3 Πληθάριθμοι

Ορισμός 3.1 *Δύο σύνολα A και B είναι ισοπληθικά (γράφουμε $A =_c B$ ή $A \sim B$) αν υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία $f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow B$.*

Εύκολα βλέπουμε ότι για οποιαδήποτε σύνολα A, B, C

1. $A \sim A$
2. $A \sim B \to B \sim A$
3. $A \sim B \wedge B \sim C \to A \sim C$

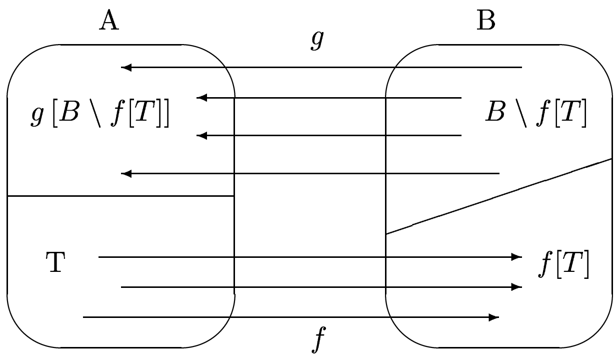
Δηλαδή η $\sim$ συμπεριφέρεται ως σχέση ισοδυναμίας.

Ορισμός 3.2 *Σε κάθε σύνολο A αντιστοιχούμε ένα αντικείμενο $\overline{\overline{A}}$, το οποίο καλείται ο* πληθάριθμος *του A, με τέτοιο τρόπο ώστε*

$$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}} \leftrightarrow A \sim B$$

Σημείωση: Οι παραπάνω ορισμοί προσπαθούν να αναπαραστήσουν στα πλαίσια της συνολοθεωρίας, με ενιαίο τρόπο, την έννοια της ισοπληθικότητας των συνόλων ανεξαρτήτως αν αυτά είναι πεπερασμένα ή άπειρα. Για παράδειγμα, ξέρουμε ότι σε ένα μαγαζί παπουτσιών υπάρχει το ίδιο πλήθος αριστερών και δεξιών παπουτσιών, χωρίς αναγκαστικά να ξέρουμε τον ακριβή αριθμό αυτών των παπουτσιών. Το γεγονός ότι υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία (σε κάθε αριστερό παπούτσι αντιστοιχεί το δεξιό του και αντίστροφα) μας οδηγεί σ'αυτό το συμπέρασμα. Ομοίως θα δεχόμαστε ότι το πλήθος του συνόλου των αρτίων φυσικών αριθμών είναι το ίδιο με το πλήθος των περιττών (προφανής αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία), αλλά και το -όπως θα δούμε- "παράδοξο" συμπέρασμα ότι το σύνολο των φυσικών είναι ισοπληθικό με το υποσύνολό του των αρτίων.

Όσον αφορά τους πληθαρίθμους, όπως ακριβώς και στα πεπερασμένα σύνολα αντιστοιχούμε αριθμούς με την έννοια ότι σε δύο ισοπληθικά σύνολα αντιστοιχούμε τον ίδιο αριθμό, έτσι και στα άπειρα σύνολα επεκτείνουμε την ίδια αυτή ιδέα. Έτσι λοιπόν υποθέτουμε ότι σε κάθε σύνολο έχουμε αντιστοιχήσει ένα αντικείμενο (είναι κι'αυτό σύνολο;) που το ονομάζουμε πληθάριθμο του συνόλου. Προφανώς θα πρέπει η αντιστοίχιση αυτή να έχει γίνει κατά τρόπο ώστε ισοπληθικά σύνολα να έχουν τον ίδιο πληθάριθμο και δύο οποιαδήποτε σύνολα με τον ίδιο πληθάριθμο να είναι ισοπληθικά. Εμείς προς το παρόν θα υποθέσουμε ότι αυτή η αντιστοίχιση έχει γίνει. Το να ορίσουμε μία συγκεκριμένη αντιστοίχιση στα πλαίσια της (αξιωματικής) συνολοθεωρίας είναι ένα πρόβλημα, γνωστό ως το πρόβλημα ανάθεσης πληθαρίθμων. Αργότερα, αφού αναπτύξουμε την έννοια των διατακτικών αριθμών, θα δούμε τη λύση που έδωσε σ'αυτό ο von Neumann.



