον εάν υπάρχει διατακτικός α ώστε $A \sim \alpha$. (δηλαδή $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{\alpha}}$)*

Απόδειξη: Έστω $f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \alpha$. Ορίζουμε $R = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in A \,\&\, f(x) \leq f(y)\}$.

Αντίστροφα, έστω $\langle A, R\rangle$ καλή διάταξη. Τότε απ' το θεμελιώδες θεώρημα των διατακτικών υπάρχει διατακτικός α ώστε $\langle A, R\rangle \cong \langle \alpha, \leq\rangle$ και κατά μείζονα λόγο $A \sim \alpha$.

Θεώρημα 8.3 (Αρχή της καλής διάταξης, Zermelo) *(AC)*
Κάθε σύνολο μπορεί να διαταχθεί καλώς.

Απόδειξη:Έστω A σύνολο.

Η ιδέα της απόδειξης είναι να ορίσουμε προτασιακή συνάρτηση Ψ στους διατακτικούς που να επιλέγει διαδοχικά στοιχεία του A έως ότου το A εξαντληθεί.

Έστω b σύνολο που δεν ανήκει στο A ($b \notin A$). Από αξίωμα της επιλογής υπάρχει συνάρτηση επιλογής f στο A δηλ. $\exists f$ ώστε για $B \subseteq A$ και $B \neq \emptyset$, $f(B) \in B$. Επεκτείνουμε την f σε όλο το $\mathcal{P}(A)$ θέτοντας $f^* = f \cup \{\langle \emptyset, b\rangle\}$, δηλ. $f^*(\emptyset) = b$.

Ορίζουμε προτασιακή συνάρτηση Ψ με
$\Psi(0) = f^*(A)$
$\Psi(\alpha) = f^*(A \setminus \{\Psi(\beta) \mid \beta < \alpha\})$

Απ' το θεώρημα της υπερπεπερασμένης αναδρομής υπάρχει προτασιακή συνάρτηση Ψ με αυτές τις ιδιότητες.

Παρατηρήσεις:

1. Η Ψ δεν μπορεί να αντιστοιχήσει δύο διατακτικούς στο ίδιο στοιχείο του A. Διότι έστω $\Psi(\alpha) = \Psi(\alpha') = a \in A$ και $\alpha < \alpha'$. Έχουμε $\Psi(\alpha') = f^*(A \setminus \{\Psi(\beta) \mid \beta < \alpha'\})$ και επειδή $\Psi(\alpha') \neq b$ πρέπει να έχουμε $a (= \Psi(\alpha')) \in A \setminus \{\Psi(\beta) \mid \beta < \alpha'\}$ (αδύνατον). [Διότι μέσω της f^* σε κάθε «στάδιο» α επιλέγεται ένα $\Psi(\alpha)$ που δεν ανήκει στο σύνολο $\{\Psi(\beta) | \beta < \alpha\}$ δηλ. στο σύνολο των προηγηθεισών τιμών της Ψ.]
2. Για κάποιο α πρέπει να έχουμε $\Psi(\alpha) = b$. Έστω όχι. Τότε από την πρώτη παρατήρηση Ψ θα αντιστοιχούσε όλους τους διατακτικούς με αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία επί κάποιου υποσυνόλου A' του A. Θεωρείστε τώρα την Ψ^{-1} (που ορίζεται από $\Psi^{-1}(x, y) \leftrightarrow \Psi(y, x)$). Τότε η Ψ^{-1} είναι προτασιακή συνάρτηση επί του A' με πεδίο τιμών όλους τους διατακτικούς. Αυτό θα είχε

ως αποτέλεσμα η κλάση των διατακτικών να είναι σύνολο (από αξίωμα της αντικατάστασης).

Έστω τώρα α ο ελάχιστος διατακτικός ώστε $\Psi(\alpha) = b$. Τότε $\Psi \upharpoonright \alpha$ είναι απεικόνιση από το α στο A. Από παρατήρηση 1. $\Psi \upharpoonright \alpha$ είναι 1-1. Αλλά $\Psi \upharpoonright \alpha$ είναι και επί. Διότι επειδή $\Psi(\alpha) = f^*(A \setminus \{\Psi(\beta) \mid \beta < \alpha\}) = b$ έχουμε ότι $A \setminus \{\Psi(\beta) \mid \beta < \alpha\} = \emptyset \Rightarrow A \subseteq \{\Psi(\beta) \mid \beta < \alpha\} \Rightarrow \{\Psi(\beta) \mid \beta < \alpha\} = A$.

