5 Καλές Διατάξεις

Συμβολισμός

Αν $\langle A, R\rangle$ είναι δομή διάταξης (διατεταγμένος χώρος) και $B \subseteq A$ τότε $R \restriction B$ συμβολίζει το $R \cap (B \times B)$ δηλ. τον περιορισμό της σχέσης R στο B. Αν $\langle A, \leq\rangle$ είναι μερικά διατεταγμένος χώρος θα συμβολίζουμε το $\langle B, \leq\restriction B\rangle$ με $\langle B, \leq\rangle$ (όταν δεν υπάρχει αμφιβολία για το τι εννοούμε).

Με $x < y$ θα συμβολίζουμε το $x \leq y \wedge x \neq y$.

Ορισμός 5.1 *Ένας ολικά διατεταγμένος χώρος $\langle A, \leq\rangle$ ικανοποιεί την* αρχή της υπερπεπερασμένης επαγωγής *(ΑΥΕ) εάν για κάθε μονομελή συνθήκη Φ έχουμε ότι*

$$\forall a \in A\{\forall x \in A\,(x < a \to \Phi(x)) \to \Phi(a)\} \to \forall x \in A\,\Phi(x)$$

Αναλυτικότερα αυτό σημαίνει ότι, για να αποδείξουμε ότι η συνθήκη $\Phi(x)$ ισχύει για όλα τα x στο A, αρκεί να αποδείξουμε ότι για το τυχόν $a \in A$, η υπόθεση ότι η συνθήκη ισχύει για όλα τα μικρότερα του a επάγει την ισχύ της συνθήκης για το a, δηλ. από την υπόθεση $\forall x \in A(x < a \to \Phi(x))$ [που σημαίνει ότι η Φ ικανοποιείται από όλα τα στοιχεία που είναι μικρότερα από a] μπορούμε λογικά να συμπεράνουμε ότι $\Phi(a)$.

Ορισμός 5.2 *Ένας ολικά διατεταγμένος χώρος $< A, \leq >$ είναι* καλή διάταξη *ή* καλά διατεταγμένος χώρος *εάν κάθε μη κενό υποσύνολο $B \subseteq A$ έχει ελάχιστο στοιχείο ως προς τη διάταξη $\leq$. [Ένα στοιχείο b του B είναι* ελάχιστο *αν $\forall x(x \in B \to b \leq x)$]*

$$(AYE) \quad \forall a \in A\{\forall x \in A(x < a \to \Phi(x)) \to \Phi(a)\} \to \forall x \in A\ \Phi(x)$$

Αυτό είναι ισοδύναμο με το: Για κάθε σύνολο B

$$\forall a \in A\{\forall x \in A\,(x < a \to x \in B) \to a \in B\} \to A \subseteq B$$

(Αρκεί να Θέσουμε $\Phi(x) \leftrightarrow x \in B$)

Θεώρημα 5.3 *Εάν $\langle A, \leq\rangle$ είναι καλή διάταξη τότε η ΑΥΕ ικανοποιείται στο $\langle A, \leq\rangle$.*

Απόδειξη:Ας υποθέσουμε ότι δεν ισχύει. Τότε ισχύει η υπόθεση της ΑΥΕ και δεν ισχύει το συμπέρασμά της, δηλ. το $\forall x \in A\,\Phi(x)$, πράγμα που σημαίνει ότι υπάρχει ένα $y \in A$ για το οποίο η $\Phi(y)$ δεν ισχύει. Τότε το $B = \{y \mid y \in A \wedge \neg\Phi(y)\} \neq \emptyset$. Άρα B έχει ελάχιστο στοιχείο έστω $b \in B$. Αφού το b είναι το ελάχιστο στοιχείο για το οποίο δεν ισχύει η Φ (είναι $\neg\Phi(b)$) έχουμε ότι $\forall x \in A\,(x < b \to \Phi(x))$, δηλαδή η συνθήκη ισχύει για όλα τα μικρότερα του b. Αλλά από την υπόθεση της ΑΥΕ έχουμε ότι $\forall b \in A(\forall x \in A(x < b \to \Phi(x)) \to \Phi(b))$. Άρα ως συμπέρασμα ισχύει ότι $\Phi(b)$, άτοπο διότι ήδη έχουμε ότι $\neg\Phi(b)$.

Ορισμός 5.4 *Έστω $\langle A, \leq \rangle$ και $\langle B, \leq' \rangle$ διατάξεις. Κάθε συνάρτηση $f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow B$ που είναι $1-1$ και επί και για την οποία ισχύει ότι*

$$x \leq y \leftrightarrow f(x) \leq' f(y)$$

λέγεται ισομορφισμός από το A στο B. Είναι προφανές ότι αν f είναι ισομορφισμός από το A στο B τότε η f^{-1} είναι ισομορφισμός από το B στο A. Αν μεταξύ των διατάξεων υπάρχει ένας ισομορφισμός τότε λέμε ότι οι $\langle A, \leq \rangle$ και $\langle B, \leq' \rangle$ (ή πιο απλά οι A και B) είναι ισομορφικές και το συμβολίζουμε με $\langle A, \leq \rangle \cong \langle B, \leq' \rangle$.

Παράδειγμα: Έστω η διάταξη $\langle \mathbb{R}^+, \leq \rangle$ όπου $\leq$ είναι η συνήθης διάταξη των πραγματικών αριθμών. Τότε οι συναρτήσεις f, g, h που ορίζονται αντίστοιχα με $f(x) = x$, $g(x) = x^2$ και $h(x) = e^x - 1$ είναι όλες διαφορετικοί ισομορφισμοί από το $\mathbb{R}^+$ στο $\mathbb{R}^+$. Βλέπουμε ότι είναι δυνατόν να έχουμε πολλούς ισομορφισμούς από μια διάταξη σε μια άλλη. Η διάταξη στο $\mathbb{R}^+$ δεν είναι καλή διάταξη. Αντιθέτως, μεταξύ δύο καλών διατάξεων μπορεί να υπάρχει μόνον ένας ισομορφισμός.