Σχήμα 1: Απόδειξη του θεωρήματος Schröder-Bernstein

Ορισμός 3.3 *Για σύνολα A και B*

$$A \preccurlyeq B \overset{op}{\iff} \exists g : A \rightarrowtail B$$

Για πληθάριθμους

$$\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}} \overset{op}{\iff} A \preccurlyeq B \tag{2}$$

Για τον ορισμό (2) πρέπει να ελέγξουμε ότι είναι καλός ορισμός.

Δηλαδή, αν $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A'}}$ και $\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{B'}}$ πρέπει να ισχύει

$$A \preccurlyeq B \leftrightarrow A' \preccurlyeq B'$$

Σημείωση: Το $A \preccurlyeq B$ ορίζει την ιδέα ότι το B έχει τουλάχιστον όσα στοιχεία (σε πλήθος) έχει το A.

Η σχέση $\preccurlyeq$ (οπότε και η $\leq$ στους πληθικούς) είναι αυτοπαθής και μεταβατική. Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι είναι και αντισυμμετρική (με την έννοια ότι τα δύο σύνολα είναι ισοδύναμα και όχι ίσα όπως κανονικά απαιτείται).

Θεώρημα 3.4 (Schröder-Bernstein) *Για οποιαδήποτε A, B, αν $A \preccurlyeq B$ και $B \preccurlyeq A$ τότε $A \sim B$.*

Απόδειξη: [Σχήμα 1] Εστω $f : A \rightarrowtail B$ και $g : B \rightarrowtail A$. Θέλουμε να κατασκευάσουμε $h : A \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow B$.

Αρκεί να βρούμε $T \subseteq A$ ώστε $T = A \setminus g[B \setminus f[T]]$.

Τότε ορίζουμε $h : A \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow B$ ως ακολούθως

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) && \text{αν } x \in T \\ h(x) &= g^{-1}(x) && \text{αν} x \in A \setminus T \end{aligned}$$

Λήμμα 3.5 (Το λήμμα του σταθερού σημείου, Tarski) *Εστω $F : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ έτσι ώστε αν $X \subseteq Y$ τότε $F(X) \subseteq F(Y)$, $\forall X, Y \in \mathcal{P}(A)$ (μονότονος τελεστής). Τότε υπάρχει κάποιο $T \in \mathcal{P}(A)$ ώστε $F(T) = T$.*

Απόδειξη λήμματος: Εστω $S = \{X | X \in \mathcal{P}(A)$ και $X \subseteq F(X)\}$. Εστω $T = \cup S = \{x \,|\, \exists X \in S$ και $x \in X\}$.

Αν $X \in S$ τότε $X \subseteq F(X)$. Επίσης $X \subseteq T$ (επειδή $X \subseteq \cup S$).

Αρα $F(X) \subseteq F(T)$. Δηλαδή $X \subseteq F(X) \subseteq F(T)$ δηλ. $X \subseteq F(T)$.

Αρα αν $x \in T$ τότε $x \in X$ για κάποιο $X \in S$ και επειδή $X \subseteq F(T)$ έχουμε ότι $x \in F(T)$.

Αρα:

$$T \subseteq F(T) \tag{3}$$

Από (3) παίρνουμε $F(T) \subseteq F(F(T))$ από μονοτονία του F. Αρα από ορισμό του S, $F(T) \in S$. Αρα $F(T) \subseteq \cup S$ δηλαδή

$$F(T) \subseteq T \tag{4}$$

Από (3) και (4), $T = F(T)$.