Αρα τελικά $\Psi \upharpoonright \alpha : \alpha \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow A$.

Ο Zermelo αποδεικνύοντας ότι κάθε σύνολο μπορεί να διαταχθεί καλώς, έλυσε και το πρόβλημα της συγκρισιμότητας των πληθαρίθμων.

Πόρισμα 8.4 *(AC) Κάθε σύνολα A και B έχουν συγκρίσιμη πληθικότητα δηλ. $A \preceq B$ ή $B \preceq A$.*

Απόδειξη: Εστω A και B σύνολα. Τότε από την αρχή της καλής διάταξης υπάρχουν διατακτικοί α και β ώστε $A \sim \alpha$ και $B \sim \beta$. Αλλά $\alpha \leq \beta$ ή $\beta \leq \alpha$ άρα είτε $\exists f : A \rightarrowtail B$ ή $\exists g : B \rightarrowtail A$.

Πόρισμα 8.5 *Η αρχή της καλής διάταξης είναι ισοδύναμη με το αξίωμα της επιλογής.*

Απόδειξη: Εστω A οποιοδήποτε σύνολο και έστω $R \subseteq A \times A$ μία καλή διάταξη του A. Τότε μπορούμε να ορίσουμε μία συνάρτηση επιλογής f στο A με $f(X) =$ «το ελάχιστο στοιχείο του X ως προς τη διάταξη R»
$[f(X)$ ορίζεται για κάθε $X \in \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}]$.

Το αντίστροφο είναι το Θεώρημα 8.3 του Zermelo.

Εφαρμογές του αξιώματος της επιλογής

Ορισμός 8.6 *Εστω $\langle A, \leq \rangle$ μερικά διατεταγμένος χώρος. Ενα σύνολο $X \subseteq A$ είναι* αλυσίδα *αν τα μέλη του X είναι συγκρίσιμα ανά δύο δηλ. $\forall x, y \in X(x \leq y \vee y \leq x)$*

Ενα στοιχείο $a \in A$ είναι άνω φράγμα *για το υποσύνολο X του A εάν $\forall x(x \in X \rightarrow x \leq a)$.*

Λέμε ότι το X έχει άνω φράγμα *αν υπάρχει a που να είναι άνω φράγμα για το X.*

Ένα στοιχείο $a \in A$ λέγεται μεγιστικό *αν δεν υπάρχει $x \in A$ ώστε $a < x$.*

Παρατηρήσεις: 1. Ένα άνω φράγμα του υποσυνόλου X μπορεί να ανήκει ή μπορεί να μην ανήκει στο X.
2. Γενικά μπορεί να υπάρχουν περισσότερα του ενός μεγιστικά στοιχεία του A π.χ. $A = \{x, y, z, z'\}$ και $<= \{\langle x, z\rangle, \langle x, z'\rangle, \langle y, z\rangle, \langle y, z'\rangle\}$.

Θεώρημα 8.7 (λήμμα του Zorn) *(AC) Αν κάθε αλυσίδα, σε κάποιο διατεταγμένο χώρο A, έχει άνω φράγμα τότε ο A έχει τουλάχιστον ένα μεγιστικό στοιχείο.*

Απόδειξη: Έστω $\langle A, \leq \rangle$ έχει τις ιδιότητες του λήμματος ($A \neq \emptyset$). Από AC έστω f συνάρτηση επιλογής στο A. Όπως στην περίπτωση του θεωρήματος του Zermelo $f^* = f \cup \{\langle \emptyset, b \rangle\}$. Ορίζουμε προτασιακή συνάρτηση Ψ στους διατακτικούς

$\Psi(0) = f^*(A)$

$$\begin{aligned}\Psi(\alpha) &= f^*\{x \mid x \in A \wedge \forall \beta(\beta < \alpha \to \Psi(\beta) < x)\} \\ &= f^*(\text{σύνολο των αυστηρών άνω φραγμάτων του συνόλου} \\ &\qquad \text{των προηγουμένως επιλεχθέντων})\end{aligned}$$

Από τον ορισμό του Ψ,

1. αν $\Psi(\alpha) = \Psi(\alpha') \in A$ τότε $\alpha = \alpha'$
2. Για κάποιο $\alpha, \Psi(\alpha) = b$

Αποδείξεις

για 1. Αν $\alpha < \alpha'$ τότε $\Psi(\alpha') =$ κάποιο x ώστε $\alpha < \alpha' \to \Psi(\alpha) < x$.