Θεώρημα 5.5 *Έστω $\langle A, \leq \rangle$ και $\langle B, \leq' \rangle$ είναι καλές διατάξεις. Τότε υπάρχει το πολύ ένας ισομορφισμός f από το A στο B, $f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow B \wedge (x \leq y \leftrightarrow f(x) \leq' f(y))$.*[9]

Απόδειξη: Έστω ότι υπάρχουν δύο διαφορετικοί ισομορφισμοί f και g από το A επί του B. Τότε, επειδή η σύνθεση ισομορφισμών είναι ισομορφισμός θα έχουμε ότι $f^{-1} \circ g$ είναι ισομορφισμός από το A επί του εαυτού του και $f^{-1} \circ g \neq \mathrm{Id} =$ ταυτοτικός, επειδή f και g είναι διαφορετικοί.[10] Άρα για κάποιο $x, f^{-1} \circ g(x) \neq x$. Έστω a το ελάχιστο στοιχείο του A ώστε $f^{-1} \circ g(a) \neq a$. Αν $f^{-1} \circ g(a) = b < a$ τότε $f^{-1} \circ g(b) = b$, επειδή $x < a \rightarrow f^{-1} \circ g(x) = x$. Άρα $f^{-1} \circ g(a) = f^{-1} \circ g(b)$, αδύνατο διότι η $f^{-1} \circ g$ είναι 1–1. Άρα $f^{-1} \circ g(a) > a$, οπότε επειδή η $f^{-1} \circ g$ σέβεται τη διάταξη το $a \notin \mathrm{Rg}(f^{-1} \circ g)$, δηλαδή η $f^{-1} \circ g$ δεν είναι επί. (Άτοπο) Όντως αν υπήρχε b ώστε $f^{-1} \circ g(b) = a$ τότε $f^{-1} \circ g(a) > f^{-1} \circ g(b)$ οπότε θα ήταν $a > b$, αλλά τότε από την ελαχιστότητα του a θα ήταν $f^{-1} \circ g(b) = b$.

Σημείωση: Αν f είναι ένας ισομορφισμός από το διατεταγμένο A στο διατεταγμένο B η f θα διατηρεί την διάταξη $<$ δηλ. $x < y \rightarrow f(x) < f(y)$ επειδή αν $f(x) = f(y)$ λόγω του μονομορφισμού f θα είχαμε $x = y$.

Πόρισμα 5.6 *Μόνον ένας ισομορφισμός υπάρχει από την καλή διάταξη $\langle A, \leq \rangle$ στον εαυτό της.*

---

[9] Αν για $f : \langle A, R \rangle \rightarrow \langle A', R' \rangle$ ισχύει ότι $xRy \rightarrow f(x)R'f(y)$ λέμε ότι η f *διατηρεί* (ή *σέβεται*) την σχέση R.

[10] Αν $f^{-1} \circ g = \mathrm{Id}$ τότε $\forall x \in A$, $f^{-1} \circ g(x) = x$ άρα $f^{-1}(f(g(x))) = f(x)$ άρα $g(x) = f(x)$.

Ορισμός 5.7 *Αν $\langle A, \leq \rangle$ είναι καλή διάταξη και $a \in A$ ορίζουμε $A_a = \{x \mid x \in A \wedge x < a\}$. Το A_a καλείται* αρχικό τμήμα *του A.*

Θεώρημα 5.8 *Μια καλή διάταξη $\langle A, \leq \rangle$ δεν είναι ισομορφική με κανένα $\langle A_a, \leq \rangle$ για οποιοδήποτε $a \in A$.*

Απόδειξη:'Εστω $f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow A_a$. Επειδή $f(a) < a$ έστω b το ελάχιστο στοιχείο του A ώστε $f(b) < b$. Επειδή f διατηρεί τη διάταξη έχουμε $f(f(b)) < f(b)$ (Ατοπο διότι $f(b) < b$).

Θεώρημα 5.9 *Κάθε καλή διάταξη $\langle A, \leq \rangle$ είναι ισομορφική με το $\langle B, \subseteq \rangle$, όπου $B = \{A_a \mid a \in A\}$.*

Απόδειξη:Ο ισομορφισμός ορίζεται με $f(a) = A_a$ για κάθε $a \in A$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι $a \leq a' \leftrightarrow A_a \subseteq A_{a'}$.

Θεώρημα 5.10 *Έστω $\langle A, \leq \rangle$ καλή διάταξη και $a \in A$. Τότε είτε το a είναι το μέγιστο στοιχείο του A (μοναδικό από τη γραμμικότητα) ή το a έχει έναν επόμενο $b \in A$ δηλ. $a < b$ και δεν υπάρχει c ώστε $a < c < b$.*

Απόδειξη:'Εστω a δεν είναι το μέγιστο. Τότε το σύνολο $B = \{x \mid a < x\} \neq \emptyset$. 'Αρα έχει ελάχιστο b. Είναι $a < b$. Επειδή το b είναι το ελάχιστο στοιχείο του B δεν είναι δυνατό να έχουμε $a < c < b$ διότι τότε το $c \in B$ και c μικρότερο από το ελάχιστο.

Παρατήρηση: Ποιά μπορεί να είναι η εικόνα (του τύπου) μιας καλής διάταξης ενός συνόλου A; Κατ' αρχάς το ίδιο το A ως υποσύνολο του A θα έχει ελάχιστο στοιχείο. Δηλαδή το A έχει ελάχιστο στοιχείο. Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα (αν υπάρχουν στο A και άλλα στοιχεία) αυτό θα έχει ένα επόμενο το οποίο θα έχει ένα επόμενο κ.ο.κ. Δηλαδή ένα αρχικό τμήμα του A θα έχει τη μορφή $\bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \cdots$. Εάν αυτά τα στοιχεία δεν εξαντλούν το A θα υπάρχει ένα στοιχείο του A μεγαλύτερο από όλα αυτά, άρα και ένα ελάχιστο τέτοιο στοιχείο $\diamond$ ώστε να μην παρεμβάλλεται τίποτα μεταξύ των $\bullet$ και του (πρώτου) $\diamond$. Βέβαια θα υπάρχει πάλι ένα επόμενό του κ.ο.κ. και η διαδικασία θα μπορεί να συνεχιστεί επ' άπειρον. Θα έχουμε λοιπόν την εξής εικόνα:

$$\bullet\bullet\bullet\bullet\cdots\diamond\diamond\diamond\diamond\cdots\circ\circ\circ\circ\cdots \text{ κ.ο.κ.}$$

Πόσο μπορεί να συνεχιστεί αυτή η διαδικασία; Αργότερα θα δούμε με ποιό τρόπο μπορούμε να αναπαραστήσουμε διατάξεις με μήκος πολύ μεγαλύτερο από αυτή.