Συνέχεια της απόδειξης του θεωρήματος: Ορίζουμε $F : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ με $F(X) = A \setminus g[B - f[X]]$. Η F ικανοποιεί τη μονοτονία:

$$\begin{aligned} X \subseteq Y \;&\Rightarrow\; f[X] \subseteq f[Y] \Rightarrow B \setminus f[Y] \subseteq B \setminus f[X] \\ &\Rightarrow\; g[B \setminus f[Y]] \subseteq g[B \setminus f[X]] \\ &\Rightarrow\; A \setminus g[B \setminus f[X]] \subseteq A \setminus g[B \setminus f[Y]] \\ &\Rightarrow\; F(X) \subseteq F(Y) \end{aligned}$$

Αρα από το λήμμα του Tarski υπάρχει $T \in \mathcal{P}(A)$ ώστε $F(T) = T$ δηλ. $T = A \setminus g[B \setminus f[T]]$. Αρα μπορούμε να ορίσουμε την αντιστοιχία $h : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow B$ με

$$\begin{array}{ll} h(x) = f(x) & \text{αν } x \in T \\ h(x) = g^{-1}(x) & \text{αν } x \in A \setminus T \end{array}$$

Πόρισμα 3.6 *Η σχέση $\leq$ στους πληθικούς αριθμούς ικανοποιεί τις ιδιότητες της μερικής διάταξης.*

Πόρισμα 3.7 *Για να αποδείξουμε ότι $A \sim B$ (ή $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$) αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχουν μονομορφισμοί $A \rightarrowtail B$ και $B \rightarrowtail A$.(Δηλαδή αρκεί $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}}$ και $\overline{\overline{B}} \leq \overline{\overline{A}}$)*

Ορισμός 3.8 *Για σύνολα A και B*

$$A \prec B \overset{\text{ορ}}{\Longleftrightarrow} A \preccurlyeq B \text{ και } \neg(A \sim B)$$

ισοδύναμα (χρησιμοποιώντας το θεώρημα Schröder - Bernstein)

$$A \prec B \Leftrightarrow A \preccurlyeq B \text{ και } \neg(B \preccurlyeq A)$$

Παρατήρηση: Το $A \preccurlyeq B$ σημαίνει ότι το B έχει τουλάχιστον τόσα στοιχεία όσα και το A, μπορεί όμως να έχει και το ίδιο πλήθος στοιχείων. Διότι $A \sim B$ συνεπάγεται $A \preccurlyeq$. Ενώ το $A \prec B$ σημαίνει ότι το B έχει γνησίως περισσότερα στοιχεία από το A.

Παραδείγματα ισοπληθικότητας:

Εστω $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

1. Είναι $A = \{1, 2, 3, \ldots\} \subsetneqq \mathbb{N}$ αλλά ορίζοντας $h : \mathbb{N} \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow A$ με $h(x) = x+1$ έχουμε $A \sim \mathbb{N}$.
2. $\mathbb{N} \sim \{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$, $h : \mathbb{N} \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow \{0, 2, 4, \ldots\}$ με $h(k) = 2k$. Βλέπουμε λοιπόν ότι ένα (άπειρο) σύνολο μπορεί να είναι ισοδύναμο με ένα γνήσιο υποσύνολό του.
3. Τα διαστήματα των πραγματικών αριθμών $(0, 1) \sim (0, 2)$, $h(x) = 2x$. Δηλαδή το διάστημα $(0, 1)$ έχει τον ίδιο αριθμό σημείων με το μεγαλύτερο σε μήκος $(0, 2)$.
4. Αν $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ τότε $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$.

   Ορίζω $h : \mathbb{Z} \rightarrowtail \mathbb{N}$ με

$$\begin{cases} h(0) = 0 \\ h(k) = 2k \quad (k > 0) \\ h(-k) = 2k - 1 \quad (k > 0) \end{cases}$$

   Και επειδή προφανώς $\mathbb{N} \preccurlyeq \mathbb{Z}$, από Schröder-Bernstein $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$.

   [Ασκηση: Αν $A \sim B \sim \mathbb{N}$ και $A \cap B = \emptyset$ τότε $A \cup B \sim \mathbb{N}$.]

5. Το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών είναι αριθμήσιμο (δηλ. $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$).

   Προφανώς $\mathbb{N} \preccurlyeq \mathbb{Q}$.