για 2. Αν δεν υπάρχει τέτοιο α τότε η Ψ^{-1} προτασιακή συνάρτηση θα έδινε από αξίωμα αντικατάστασης ότι η κλάση των διατακτικών είναι σύνολο.

Έστω α ο ελάχιστος διατακτικός με $\Psi(\alpha) = b$. Τότε από 1. $\Psi \restriction \alpha$ είναι μονομορφισμός από το α στο A. Επίσης από τον ορισμό του Ψ για κάθε $\beta, \beta' < \alpha$ ισχύει η

3. $\beta' < \beta \to \Psi(\beta') < \Psi(\beta)$

Συνάγεται ότι α δεν είναι οριακός διατακτικός. Διότι $\{\Psi(\beta) \mid \beta < \alpha\}$ είναι ολικά διατεταγμένο από το $\leq$ (από 3.) Άρα έχει άνω φράγμα $a \in A$. Εάν α ήταν οριακός διατακτικός τότε θα είχαμε $a \notin \{\Psi(\beta) \mid \beta < \alpha\}$ όθεν $a \in \{x \mid x \in A \wedge \forall \beta(\beta < \alpha \to \Psi(\beta) < x)\}$ και έτσι το σύνολο αυτό θα ήταν $\neq \emptyset$. Άρα $\Psi(\alpha) \neq b$ (ατοπο). Άρα α είναι επόμενος έστω $\alpha = \alpha' + 1$. Τότε το $\Psi(\alpha')$ είναι μεγιστικό στοιχείο. Διότι $\{x \mid x \in A \wedge \forall \beta(\beta < \alpha \to \Psi(\beta) < x)\} = \emptyset$ και άρα $\{x \mid x \in A \wedge \Psi(\alpha') < x\} = \emptyset$. Άρα $\Psi(\alpha')$ είναι μεγιστικό.

Θεώρημα 8.8 *(AC) Κάθε διανυσματικός χώρος έχει βάση.*

[Πιο συγκεκριμένα βάση Hamel δηλ. ένα σύνολο X το οποίο είναι γραμμικά ανεξάρτητο και για το οποίο κάθε στοιχείο του χώρου γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του X.]

Απόδειξη: Έστω V είναι διανυσματικός χώρος πάνω στο σώμα F. Ενα υποσύνολο X του V λέγεται γραμμικά ανεξάρτητο αν για οποιαδήποτε $x_1, \ldots, x_n \in X$ και $q_1, \ldots, q_n \in F$ το $q_1 \cdot x_1 + \cdots + q_n \cdot x_n = 0$ συνεπάγεται $q_1 = q_2 = \cdots = q_n = 0$.

Έστω Σ το σύνολο όλων των γραμμικά ανεξάρτητων υποσυνόλων του V. Η διάταξη $\langle \Sigma, \subseteq \rangle$ είναι μερική διάταξη. Έστω τώρα $S \subseteq \Sigma$ είναι μία αλυσίδα δηλ. ολικά διατεταγμένο υποσύνολο του Σ. Θεωρούμε το $\cup S$. Το $\cup S$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο διότι αν $x_1, \ldots, x_n \in \cup S$ τότε $x_1 \in X_1, \ldots, x_n \in X_n$ για κάποια $X_1, \ldots, X_n \in S$. Επειδή $\{X_1, \ldots, X_n\}$ ολικά διατεταγμένο με το $\subseteq$ για κάποιο i έχουμε ότι $x_1, \ldots, x_n \in X_i \;\; 1 \leq i \leq n$. Αρα $\{x_1, \ldots, x_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο επειδή τέτοιο είναι και το X_i. Άρα το $\cup S$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Άρα $\cup S \in \Sigma$ και έτσι είναι άνω φράγμα για το Σ. Άρα από λήμμα του Zorn υπάρχει μεγιστικό στοιχείο του Σ έστω $B \subseteq V$. Τότε επειδή B είναι μεγιστικό το B είναι βάση. (Ασκηση: δείξτε ότι το B είναι βάση).

Το πρόβλημα του Cauchy

Ονομάζουμε μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ αθροιστική αν $f(x+y) = f(x) + f(y), \;\; \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Ερώτηση: Υπάρχει αθροιστική f ώστε f δεν είναι της μορφής $f(x) = \lambda x$;

Παρατήρηση του Cauchy: Εάν υπάρχει τέτοια f τότε είναι ασυνεχής.