Λήμμα 5.11 *Εάν $\langle A, \leq \rangle$ και $\langle B, \leq' \rangle$ καλές διατάξεις τότε αυτές είναι ισομορφικές τότε και μόνο τότε οι ακόλουθες συνθήκες ισχύουν*

1. *$\forall x \in A$ υπάρχει $y \in B$ ώστε A_x ισομορφικό με το B_y*

2. $\forall y \in B$ υπάρχει $x \in A$ ώστε B_y ισομορφικό με το A_x

Απόδειξη:$\Rightarrow$: Έστω f ισομορφισμός από το A στο B. Τότε αν $x \in A$ το A_x θα είναι ισομορφικό με το $B_{f(x)}$. Δηλαδή ισχύει η ιδιότητα 1 αν πάρουμε $y = f(x)$. Αντίστροφα ισχύει η 2 παίρνοντας $x = f^{-1}(y)$.

$\Leftarrow$:Έστω ότι ισχύουν οι ιδιότητες 1 και 2. Ορίζουμε ισομορφισμό f από το A στο B ως εξής: Για κάθε $x \in A$, $f(x)$ είναι το μοναδικό y ώστε A_x ισομορφικό με το B_y. Η ύπαρξη εξασφαλίζεται από την ιδιότητα 1 και η μοναδικότητα από το θεώρημα 5.8 διότι αν το A_x ήταν ισομορφικό με τα B_y και B_z (έστω $y < z$) τότε το B_y θα ήταν αρχικό τμήμα του B_z και B_z θα ήταν ισόμορφο με το B_y. (άτοπο) [Σημειώστε ότι δύο δομές που είναι ισομορφικές με μία τρίτη είναι και μεταξύ τους ισομορφικές.] Εύκολα βλέπουμε ότι η f είναι 1–1 και επί (από ιδιότητα 2). Διατηρεί τη διάταξη διότι $x < x'$ συνεπάγεται $f(x) < f(x')$ διότι διαφορετικά με το ίδιο ως άνω σκεπτικό θα παραβιαζόταν το θεώρημα 5.8.

Θεώρημα 5.12 *[Συγκρισιμότητα των καλών διατάξεων]*

Εάν $\langle A, \leq \rangle$ και $\langle B, \leq' \rangle$ καλές διατάξεις τότε

- *είτε A και B ισομορφικές*
- *είτε A ισομορφική με αρχικό τμήμα της B*
- *είτε B ισομορφική με αρχικό τμήμα του A*

Απόδειξη:Από το θεώρημα 5.8 έχουμε ότι μόνον μία από τις τρείς ιδιότητες μπορεί να ισχύει.

Έστω τώρα ότι οι A και B δεν είναι ισομορφικές. Τότε από προηγούμενο θεώρημα μία από τις δύο συνθήκες δεν ικανοποιείται. Έστω δεν ικανοποιείται η πρώτη. Τότε θα πρέπει να υπάρχει $x \in A$ ώστε για όλα τα $y \in B$ το B_y δεν είναι ισομορφικό με το A_x. Επειδή A καλή διάταξη μπορούμε να διαλέξουμε το x_0 να είναι το ελάχιστο τέτοιο x. Δηλαδή

1. $x < x_0 \rightarrow A_x$ είναι ισομορφικό με κάποιο B_y (για κάποιο $y \in B$).
2. το A_{x_0} δεν είναι ισομορφικό με κανένα B_y (για οποιοδήποτε $y \in B$).

Ισχυριζόμαστε ότι A_{x_0} είναι ισομορφικό με το B. Από προηγούμενο θεώρημα αρκεί να εξασφαλίσουμε ότι

1. $\forall x \in A_{x_0} \exists y \in B$ ώστε $(A_{x_0})_x$ ισομορφικό με το B_x.

   (Ισχύει διότι $x \in A_{x_0}$ σημαίνει $x < x_0$ και σ'αυτήν την περίπτωση $(A_{x_0})_x = A_x$.
2. Για κάθε $y \in B$ υπάρχει $x \in A_{x_0}$ ώστε $(A_{x_0})_x$ ισομορφικό με το B_y.

Και αυτό ισχύει διότι αν δεν ίσχυε θα μπορούσαμε να πάρουμε το μικρότερο y για το οποίο δεν ισχύει, έστω y_0. Τότε $y < y_0 \to \exists x < x_0$ ώστε $(A_{x_0})_x$ ισομορφικό με το B_y και B_{y_0} δεν είναι ισομορφικό με κανένα A_x για οποιοδήποτε $x < x_0$. Αλλά τότε για το A_{x_0} και B_{y_0} ισχύουν και οι δύο ιδιότητες του λήμματος 5.11 άρα A_{x_0} και B_{y_0} ισομορφικά μεταξύ τους πράγμα που παραβιάζει την επιλογή του x_0.

Σημείωση: Μέχρι τώρα τους ορισμούς της μερικής διάταξης, γραμμικής και καλής διάταξης τους δώσαμε για σχέσεις (που τις συμβολίζαμε R, $\leq$, $\subseteq$ κ.λ.π.) που ικανοποιούσαν την xRx δηλ. ήταν αυτοπαθείς. Είναι χρήσιμο να δούμε ότι τους ορισμούς των ίδιων εννοιών μπορούμε να τους δώσουμε και για σχέσεις που είναι μη αυτοπαθείς.

Ορισμός 5.13 *Μία διμελής σχέση R στο σύνολο A είναι* αυστηρή μερική διάταξη *αν ισχύουν για $x, y, z \in A$*

1. $\neg(xRx)$ *—μη αυτοπαθής*
2. $xRy \wedge yRz \to xRz$ *—μεταβατική*

Μια αυστηρή μερική διάταξη R είναι και αντισυμμετρική δηλ. ικανοποιεί την σχέση $xRy \to \neg(yRx)$, διότι αν xRy και yRx, από τη μεταβατικότητα θα παίρναμε xRx, άτοπο διότι η R είναι μη αυτοπαθής.

Η σχέση R είναι (αυστηρή) γραμμική διάταξη *όταν ισχύουν:*

1. *R είναι μεταβατική*
2. Ακριβώς *ένα από τα $x < y, y < x, x = y$ ισχύει για οποιαδήποτε $x, y \in A$.*

Τότε η R θα είναι και αυστηρή μερική διάταξη διότι επειδή $x = x$ δεν μπορεί να έχουμε xRx αφού μόνον ένα από τα $x = x$ ή xRx μπορεί να ισχύει.