   Τώρα, για κάθε $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ υπάρχει *μοναδικό* ζεύγος πρώτων προς αλλήλους p και q ώστε $r = \pm\frac{p}{q}$. $(p, q \in \mathbb{N}\ )$

   Ορίζω $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$

$$\begin{cases} f(+\frac{p}{q}) = 2 \cdot 5^p \cdot 7^q \\ f(-\frac{p}{q}) = 3 \cdot 5^p \cdot 7^q \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

   Εχουμε $f : \mathbb{Q} \rightarrowtail \mathbb{N}$, δηλαδή f είναι 1–1, άρα $\mathbb{Q} \preccurlyeq \mathbb{N}$. Χρησιμοποιούμε το θεμελιώδες θεώρημα της αριθμητικής σύμφωνα με το οποίο κάθε αριθμός έχει μοναδική παραγοντοποίηση σε γινόμενο δυνάμεων πρώτων αριθμών (τα 2,3,5,7 είναι πρώτοι).

   Σημείωση: Το αποτέλεσμα $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$ είναι σε μεγάλο βαθμό «παράδοξο» αφού ένα σύνολο «διακριτό» όπως το $\mathbb{N}$ είναι ισοπληθικό με ένα σύνολο όπως το $\mathbb{Q}$ με «πυκνή» διάταξη. Η πρώτη μας σκέψη είναι ότι το $\mathbb{Q}$ λόγω της διάταξης των στοιχείων του (δηλ. $\forall x, y \in \mathbb{Q}\ \exists z \in \mathbb{Q}\ (x < z < y)$), έχει πολύ περισσότερα στοιχεία.

6. $(0,1) \sim (\alpha, \beta)$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

   π.χ. $f : (0,1) \to (\alpha,\beta),\ f(x) = \alpha + (\beta - \alpha)x$

   Δηλαδή ένα ευθύγραμμο τμήμα έχει το ίδιο πλήθος σημείων με ένα οποιοδήποτε άλλο μεγαλύτερου ή μικρότερου μήκους.

7. $(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}) \sim \mathbb{R}$

   $f : (-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R},\ f(x) = \text{εφ}\, x$

   άρα $(0,1) \sim \mathbb{R}$.

   Δηλαδή ένα ευθύγραμμο τμήμα έχει το ίδιο πλήθος σημείων με την απέραντη ευθεία.

8. $\mathbb{R} \sim (0,1) \sim {}^{\mathbb{N}}2 \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$ (Ασκηση) [Εδώ ορίζουμε $2 = \{0,1\}$]

   Εύκολα ${}^{\mathbb{N}}2 \sim \mathcal{P}(\mathbb{N}),\ f : {}^{\mathbb{N}}2 \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}),\ f(h) = \{k | h(k) = 0\}$[5]

   Αρκεί, για έχουμε όλες τις ισοδυναμίες, να δείξουμε ότι $(0,1) \sim {}^{\mathbb{N}}2$.

   Ορίζουμε $g : {}^{\mathbb{N}}2 \rightarrowtail (0,1)$ με

$$\begin{aligned} g(f) &= \frac{1}{4} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f(i)}{3^{i+1}} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{f(0)}{3} + \frac{f(1)}{3^2} + \frac{f(2)}{3^3} + \dots \end{aligned}$$

   Η $f(0), f(1), \dots$ είναι μια ακολουθία από 0 και 1. Δύο τέτοιες ακολουθίες που διαφέρουν σε τουλάχιστον μία θέση θα δώσουν διαφορετικό άπειρο ανάπτυγμα. Άρα η g είναι $1-1$.

   Για την άλλη κατεύθυνση ορίζουμε $h : (0,1) \rightarrowtail {}^{\mathbb{N}}2$ ως ακολούθως: δοθέντος $a \in (0,1)$ έστω $f \in {}^{\mathbb{N}}2$ η μοναδική συνάρτηση ώστε

$$a = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f(i)}{2^{i+1}} = \frac{f(0)}{2} + \frac{f(1)}{2^2} + \dots$$

   και τα $f(i)$ δεν είναι τελικά όλα 1. (Άσκηση: Αποδείξτε ότι υπάρχει μοναδική τέτοια συνάρτηση.)

[5] Γενικώτερα: Για κάθε $X \subseteq A$ η συνάρτηση $h : A \to \{0,1\}$ που ορίζεται από

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x \in A \\ 1 & \text{αν } x \notin A \end{cases}$$

ονομάζεται χαρακτηριστική (συνάρτηση) του X ($h \in {}^{A}2$). Η συνάρτηση $f : {}^{A}2 \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathcal{P}(A)$ με $f(h) = \{x \mid h(x) = 0\}$ ορίζει μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των υποσυνόλων και των χαρακτηριστικών (συναρτήσεων) τους.