Απόδειξη: Προφανώς $f(0) = 0$ [επειδή $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$].

Θέτουμε $f(1) = \lambda$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = f(1 + \cdots + 1) = f(1) + f(1) + \cdots + f(1) = n\lambda$

Ομοίως παίρνουμε ότι $f(\frac{n}{m}) = \lambda \frac{n}{m}$ επειδή $f(\frac{mn}{m}) = f(\frac{n}{m} + \cdots + \frac{n}{m}) = f(\frac{n}{m}) + \cdots + f(\frac{n}{m}) = mf(\frac{n}{m}) = f(n) = n\lambda$ άρα $f(\frac{n}{m}) = (\frac{n}{m})\lambda$.

Αρα για $x \in \mathbb{Q}^+ \to f(x) = \lambda x$

για $x \in \mathbb{Q}^+$ $f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x) \Rightarrow f(-x) = -f(x)$ άρα $f(-x) = -\lambda x = \lambda(-x)$

άρα $\forall x \in \mathbb{Q} \;\; f(x) = \lambda x$

Έστω τώρα f είναι συνεχής και $x \in \mathbb{R}$. Εάν $q_1, q_2, \ldots$ ακολουθία ρητών ώστε $\lim_{i\to\infty} q_i = x$ τότε $f(x) = \lim_{i\to\infty} f(q_i) = \lim_{i\to\infty} \lambda q_i = \lambda \lim_{i\to\infty} q_i = \lambda x$ δηλ. $f(x) = \lambda x$.

Θεώρημα 8.9 (AC, Hamel) *Υπάρχει αθροιστική $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία δεν είναι της μορφής $f(x) = \lambda x$.*

Απόδειξη: Θεωρούμε το $\mathbb{R}$ ως ένα διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{Q}$. Από θεώρημα 8.8 υπάρχει βάση Hamel B του $\mathbb{R}$ επί του $\mathbb{Q}$. Κάθε στοιχείο $x \in \mathbb{R}$ έχει μοναδικη αναπαράσταση

$(*)$ $x = q_1 b_1 + \cdots + q_n b_n$ με $b_1, \ldots, b_n \in B$ και $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

Έστω b κάποιο επιλεγμένο στοιχείο του B. Ορίζουμε f με

$f(x) =$ παράγων του b στην αναπαράσταση $(*)$ όπου ο παράγων ισούται με 0 αν b δεν εμφανίζεται στην αναπαράσταση.

Προφανώς f είναι αθροιστική. Και f δεν είναι της μορφής λx επειδή η f παίρνει μόνον ρητές τιμές. (δεν μπορεί μία συνάρτηση να είναι της μορφής $f(x) = \lambda x$ και να παίρνει μόνον ρητές τιμές.)

Από θεώρημα 8.9 μπορούμε να συμπεράνουμε ότι υπάρχει συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που είναι πολλαπλασιαστική και που δεν είναι της μορφής $g(x) = |x|^\lambda$.

Παίρνουμε $g(x) = e^{f(\log|x|)}$.

Δεν υπάρχει $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που να είναι και αθροιστική και πολλαπλασιαστική (πλην της ταυτοτικής). Αλλά ισχύει (Segre, 1947): Υπάρχει $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ώστε f είναι και αθροιστική και πολλαπλασιαστική.

Λήμμα 8.10 (Hartogs) *Για κάθε σύνολο A υπάρχει διατακτικός β έτσι ώστε δεν υπάρχει μονομορφισμός από το β στο A,$(\neg\exists f : \beta \rightarrowtail A)$.*

Απόδειξη: (αν υποθέσουμε το AC είναι τετριμένο. Από αρχή της καλής διάταξης $\exists\beta \sim \mathcal{P}(A)$).