Η αυστηρή γραμμική διάταξη είναι και καλή διάταξη αν, όπως και στον άλλο ορισμό, κάθε μη κενό υποσύνολο του πεδίου της διάταξης έχει ελάχιστο στοιχείο.

Παρατήρηση: Οταν έχουμε μία αυστηρή διάταξη, π.χ. $<$, τότε μπορούμε να ορίσουμε την $\leq$ ως $x \leq y \leftrightarrow x < y \vee x = y$ και να αποκτήσουμε την επέκταση της $<$ που είναι αυτοπαθής και ικανοποιεί όλες τις ιδιότητες της (αυτοπαθούς) διάταξης. Επίσης και αντίστροφα αν έχουμε την μη αυτοπαθή διάταξη $\leq$ μπορούμε να ορίσουμε το $<$ ως $x < y \leftrightarrow x \leq y \wedge x \neq y$ και να αποκτήσουμε τον μη αυτοπαθή περιορισμό της $\leq$ που βέβαια θα ικανοποιεί όλες τις ιδιότητες της (μη αυτοπαθούς) διάταξης. Δηλαδή οι $\leq$ και $<$ (ομοίως οι $\subseteq$ και $\subset$ κ.λ.π.) είναι οι δύο όψεις του ιδίου νομίσματος. Σε ό,τι ακολουθεί όταν μία διάταξη είναι αυστηρή, θα την ονομάζουμε απλά διάταξη και θα την συμβολίζουμε με $<$, $\subset$, κ.λ.π. Διαφορετικά θα γράφουμε $\leq$, $\subseteq$, κ.λ.π. και θα εννοούμε την αυτοπαθή διάταξη.

6 Διατακτικοί αριθμοί (Ordinal numbers)

Αναζητούμε με ομοιόμορφο τρόπο αντιπροσώπους για όλες τις καλές διατάξεις.

Ορισμός 6.1 *1. Το σύνολο A είναι* μεταβατικό *εάν* $\forall x(x \in A \to x \subseteq A)$ *(δηλ. $y \in x \in A \to y \in A$).*

2. Το σύνολο A είναι διατακτικός (αριθμός) *αν το A είναι μεταβατικό και η διάταξη $\langle A, \in\rangle$ είναι αυστηρή καλή διάταξη.*

Η μεταβατικότητα του A μπορεί ισοδύναμα να εκφραστεί με τη σχέση $\cup A \subseteq A$. Παραδείγματα μεταβατικών συνόλων είναι τα σύνολα $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$. Το σύνολο $\{\emptyset,\{\{\emptyset\}\}\}$ δεν είναι μεταβατικό σύνολο διότι έχουμε ότι $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\} \in \{\emptyset,\{\{\emptyset\}\}\}$ αλλά $\{\emptyset\} \notin \{\emptyset,\{\{\emptyset\}\}\}$.

Αναλυτικώτερα και ισοδύναμα A είναι διατακτικός αν για $x, y, z \in A$ ισχύουν:

Δ1 $x \in y \wedge y \in z \to x \in z$ ($\in$ μεταβατική)

Δ2 Ακριβώς ένα από τα $x \in y, x = y, y \in x$ ισχύει ($\in$ γραμμική)

Δ3 Αν $\emptyset \neq B \subseteq A$ τότε $\exists b \in B$ ώστε $\forall x \in B, x \notin b$ (το b είναι το $\in$-ελαχιστό στοιχείο του B) [ισοδύναμα μπορούμε να πούμε ότι $\exists b \in B$, $b \cap B = \emptyset$] ($\in$ καλή διάταξη)

Δ4 $x \in y \wedge y \in A \to x \in A$ (A μεταβατικό)

π.χ. $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset,\{\emptyset\}\}$ είναι διατακτικοί.

Η ισοδυναμία του ορισμού 6.1 και των ιδιοτήτων Δ1–Δ4 μπορεί εύκολα να αποδειχθεί. Στην περίπτωση του Δ3, η συνθήκη $b \cap B = \emptyset$ είναι ισοδύναμη με το ότι το b είναι το ελάχιστο στοιχείο ως προς τη διάταξη $\in$ διότι αν υπήρχε ένα μικρότερο του b, έστω x, ως προς αυτή τη διάταξη θα είχαμε $x \in B$ και $x \in b$ (x μικρότερο του b) οπότε θα ήταν $b \cap B \neq \emptyset$.

Συμβολισμός: Τα γράμματα $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ συμβολίζουν διατακτικούς. Επίσης γράφουμε $x \in \mathrm{Ord}$ και εννοούμε x είναι διατακτικός. Γράφουμε επίσης $A \subset B$ όταν A είναι γνήσιο υποσύνολο του B δηλαδή όταν $A \subseteq B \wedge A \neq B$.

6.1 Ιδιότητες των διατακτικών

1. $\forall \alpha, \alpha \notin \alpha$

Απόδειξη: Έστω $\alpha \in \alpha$. Τότε $\emptyset \neq \{\alpha\} \subseteq \alpha$, άρα από Δ3 διαλέγουμε $x \in \{\alpha\}$ ώστε $x \cap \{\alpha\} = \emptyset$. Αλλά $x = \alpha$ άρα $\alpha \in x \cap \{\alpha\}$ (Ατοπο).

2. $x \in \alpha \to x \subset \alpha$

Απόδειξη: Έστω $x \in \alpha$. Από Δ4 $x \subseteq \alpha$. Αν $x = \alpha$ τότε $\alpha \in \alpha$. Άρα $x \subset \alpha$.

3. Αν $x \in \alpha$ τότε x είναι διατακτικός.

Απόδειξη: Πρέπει να ελέγξουμε τα Δ1-Δ4 για το x. Εστω $b, c, d \in x$. Τότε $b, c, d \in \alpha$, από μεταβατικότητα. Αρα ακριβώς ένα από τα $b \in c, c \in b, b = c$ ισχύει και $(b \in c \,\&\, c \in d \to b \in d)$. Αρα έχουμε τα Δ1 και Δ2. Εάν $\emptyset \neq Y \subseteq x$ τότε $Y \subseteq \alpha$ (επειδή $x \subseteq \alpha$). Αρα υπάρχει $e \in Y$ τέτοιο ώστε $e \cap Y = \emptyset$. Άρα Δ3. Τελικά για το Δ4 έστω $e \in f, f \in x$ (θέλουμε $e \in x$). Από Δ1-Δ4 $e, f, x \in \alpha$. Άρα είτε $e \in x$ ή $e = x$ ή $x \in e$. Αν $e = x$ ή $x \in e$ τότε δεν θα είχαμε ότι $\exists y \in \{e, f, x\} \subseteq \alpha$ ώστε $y \cap \{e, f, x\} = \emptyset$ (Άσκηση: Να ελεγχθούν όλες οι περιπτώσεις). Άρα θα πρέπει να έχουμε $e \in x$ όπως απαιτείται.