Μέχρι τώρα όλα τα άπειρα σύνολα που εξετάσαμε είναι ισοπληθικά με το $\mathbb{N}$. Μήπως τελικά όλα τα άπειρα σύνολα είναι ισοπληθικά μεταξύ τους; Το ακόλουθο αποτέλεσμα του Cantor μας δείχνει πως όχι.

Θεώρημα 3.9 (Μη αριθμησιμότητα του $\mathbb{R}$, Cantor) *Είναι* $\mathbb{N} \preccurlyeq \mathbb{R}$. *Αλλά* $\mathbb{N} \not\sim \mathbb{R}$. *(Δηλαδή* $\mathbb{N} \prec \mathbb{R}$*)*

Απόδειξη: Εστω ότι υπάρχει $h : \mathbb{N} \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow \mathbb{R}$. Συμβολίζουμε $h(k) = h_k$, δηλ. $\mathbb{R} = \{h_0, h_1, h_2, \ldots, h_k, \ldots\}$. Αν μπορέσουμε να κατασκευάσουμε ένα πραγματικό $c \in \mathbb{R}$ ο οποίος να μην συμπίπτει με κανένα από τα h_i αυτού του συνόλου θα έχουμε αντίφαση, άρα το $\mathbb{R}$ δεν είναι δυνατόν να είναι ισοπληθικό με το $\mathbb{N}$.

Δημιουργούμε δύο ακολουθίες a_n και b_n.

(σε ότι ακολουθεί το «πρώτο h_k» σημαίνει το «h_k με το μικρότερο δείκτη k»)

$a_0 = h_0$

$b_0 =$ το πρώτο h_k ώστε $h_k > h_0$. [Αρα όλα τα h με μικρότερους δείκτες είναι εκτός του διαστήματος $[a_0, b_0]$.]

$a_1 =$ το πρώτο h_k ώστε $a_0 < h_k < b_0$

$b_1 =$ το πρώτο h_k ώστε $a_1 < h_k < b_0$

$\ldots$

$a_{n+1} =$ το πρώτο h_k ώστε $a_n < h_k < b_n$ (a_n και b_n έχουν ήδη οριστεί).

$b_{n+1} =$ το πρώτο h_k ώστε $a_{n+1} < h_k < b_n$ [Παρατηρούμε ότι τα h με μικρότερους δείκτες είναι εκτός του διαστήματος $[a_{n+1}, b_{n+1}]$.]

Εχουμε $a_n \uparrow$, $b_n \downarrow$, $a_n < b_n\ \forall n$, και $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$.

Άρα υπάρχει $c = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ το κοινό όριο της αύξουσας a_n και της φθίνουσας b_n. Τότε $c \neq h_k\ \forall k$, διότι κάθε h_k κείται αριστερότερα κάποιου a_n ή δεξιότερα κάποιου b_n, ενώ το c είναι μεγαλύτερο όλων των a_n και μικρότερο όλων των b_n.

Παρατήρηση: Το $\mathbb{R}$ είναι το πρώτο σύνολο που αποδείχτηκε ότι έχει γνησίως περισσότερα στοιχεία από το $\mathbb{N}$. Ήταν το πρώτο συγκλονιστικό αποτέλεσμα της θεωρίας συνόλων. Ας σημειωθεί ότι χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα της πληρότητας του συνόλου $\mathbb{R}$ για να πάρουμε το κοινό όριο c των ακολουθιών. Όλο το επιχείρημα μπορεί να εφαρμοστεί και στο $\mathbb{Q}$ αλλά στο $\mathbb{Q}$ δεν εξασφαλίζεται η ύπαρξη του c (στο $\mathbb{Q}$ δεν ισχύει η πληρότητα).

Συμβολισμός: Με γράμματα κ, λ, μ θα συμβολίζουμε τους πληθάριθμους.