Θα το αποδείξουμε χωρίς τη χρήση του αξιώματος της επιλογής. Έστω $\Sigma = \{R \mid R$ είναι καλή διάταξη ενός υποσυνόλου του $A\}$. Το Σ είναι υποσύνολο του $\mathcal{P}(A \times A)$ άρα είναι σύνολο. Ορίζουμε προτασιακή συνάρτηση Ψ στο Σ ως ακολούθως:

$$\Psi(R) = \text{ ο μοναδικός διατακτικός } \alpha \text{ ώστε } \langle \mathrm{dom}(R), R\rangle \cong \langle \alpha, \leq\rangle$$

Είναι καλά ορισμένη επειδή σε κάθε καλή διάταξη αντιστοιχεί ένας μοναδικός διατακτικός ισομορφικός με αυτήν. Από το αξίωμα της αντικατάστασης η συλλογή των εικόνων του Ψ στο domain Σ είναι σύνολο. Άρα το πεδίο τιμών δεν μπορεί να περιλαμβάνει όλους τους διατακτικούς (γιατί;). Έστω β ο ελάχιστος διατακτικός που δεν βρίσκεται στο πεδίο τιμών της Ψ. Τότε δεν υπάρχει μονομορφισμός $\beta \rightarrowtail B$. Διότι αν υπήρχε θα υπήρχε αντιστοιχία $f : \beta \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow B$ για κάποιο $B \subseteq A$. Αλλά ένα τέτοιο f εισάγει μια καλή διάταξη R του B ώστε $\Psi(R) = \beta$, άτοπο λόγω επιλογής του β.

Θεώρημα 8.11 *$AC \Leftrightarrow$ Οποιαδήποτε δύο σύνολα έχουν συγκρίσιμη πληθικότητα.*

Απόδειξη: $\Rightarrow$: Έχει ήδη αποδειχθεί.

$\Leftarrow$: Έστω A σύνολο. Από θεώρημα 8.10 $\exists\beta$ ώστε $\neg\exists$ μονομορφισμός από β στο A. Από υπόθεση $A \preceq \beta$ ή $\beta \preceq A$. Επειδή αποκλείεται το δεύτερο, έχουμε $A \preceq \beta$ δηλ. $\exists f : A \to \beta$.

Ορίζουμε για $\emptyset \neq X \subseteq A,\ f(X) = f^{-1}($του ελάχιστου α ώστε $f(x) = \alpha$ για κάποιο $x \in X)$.

Το αξίωμα της επιλογής μέσα στα πλαίσια της συνολοθεωρίας ZF είναι ισοδύναμο με κάθε μία από τις ακόλουθες προτάσεις. Αυτό σημαίνει ότι αντί να χρησιμοποιήσουμε το αξίωμα της επιλογής στην πορεία μιας απόδειξης μπορούμε ισοδύναμα να χρησιμοποιήσουμε οποιαδήποτε από αυτές τις προτάσεις.

Ισοδυναμίες

1. Αξίωμα επιλογής
2. Συγκρισιμότητα πληθαρίθμων
3. Αρχή καλής διάταξης
4. Λήμμα του Zorn

Όλα έχουν αποδειχθεί ισοδύναμα εκτός από το λήμμα του Zorn. Αρκεί να αποδείξουμε οτι απο το λήμμα του Zorn συνεπάγεται οποιοδήποτε από τα υπόλοιπα τρία.

Θεώρημα 8.12 *Λήμμα του Zorn* $\Rightarrow$ *Συγκρισιμότητα πληθαρίθμων.*

Απόδειξη: Εστω ότι το λήμμα του Zorn ισχύει και έστω A και B σύνολα. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $A \preceq B$ ή $B \preceq A$ δηλ. $\exists f : A \rightarrowtail B$ ή $\exists f : B \rightarrowtail A$.

Έστω $D = \{f \mid f$ είναι 1-1 συνάρτηση με $\mathrm{dom}(f) \subseteq A$ και $\mathrm{Range}(f) \subseteq B\}$.

Κάθε $f \in D$ είναι σύνολο ζευγών. Το D είναι μερικά διατεταγμένο από το $\subseteq$. Έστω τώρα K είναι μία αλυσίδα στο D. Αρκεί να αποδείξουμε ότι το D έχει άνω φραγμα για να ικανοποιούνται οι προυποθέσεις του λήμματος του Zorn. Παίρνουμε το $\cup K$, το οποίο είναι ένα σύνολο ζευγών. Πρέπει να αποδείξουμε ότι $\cup K \in D$. έστω $\langle x, y\rangle, \langle z, t\rangle \in \cup K$. Τότε $\exists f_1, f_2 \in K$ ώστε $\langle x, y\rangle \in f_1, \langle z, t\rangle \in f_2$.