4. $\beta \in \alpha \leftrightarrow \beta \subset \alpha$.

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε $\beta \subset \alpha \to \beta \in \alpha$. Έστω $\beta \subset \alpha$, άρα $\emptyset \neq \alpha \setminus \beta \subseteq \alpha$. Διαλέγουμε $\delta \in \alpha \setminus \beta$ ώστε $\delta \cap (\alpha \setminus \beta) = \emptyset$. Για να αποδείξουμε $\beta \in \alpha$ αρκεί να αποδείξουμε ότι $\delta = \beta$ δηλ. $\nu \in \delta \leftrightarrow \nu \in \beta$.

Εάν $\nu \in \delta \to \nu \in \alpha$ (επειδή Δ4 για το α, επειδή $\delta \in \alpha$) και $\nu \notin \alpha \setminus \beta$ $\to \nu \in \beta$.

Αντίστροφα, έστω $\nu \in \beta$. Τότε $\nu \in \alpha$, επειδή $\beta \subset \alpha$ άρα επειδή $\delta \in \alpha$, ένα από τα $\delta \in \nu, \nu = \delta, \nu \in \delta$ ισχύει. Εάν $\delta \in \nu$ τότε $\delta \in \beta$ (από Δ4 για β), άρα $\delta \notin (\alpha \setminus \beta)$ (άτοπο). Εάν $\delta = \nu$ τότε $\delta \in \beta$, άρα άτοπο. Άρα $\nu \in \delta$, άρα $\delta = \beta$ & επειδή $\delta \in \alpha$, $\beta \in \alpha$.

5. Ακριβώς ένα από τα $\alpha \in \beta, \beta \in \alpha, \beta = \alpha$ ισχύει.

Απόδειξη: Αν ίσχυαν περισσότερα από ένα θα είχαμε είτε $\alpha \in \alpha$ ή $\beta \in \beta$ (άτοπο). Αρα υποθέτουμε ότι $\alpha \notin \beta, \alpha \neq \beta$ (θέλουμε $\beta \in \alpha$). Από 4. $\alpha \neq \beta$ και $\neg(\alpha \subset \beta)$ άρα $\neg(\alpha \subseteq \beta)$, άρα $\emptyset \neq \alpha \setminus \beta \subseteq \alpha$. Διαλέγουμε $\delta \in \alpha \setminus \beta$ ώστε $\delta \cap (\alpha \setminus \beta) = \emptyset$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $\delta = \beta$. Εάν $\nu \in \delta$, τότε $\nu \in \alpha \,\&\, \nu \notin \alpha \setminus \beta$ άρα $\nu \in \beta$ δηλ. $\delta \subseteq \beta$. Εάν $\delta \subset \beta$ τότε $\delta \in \beta$ άρα $\delta \notin \alpha \setminus \beta$, άρα $\delta = \beta$, άρα $\beta \in \alpha$.

Σημείωση: Αν $a, b \in \alpha$ τότε a και b είναι διατακτικοί και

$$a \in b \leftrightarrow a \text{ είναι μικρότερο από το } b \text{ στη διάταξη } \in$$

Γράφουμε λοιπόν

- $\alpha < \beta$ αντί του $\alpha \in \beta$
- $\alpha \leq \beta$ αντί του $\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta$

και χρησιμοποιούμε λέξεις όπως «ελάχιστος» για τους διατακτικούς.

Επίσης $\alpha = \{\beta \mid \beta \in \alpha\} = \{\beta \mid \beta < \alpha\}$. Βλέπουμε λοιπόν ότι κάθε διατακτικός αριθμός είναι το σύνολο όλων των μικροτέρων του. $\emptyset$ είναι ο ελάχιστος διατακτικός, επειδή για κάθε διατακτικό α

$\emptyset \subseteq \alpha \to (\emptyset \subset \alpha$ οπότε $\emptyset \in \alpha$ ή $\emptyset = \alpha)$. Και στις δύο περιπτώσεις έχουμε $\emptyset \leq \alpha$.

Πρόταση 6.2 $\alpha \in \beta \wedge \beta \in \gamma \to \alpha \in \gamma$.

Απόδειξη: Είναι το Δ4.

Θεώρημα 6.3 *Εστω $\Theta(x)$ μονομελής συνθήκη ώστε $\Theta(\alpha)$ ισχύει για κάποιο διατακτικό α. Τότε υπάρχει ένας ελάχιστος διατακτικός α ώστε $\Theta(\alpha)$ και $\forall \gamma < \alpha \neg\Theta(\gamma)$.*

Απόδειξη: Έστω α ώστε $\Theta(\alpha)$. Τότε αν το σύνολο $b = \{\gamma \in \alpha \wedge \Theta(\gamma)\} = \emptyset$ τότε στην περίπτωση αυτή ο α είναι ο ελάχιστος. Αν $b \neq \emptyset$ τότε επειδή $b \subseteq \alpha$ διαλέγουμε $\gamma \in b$ ώστε $\gamma \cap b = \emptyset$. Τότε $\delta < \gamma \to \delta \notin b \to \neg\Theta(\delta)$, άρα γ είναι ο ελάχιστος.

Θεώρημα 6.4 *Αν B είναι σύνολο διατακτικών $B \neq \emptyset$, τότε υπάρχει στο B ελάχιστος διατακτικός δηλ. $\exists \gamma \in B$ ώστε $\gamma \cap B = \emptyset$.*

Απόδειξη: Στο θεώρημα παίρνουμε $\Theta(x) \equiv x \in B$.

Πόρισμα 6.5 *Η κλάση όλων των διατακτικών δεν είναι σύνολο δηλ. δεν υπάρχει σύνολο B ώστε $\forall x (x \in B \leftrightarrow x$ εναι διατακτικς$)$.*

Απόδειξη: Έστω ότι υπάρχει τέτοιο B. Εύκολα αποδεικνύεται ότι B είναι διατακτικός. Διότι αν $\alpha, \beta, \gamma \in B$, $\alpha \in \beta \,\&\, \beta \in \gamma \to \alpha \in \gamma$ (από πρόταση 6.2 και ακριβώς ένα από τα $\alpha \in \beta, \beta \in \alpha, \alpha = \beta$ ισχύει (από ιδιότητα 5). Αν $\emptyset \neq A \subseteq B$ τότε από πρόταση 6.4 $\exists \alpha \in A$ ώστε $A \cap \alpha = \emptyset$. (Αρα το Δ3 για το B). Τελικά αν $x \in \alpha, \alpha \in B \to x$ είναι διατακτικός $\to x \in B$ άρα B ικανοποιεί τα Δ1-Δ4 και B είναι διατακτικός άρα $B \in B$ (άτοπο από ιδιότητα 1).

Πόρισμα 6.6 *Δεν υπάρχει μεγαλύτερος διατακτικός.*

Απόδειξη: Αν α ήταν ο μεγαλύτερος τότε $\alpha \cup \{\alpha\}$ θα ήταν το σύνολο όλων των διατακτικών.

Λήμμα 6.7 *Έστω A σύνολο διατακτικών. Τότε: $\exists \alpha$ διατακτικός (που τον συμβολίζουμε με $\sup(A)$) ώστε α είναι ο μικρότερος διατακτικός μεγαλύτερος ή ίσος από όλους τους $\beta \in A$.*

Επίσης $\exists \alpha$ διατακτικός (που τον συμβολίζουμε με seq(A)) ώστε α είναι ο μικρότερος διατακτικός μεγαλύτερος από όλους τους $\beta \in A$.

Απόδειξη: Εστω ότι $\exists \delta$ ώστε $\forall \beta \in A,\ \beta \leq \delta$. Τότε ο ελάχιστος τέτοιος δ είναι το $\sup(A)$. Εάν δεν υπήρχε τέτοιος δ τότε $\forall \delta \in \text{Ord}\ \exists \beta \in A\ \delta < \beta$. Αρα $\delta \in \text{Ord} \to \delta \in \cup A$, άρα $\{\delta \mid \delta \in \cup A \wedge d \in \text{Ord}\}$ είναι το σύνολο όλων των διατακτικών (άτοπο). Ομοίως για το $\text{seq}(A)$.

6.2 Ο επόμενος διατακτικός

Ορισμός 6.8 *Αν $\gamma \in$ Ord θέτουμε $\gamma' = \gamma + 1 = seq(\{\gamma\})$.*[11] *$\gamma'$ ονομάζεται ο* επόμενος *του γ.*

Παρατηρούμε ότι επειδή $\text{seq}(A)$ είναι ο ελάχιστος διατακτικός που είναι μεγαλύτερος από όλους τους διατακτικούς του A τότε αν έχουμε $\nu < \text{seq}(A)$, $\nu \leq$ από κάποιο στοιχείο του A (αφού δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερο από όλα). Αρα

$$\nu < \text{seq}(A) \to \exists \beta \in A \text{ ώστε } \nu \leq \beta$$

Αρα έχουμε $\nu < \gamma' \to \exists \beta \in \{\gamma\}$ ώστε $\nu \leq \beta \to \nu \leq \gamma$.
Αντίστροφα, $\nu \leq \gamma \to \nu = \gamma \vee \nu \in \gamma \to \nu < \gamma'$ (επειδή $\gamma < \gamma'$).
Αρα $\nu \in \gamma' \leftrightarrow \nu \in \gamma \vee \nu = \gamma$ δηλ.

$$\gamma' = \gamma \cup \{\gamma\}$$

Παρατηρούμε ότι $\gamma' = \gamma^+$, με το συμβολισμό του αξιώματος του απείρου.

Πρόταση 6.9 *Ισχύουν τα κάτωθι:*

1. $\beta < \gamma' \leftrightarrow \beta \leq \gamma$
2. $\gamma < \beta \leftrightarrow \gamma' \leq \beta$
3. $\gamma \leq \beta \leq \gamma' \to \gamma = \beta \vee \gamma' = \beta$

Απόδειξη: 1. $\beta < \gamma' \leftrightarrow \beta \in \gamma' \leftrightarrow \beta \in \gamma \vee \beta = \gamma \leftrightarrow \beta \leq \gamma$
2. $\gamma < \beta \to \gamma \cup \{\gamma\} \subseteq \beta \to \gamma' \subseteq \beta \to \gamma' \subset \beta \vee \gamma' = \beta \to \gamma' < \beta \vee \gamma' = \beta \to \gamma' \leq \beta \to \gamma < \beta$.

Ορισμός 6.10 *Ο διατακτικός λ λέγεται* οριακός *αν $\lambda \neq \emptyset$ και $\forall \alpha(\alpha < \lambda \to \alpha + 1 < \lambda)$.*

Έστω τώρα διατακτικός $\alpha \neq \emptyset$ που δεν είναι επόμενος (δηλ. δεν έχει τη μορφή $\alpha = \gamma'$ για κάποιο διατακτικό γ). Τότε για κάθε $\gamma < \alpha$ έχουμε ότι $\gamma' \neq \alpha$. Πρέπει τότε $\gamma' < \alpha$ ή $\alpha < \gamma'$. Αλλά αν έχουμε $\alpha < \gamma' \to \alpha \leq \gamma$ αδύνατο διότι $\gamma < \alpha$. Άρα $\gamma < \alpha \to \gamma' < \alpha$. Άρα α είναι οριακός. Άρα υπάρχουν μόνο δύο είδη διατακτικών διάφορων του $\emptyset$.

[11] Εδώ το $\gamma + 1$ δεν είναι κάποια πρόσθεση αλλά απλώς ένας εναλλακτικός συμβολισμός, πλην του γ', για τον επόμενο.

1. $\alpha = \beta + 1$ για κάποιο β (λέμε τότε ότι α είναι επόμενος).

2. $\alpha =$ οριακός

Πρόταση 6.11 *Αν A σύνολο διατακτικών τότε $sup(A) = \cup A$.*

Απόδειξη: Ο $\sup(A)$ είναι ο μικρότερος γ ώστε $\forall \alpha \in A$, $\alpha \leq \gamma$. Αν λοιπόν $\beta \in \gamma$, δηλαδή $\beta < \gamma$, τότε β δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερο ή ίσο από όλα τα $\alpha \in A$, άρα $\exists\ \alpha \in A$ ώστε $\neg(\alpha \leq \beta)$ δηλαδή $\beta < \alpha$. Άρα $\beta \in \cup A$. Επειδή $\beta \in \alpha \in A$.