Επειδή K γραμμικά διατεταγμένο από το $\subseteq$ θα έχουμε $f_1 \subseteq f_2$ ή $f_2 \subseteq f_1$, έστω $f_1 \subseteq f_2$ δηλ. $\langle x, y\rangle, \langle z, t\rangle \in f_2$. Τότε

1. $x \in A \,\&\, y \in B$
2. Αν $x = z$ τότε $y = t$, επειδή f_2 είναι συνάρτηση
3. Αν $y = t$ τότε $x = z$ επειδή f_2 είναι 1-1

Άρα από 2. $\cup K$ είναι συνάρτηση, από 1. $\mathrm{dom}(\cup K) \subseteq A$ και $\mathrm{Range}(\cup K) \subseteq B$, από 3. $\cup K$ είναι 1-1. Άρα $\cup K \in D$. Άρα από Zorn έστω f είναι το μεγιστικό στοιχείο του D ως προς την $\subseteq$.

Υπάρχουν τρείς περιπτώσεις:

Περ1. $\mathrm{dom}(f) \subset A, \mathrm{Range}(f) \subset B$. Εστω $a \in A \setminus \mathrm{dom}(f)$ και $b \in B \setminus \mathrm{Range}(f)$. Τότε $f \subset f \cup \{\langle a, b\rangle\}$, άτοπο επειδή f μεγιστικό.

Περ2. $\mathrm{dom}(f) = A$. Τότε $f : A \rightarrowtail B$

Περ3. $\mathrm{Range}(f) = B$, τότε $f^{-1} : B \rightarrowtail A$.

Σημείωση: Είναι το αξίωμα της επιλογής, και κατά συνέπεια κάθε ισοδύναμη μ' αυτό πρόταση, αληθές; Μήπως μπορούμε να το αποδείξουμε, όπως στην αρχή των σημειώσεων αποδείξαμε την αρχή του διαχωρισμού, χρησιμοποιώντας τα αξιώματα ZF; Η απάντηση είναι ότι δεν μπορούμε να το αποδείξουμε και να αποφασίσουμε έτσι και το πρόβλημα της αλήθειας. Διότι έχει αποδειχθεί ότι:

- αν η θεωρία ZF είναι συνεπής τότε η θεωρία ZF+AC είναι συνεπής, και
- αν η θεωρία ZF είναι συνεπής τότε η θεωρία ZF+$\neg$AC είναι συνεπής.

Δηλαδή δεν μπορούμε να αποδείξουμε ούτε το AC ούτε την αρνησή του. Κατά συνέπεια το AC είναι ένα γνήσιο αξίωμα, το οποίο οι μαθηματικοί το δέχονται ως αληθές λόγω των καλών συνεπειών (μερικές έχουμε ήδη δεί) που έχει στα μαθηματικά.

9 Πληθάριθμοι=Αρχικοί διατακτικοί

Ορισμός 9.1 Αρχικός διατακτικός *ή* πληθάριθμος *είναι κάθε διατακτικός* α *τέτοιος ώστε*

$$\forall \beta < \alpha,\ \overline{\overline{\beta}} < \overline{\overline{\alpha}} \quad (\delta\eta\lambda.\ \beta < \alpha \rightarrow \beta \prec \alpha)$$

π.χ. ω είναι πληθάριθμος.

Ισχύει (από το θεώρημα του Hartogs): $\forall\alpha\exists\beta\ \alpha \prec \beta$.

(Διότι αν α διατακτικός, από Hartogs υπάρχει β ώστε $\neg(\beta \preccurlyeq \alpha)$. Αρα δεν μπορούμε να έχουμε $\beta \leq \alpha$. Άρα $\alpha < \beta$ δηλ. $\alpha \preccurlyeq \beta$ και επειδή $\neg(\beta \preccurlyeq \alpha)$ έχουμε τελικά $\alpha \prec \beta$.

Από τα παραπάνω $\exists\alpha$ ώστε $\omega \prec \alpha$. 'Εστω ω_1 ο ελάχιστος διατακτικός α ώστε $\omega \prec \alpha$. Στη συνέχεια ω_2 ο ελάχιστος α ώστε $\omega_1 \prec \alpha$ κ.ο.κ.

Πρόταση 9.2 $\alpha < \omega_1 \rightarrow \alpha \prec \omega_1$ *(ομοίως* $\alpha < \omega_2 \rightarrow \alpha \prec \omega_2$ *κ.λ.π.)*

Απόδειξη: 'Εστω $\alpha < \omega_1$. Από ορισμό του ω_1 έχουμε $\neg(\omega \prec \alpha)$. Άρα $\alpha \preccurlyeq \omega$ άρα αν $\omega_1 \preccurlyeq \alpha \Rightarrow \omega_1 \preccurlyeq \omega \Rightarrow \neg(\omega \prec \omega_1)$ άτοπο. άρα $\neg(\omega_1 \preccurlyeq \alpha)$ άρα $\alpha \prec \omega_1$.

Παραδείγματα

1. Από παραπάνω πρόταση ω_1 (και βέβαια $\omega_2, \omega_3, \ldots$) είναι πληθάριθμοι.

   Γενικώτερα αν ω_α είναι πληθάριθμος τότε $\omega_{\alpha+1} =$ ο ελάχιστος β ώστε $\omega_\alpha \prec \beta$, είναι πληθάριθμος [ο επόμενος πληθάριθμος].

2. $n \in \omega \Rightarrow n$ είναι πληθάριθμος.

3. ω είναι πληθάριθμος.

Πρόταση 9.3 *Οι άπειροι πληθάριθμοι είναι οριακοί διατακτικοί*

Απόδειξη: 'Εστω β άπειρος και $\beta = \alpha'$. Θα δείξουμε ότι β δεν είναι πληθικός.
Επειδή $\omega \leq \beta$ & ω οριακός, $\omega < \beta$ άρα $\omega \leq \alpha$.
Ορίζουμε $g : \alpha' \rightarrow \alpha$ με
$g(\alpha) = 0$
$g(\gamma) = \gamma'$ αν $\gamma < \omega$
$g(\gamma) = \gamma$ αν $\omega \leq \gamma < \alpha$
g είναι 1-1, άρα $\beta = \alpha' \preccurlyeq \alpha$, άρα $\neg(\alpha \prec \beta)$ και β δεν είναι πληθάριθμος.

Μπορούμε να ορίσουμε μία προτασιακή συνάρτηση που «καταγράφει» όλους τους πληθαρίθμους δηλ. από θεώρημα υπερπεπερασμένης αναδρομής υπάρχει ω_α ώστε
$\omega_0 = \omega$
$\omega_{\alpha+1} =$ ο επόμενος πληθάριθμος του ω_α
$\omega_\alpha = sup\{\omega_\beta \mid \beta < \alpha\}$ αν α οριακός

Κάθε πληθάριθμος α ισούται με κάποιο ω_β. Δηλαδή ο τελεστής ω_α καταγράφει όλους τους πληθαρίθμους.

Σημείωση: Το ω_α χρησιμοποιούνταν παλαιότερα, πριν ταυτιστούν οι «πληθικοί αριθμοί» με τους αρχικούς διατακτικούς. Τώρα αντί του ω_α χρησιμοποιούμε το $\aleph_\alpha$ δηλ.

$\aleph_0 = \omega$

$\aleph_{\alpha+1} =$ ο επόμενος πληθικός του $\aleph_\alpha$

$\aleph_\alpha = sup\{\aleph_\beta \mid \beta < \alpha\}$, αν α είναι οριακός

Εχουμε λοιπόν τη σειρά

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_\omega, \aleph_{\omega+1}, \ldots, \aleph_{\aleph_1}, \ldots, \aleph_{\aleph_2}, \ldots, \aleph_{\aleph_{\aleph_1}}, \ldots$$

Από AC κάθε πληθικός αριθμός συνόλου A ταυτίζεται με κάποι $\aleph_\alpha$. Τι γίνεται με το $\mathbb{R}$; Ξέρουμε ότι $\aleph_0 < \overline{\overline{\mathbb{R}}}$. Πόσο είναι το $\overline{\overline{\mathbb{R}}} = 2^{\aleph_0}$; Πρέπει για κάποιο α να έχουμε $2^{\aleph_0} = \aleph_\alpha$.

CH (Υπόθεση του συνεχούς - Continuum Hypothesis): $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ (Cantor).

Ισοδύναμα: $\neg\exists$ σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ ώστε $\aleph_0 = \overline{\overline{\mathbb{N}}} < \overline{\overline{A}} < \overline{\overline{\mathbb{R}}} = 2^{\aleph_0}$

Είναι η υπόθεση του συνεχούς αληθής; Ο Cantor υπέθεσε πως ναι αλλά δεν μπόρεσε να την αποδείξει. Έκτοτε είχαμε τα εξής αποτελέσματα:

Gödel (1940): ZF συνεπής $\Rightarrow$ ZF+AC+CH συνεπής. (Όπου ZF είναι η αξιωματική θεωρία των Zermelo-Fraenkel και ZF+AC+CH αν σ'αυτήν προσθέσουμε το αξίωμα της επιλογής AC και τη υπόθεση του συνεχούς CH).