Αντιστρόφως, αν $\beta \in \cup A$ τότε $\beta \in \alpha$ για κάποιο $\alpha \in A$, άρα $\beta < \alpha \leq \sup(A)$.

Άρα

- στην περίπτωση που $\alpha = \beta + 1$ τότε $\beta = \cup\alpha < \alpha$.

- στην περίπτωση που α οριακός τότε $\cup\alpha = \alpha$.

Οι διατακτικοί αριθμοί κατασκευάστηκαν για να αποτελέσουν τα «αρχέτυπα» των καλών διατάξεων. Το ακόλουθο θεώρημα το επιβεβαιώνει.

Θεώρημα 6.12 *Κάθε καλά διατεταγμένο σύνολο A είναι ισομορφικό με ένα μοναδικό διατακτικό α δηλ. αν $\langle A, \leq\rangle$ καλά διατεταγμένος χώρος τότε υπάρχει μοναδικός α ώστε $\langle A, \leq\rangle \cong \langle\alpha, \leq\rangle$.*

Απόδειξη: *Μοναδικότητα:* Επειδή δύο καλές διατάξεις που είναι ισομορφικές με μια τρίτη είναι και μεταξύ τους ισομορφικές, αν υπήρχαν δύο διαφορετικοί διατακτικοί $\alpha < \beta$ τότε θα είχαμε το β ισόμορφο με το αρχικό τμήμα του α (διότι $\alpha \in \beta$ και $\alpha = \beta_\alpha$).

Ύπαρξη: Έστω $B \subseteq A$ με $B = \{x \in A \mid A_x$ ισομορφικό με ένα διατακτικό$\}$. Από μοναδικότητα, για κάθε $x \in B$ υπάρχει ένας μοναδικός διατακτικός, έστω $\beta(x)$, ο οποίος είναι ισομορφικός με το A_x με μοναδικό ισομορφισμό f_x (γράφουμε τότε $A_x \cong_{f_x} \beta(x)$).

Παρατηρούμε τα εξής:

1. Το B έχει την εξής ιδιότητα:

$$x \in A \wedge x < y \wedge y \in B \rightarrow x \in B$$

   Διότι αν $y \in B$ τότε $A_y \cong_{f_y} \beta(y)$ άρα το $x < y$ συνεπάγεται ότι $x \in A_y$ και $(A_y)_x = A_x$, άρα $A_x = (A_y)_x \cong_{f_x} \beta(x)$ (όπου $f_x = f_y \upharpoonright A_x$) και βέβαια $\beta(x) < \beta(y)$.

   Παρατήρηση: Για B που ικανοποιεί την ως άνω ιδιότητα ισχύει ότι $B = A$ ή B είναι αρχικό τμήμα του A. Διότι αν z είναι το μικρότερο $z \in A$ που να μην ανήκει στο B τότε εύκολα $B = A_z$. Επίσης ισχύει $x < y \rightarrow \beta(x) < \beta(y)$.

2. Η κλάση $\mathcal{B} = \{\beta(x) \mid x \in B\}$, με βάση το αξίωμα της αντικατάστασης, είναι ένα σύνολο από διατακτικούς που ικανοποιούν την ιδιότητα

$$\gamma < \beta(x) \to \gamma \in \mathcal{B}$$

Διότι αν $\gamma < \beta(x)$ για $x \in B$ τότε γ ισομορφικό με ένα αρχικό τμήμα ενός A_x άρα ισομορφικό με ένα A_y όπου $y < x$.

Αλλά τότε $y \in B$ άρα $\gamma = \beta(y) \in \mathcal{B}$. Μια τέτοια κλάση $\mathcal{B}$ δεν μπορεί παρά να είναι ένας διατακτικός έστω β. Πράγματι, επειδή $\mathcal{B}$ είναι σύνολο διατακτικών θα υπάρχει ένας διατακτικός μεγαλύτερος από όλους τους διατακτικούς στο $\mathcal{B}$. Αν β είναι ο ελάχιστος τέτοιος διατακτικός τότε $\mathcal{B} = \beta$. Διότι βέβαια $\gamma \in \mathcal{B} \to \gamma < \beta$ και αν $\gamma < \beta$ τότε πρέπει $\gamma < \beta(x)$ για κάποιο $\beta(x) \in \mathcal{B}$, άρα $\gamma \in \mathcal{B}$ από την παραπάνω ιδιότητα.

3. Χρησιμοποιώντας όλα τα παραπάνω έχουμε ότι $\langle B, \leq \rangle \cong \langle \beta, \leq \rangle$. Και B πρέπει να είναι ίσο με A διότι διαφορετικά $B = A_x$ για κάποιο x άρα $A_x \cong \beta$ αλλά τότε, από τον ορισμό του B, $x \in B = A_x$, άτοπο ($x \notin A_x$).

Σημείωση: Με βάση το θεώρημα 6.12 μπορούμε να έχουμε ως πόρισμα το θεώρημα 5.12 της συγκρισιμότητας των καλών διατάξεων. Η διαφορά είναι η εξής. Στο θεώρημα 6.12 για την απόδειξη χρησιμοποιήσαμε το αξίωμα της αντικατάστασης ενώ στο θεώρημα 5.12 μόνο την ασθενέστερη αρχή του διαχωρισμού. Δηλαδή δουλέψαμε στην ασθενέστερη αξιωματική θεωρία του Zermelo, θεωρία Z, όπου

$$Z = ZF - \{\text{Αξίωμα της Αντικατάστασης}\} + \{\text{Αρχή του Διαχωρισμού}\}$$

Είναι γεγονός ότι στη θεωρία Z μπορούμε να αποδείξουμε όλες σχεδόν τις ιδιότητες που αφορούν στις καλές διατάξεις αλλά για να έχουμε το αποτέλεσμα ότι κάθε καλή διάταξη είναι ισομορφική με ένα διατακτικό χρειαζόμαστε το αξίωμα της αντικατάστασης, δηλ. το αποτέλεσμα ισχύει στη ZF.