Άρα είναι αδύνατο να μπορούμε να αποδείξουμε την άρνησή της. Ευελπιστούμε λοιπόν ότι μπορούμε να την αποδείξουμε. Αλλά

Cohen (1963): ZF συνεπής $\Rightarrow$ ZF+AC+$\neg$CH συνεπής. (όπου $\neg$CH είναι η άρνηση της υποθέσεως του συνεχούς CH).

Άρα δεν μπορούμε να αποδείξουμε την CH.

Μένει λοιπόν ανοιχτό, με ποιο από τα $\aleph_\alpha$ ταυτίζεται το $2^{\aleph_0}$.

Μπορούμε να αποκλείσουμε κάποια;

Θεώρημα του König $\Rightarrow$ $2^{\aleph_0} \neq \aleph_\omega$.

Θεώρημα 9.4 (König) *(AC) Έστω $< A_i >_{i\in I}$ και $< B_i >_{i\in I}$ οικογένειες, $I \neq \emptyset$, έτσι ώστε $\forall i \in I$, $\overline{\overline{A_i}} < \overline{\overline{B_i}}$. Τότε $\overline{\overline{\cup_{i\in I} A_i}} < \overline{\overline{\prod_{i\in I} B_i}}$.*

Απόδειξη: Έστω όχι. Από τριχοτομία $\overline{\overline{\prod_{i\in I} B_i}} \leq \overline{\overline{\cup_{i\in I} A_i}}$. Άρα από προηγούμενο λήμμα (βλ. σημειώσεις) $\exists f : \cup_{i\in I} A_i \twoheadrightarrow \prod_{i\in I} B_i$.

Για κάθε i ορίζουμε $f_i : A_i \to B_i$ με $f_i(a) = (f(a))_{(i)}$ [δηλαδή το $f(a) : I \to \cup B_i$ και $(f(a))_{(i)}$ είναι η τιμή του $f(a)$ στο i.]

Κανένα f_i δεν μπορεί να είναι επιμορφισμός (επειδή $\overline{\overline{A_i}} < \overline{\overline{B_i}}$).

Άρα $c_i = \{x \mid x \in B_i \wedge x \neq (f(a))_{(i)}$ *για καννα* $a \in A_i\} = B_i \setminus f_i[A_i] \neq \emptyset$. Άρα $\prod_{i \in I} c_i \neq \emptyset$ από AC.

Αλλά αν $h \in \prod_{i \in I} c_i$ φανερά έχουμε $h \in \prod_{i \in I} B_i$. Αλλά h δεν μπορεί να είναι στο range της f επειδή $a \in \cup_{i \in I} A_i \Rightarrow\ a \in A_i$ *για κποιο* i $\Rightarrow (f(a))_{(i)} \notin c_i$ *για κποιο* i $\Rightarrow f(a) \neq h$. Άτοπο, επειδή f επιμορφισμός.

Πόρισμα 9.5 $\mathbb{R}$ *δεν είναι της μορφής* $\cup_{i \in \omega} A_i$, *όταν* $\overline{\overline{A_i}} < 2^{\aleph_0}$ *για* $\forall i \in \omega$.

Απόδειξη: Θέτουμε $B_i = \mathbb{R}$ στο θεώρημα του König. Έχουμε τότε αν $\overline{\overline{A_i}} < 2^{\aleph_0}\ (= \overline{\overline{\mathbb{R}}})$ από λήμμα του König.

$\overline{\overline{\cup_{i \in \omega} A_i}} < \overline{\overline{\prod_{i \in \omega} B_i}} = \overline{\overline{{}^{\omega}\mathbb{R}}} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$. Άρα $\overline{\overline{\cup_{i \in \omega} A_i}} \neq \overline{\overline{\mathbb{R}}}$.

Πόρισμα 9.6 $2^{\aleph_0} \neq \aleph_\omega$.

Απόδειξη: Από ορισμό $\aleph_\omega = \cup_{i \in \omega} S_i$.

αν $\aleph_\omega = 2^{\aleph_0} = \cup_{i \in \omega} S_i$ τότε επειδή $S_i < \cup_{i \in \omega} S_i = \aleph_\omega$ έχουμε $S_i < \aleph_\omega = 2^{\aleph_0}$ άρα από πόρισμα $\cup S_i \neq 2^{\aleph_0}$, άτοπο.