6.3 Κατασκευή των Φυσικών αριθμών

Ο ορισμός των μαθηματικών αντικειμένων αποτέλεσε μια από τις κύριες δραστηριότητες των Λογικών - Μαθηματικών στα τέλη του $19^{\underline{ου}}$ αρχές του $20^{\underline{ου}}$ αιώνα. Είναι μνημειώδεις οι εργασίες των Frege, Dedekind, Russell και πολλών άλλων. Οι προσπάθειες αυτές ήταν μέρος του προγράμματος θεμελίωσης των Μαθηματικών γνωστού ως «λογικισμού». Το πρόγραμμα αυτό φιλοδοξούσε να αναγάγει όλα τα Μαθηματικά στη Λογική και στις αρχές της με βάση κατασκευές που την εποχή εκείνη θεωρούνταν «λογικές». Ως αποτέλεσμα του ξεκαθαρίσματος πολλών από τις ψευδαισθήσεις που επικρατούσαν τότε σε σχέση μ' αυτά τα ζητήματα αναπτύχθηκε η αξιωματική συνολοθεωρία.

Οι «λογικές» κατασκευές εκείνης της εποχής μετατράπηκαν σε ορισμούς των μαθηματικών αντικειμένων στο πλαίσιο της αξιωματικής συνολοθεωρίας.

Στη συνέχεια θα ορίσουμε στα πλαίσια της ZF το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών. Το σύνολο αυτό θα αποδειχθεί ότι υπάρχει με βάση τα αξιώματα της ZF· θα συνοδεύεται δε από μία διάταξη η οποία θα «αντιστοιχεί» στη διάταξη $<$ των φυσικών αριθμών. Στην πορεία του μαθήματος θα ορίζονται και τα άλλα υπόλοιπα «δομικά» στοιχεία του $\mathbb{N}$ όπως η πρόσθεση, ο πολ/σμός κ.λ.π. και θα αποδεικνύεται ότι ικανοποιούν τις συνήθεις ιδιότητές τους.

Θεωρούμε τη συνθήκη $\Phi(x)$ που ορίζεται από

$$\Phi(x) \leftrightarrow \emptyset \in x \wedge \forall z(z \in x \to (z \cup \{z\}) \in x)$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι η συνθήκη είναι οριστική. Επειδή ισχύει το αξίωμα του απείρου υπάρχει ένα τουλάχιστον σύνολο που ικανοποιεί τη συνθήκη άρα από θεώρημα 4.10 υπάρχει το σύνολο $\omega = \cap_{x|\Phi(x)} x$ και βέβαια ω είναι το μικρότερο σύνολο που ικανοποιεί τη συνθήκη $\Phi(x)$.

Πρόταση 6.13 *Το ω είναι οριακός διατακτικός και μάλιστα ο ελάχιστος οριακός διατακτικός.*

Απόδειξη: Διότι έστω α ο ελάχιστος διατακτικός που δεν ανήκει στο σύνολο ω. Τότε επειδή $\emptyset \in \omega$, $\emptyset \neq \alpha$. Αν ήταν $\alpha = \beta + 1$ τότε λόγω του ελάχιστου του α $\beta \in \omega$ και άρα $\beta + 1 \in \omega$ (επειδή $\beta + 1 = \beta \cup \{\beta\}$) δηλ. $\alpha \in \omega$, (άτοπο). Άρα α οριακός και επειδή ένας οριακός διατακτικός ικανοποιεί την $\Phi(x)$ έχουμε $\omega \subseteq \alpha$ (στην πραγματικότητα υποσύνολο κάθε οριακού α). Από την άλλη μεριά αν $\beta \in \alpha$, τότε λόγω του ελάχιστου του α έχουμε $\beta \in \omega$ άρα $\alpha \subseteq \omega$. Άρα $\omega = \alpha$ και άρα ω είναι ο ελάχιστος οριακός.

Για το ω ισχύουν:

1. $\emptyset, \emptyset', \emptyset'', \emptyset''', \cdots < \omega$
2. Εάν $\alpha < \omega$ τότε α δεν είναι οριακός διατακτικός και κατά συνέπεια είτε $\alpha = \emptyset$ ή $\alpha = \beta + 1$ για κάποιο $\beta < \alpha$.

Ορισμός 6.14 *Ορίζουμε ω να είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$. Επίσης ορίζουμε $0 = \emptyset$, $1 = \emptyset' = \{\emptyset\}$, $2 = \emptyset'' = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, κ.ο.κ.*

Παρατηρούμε ότι η διάταξη των διατακτικών $0, 1, 2, \ldots$ συμφωνεί με τη «φυσική» τους διάταξη. Επίσης ότι $1 = \{0\}, 2 = \{0, 1\}, \ldots n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ κ.λ.π..

Αν εφαρμόσουμε την αρχή της υπερπεπερασμένης επαγωγής στο ω παίρνουμε

$$\text{Αν } D \subseteq \omega \text{ και } \forall n \in \omega (n \subseteq D \to n \in D), \text{ τότε } D = \omega$$

Θεώρημα 6.15 *Η αρχή της υπερπεπερασμένης επαγωγής ΑΥΕ στο ω είναι ισοδύναμη με την ακόλουθη αρχή της επαγωγής*

$$\textit{Αν}\ P \subseteq \omega, 0 \in P\ \textit{και}\ \forall n(n \in P \to n' \in P),\ \textit{τότε}\ P = \omega$$

Απόδειξη: Υποθέτουμε την αρχή της επαγωγής και έστω $D \subseteq \omega$ ώστε $n \subseteq D \to n \in D$ (Θέλουμε $\omega = D$). Έστω $P = \{n \mid n \in \omega \wedge n \subseteq D\}$. Τότε $0 \in P$ επειδή $0 = \emptyset \subseteq D$ και εάν $n \in P \Rightarrow n \subseteq D \Rightarrow n \subseteq D \,\&\, n \in D \Rightarrow n \cup \{n\} \subseteq D$, άρα $n' \in P$. Άρα από αρχή της επαγωγής $\omega = P$. Άρα $\forall n \in \omega$, $n \subseteq D$ άρα τελικά $D = \omega$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε την ΑΥΕ και έστω $P \subseteq \omega$, ώστε $0 \in P \,\&\, (n \in P \to n' \in P)$ (Θέλουμε $P = \omega$). Τότε $n \subseteq P \Rightarrow$ είτε $n = 0$ οπότε $n = 0 \in P$ είτε $n \subseteq P \,\&\, n = m'$ (κάποιο m) [άρα $m \in n$] δηλαδή $m \in P$ και κατά συνέπεια $m' = n \in P$. Άρα από ΑΥΕ $P = \omega$.