$\kappa < \lambda$ συμβολίζει το $\kappa \leq \lambda$ και $\kappa \neq \lambda$, δηλ. $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}} \leftrightarrow A \preccurlyeq B$ και $A \not\sim B$. [έχουμε αποδείξει ότι $\overline{\overline{\mathbb{N}}} < \overline{\overline{\mathbb{R}}}$.]

Γράφουμε $n = \overline{\overline{\{0,1,\ldots,n-1\}}}$, (στην πραγματικότητα θα δούμε ότι μπορούμε να ορίσουμε και $n = \{0,1,\ldots,n-1\}$) δηλ. $0 = \overline{\overline{\emptyset}}$
$1 = \overline{\overline{\{0\}}}$
$2 = \overline{\overline{\{0,1\}}}$
$\ldots$

Επίσης, $\aleph_0 = \overline{\overline{\mathbb{N}}}$. Δηλ. το n είναι ο πληθάριθμος των συνόλων με n το πλήθος στοιχεία και $\aleph_0$ είναι ο πληθάριθμος του συνόλου των φυσικών. $\aleph$ (άλεφ) είναι το πρώτο γράμμα του εβραϊκού αλφαβήτου.

Ορισμός 3.10 (Αριθμητικές πράξεις - πληθική αριθμητική) *Θα επεκτείνουμε τις συνήθεις πράξεις της πρόσθεσης, του πολλαπλασιασμού και των δυνάμεων σε όλους τους πληθαρίθμους.*

1. *(πληθική)* **πρόσθεση**

   Εστω A και B σύνολα. Μπορούμε να επιλέξουμε σύνολα A' και B' ξένα μεταξύ τους (δηλ. $A' \cap B' = \emptyset$) ώστε $A \sim A'$ και $B \sim B'$.

   π.χ. $A' = \{0\} \times A$ και $B' = \{1\} \times B$. Οταν επιλέγουμε δύο τέτοια σύνολα A' και B' λέμε ότι το $A' \cup B'$ είναι η ξένη ένωση των A και B και γράφουμε $A \uplus B$.

   Ορίζουμε $\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A' \cup B'}} = \overline{\overline{A \uplus B}}$.

2. *(πληθικός)* **πολλαπλασιασμός**

   $\overline{\overline{A}} \cdot \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A \times B}}$

3. *(πληθική)* **δύναμη**

   $\overline{\overline{A}}^{\overline{\overline{B}}} = \overline{\overline{({}^{B}A)}}$

Παρατηρήσεις: (i) Πρέπει να ελέγξουμε ότι οι ορισμοί είναι καλοί, δηλ. αν $A' \sim A, B' \sim B$ τότε $A' \uplus B' \sim A \uplus B$, $A' \times B' \sim A \times B, \overline{\overline{({}^{B'}A')}} \sim \overline{\overline{({}^{B}A)}}$, τετριμμένο.
(ii) Επίσης πρέπει να ελέγξουμε ότι οι ορισμοί συμπίπτουν με τις πράξεις των πεπερασμένων πληθαρίθμων, δηλ. αν $\overline{\overline{A}} = n, \overline{\overline{B}} = m$ τότε $\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} = n + m, \overline{\overline{A}} \cdot \overline{\overline{B}} = n \cdot m, \overline{\overline{A}}^{\overline{\overline{B}}} = n^m$. (Άσκηση)

Θεώρημα 3.11 (Μερικοί νόμοι της πληθικής αριθμητικής) *Για κάθε κ, λ, μ,*

(i) $\kappa + \lambda = \lambda + \kappa$

(ii) $(\kappa + \lambda) + \mu = \kappa + (\lambda + \mu)$

(iii) $\kappa\lambda = \lambda\kappa$

(iv) $\kappa(\lambda\mu) = (\kappa\lambda)\mu$

(v) $\kappa(\lambda + \mu) = \kappa\lambda + \kappa\mu$

(vi) $\kappa^\lambda \kappa^\mu = \kappa^{\lambda+\mu}$

(vii) $\kappa^\mu \lambda^\mu = (\kappa\lambda)^\mu$

(viii) $\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda\mu}$

Απόδειξη: Τα παραπάνω ισχύουν επειδή ισχύουν αντίστοιχα οι κάτωθι συνολοθεωρητικοί νόμοι (A, B, C ξένα μεταξύ τους).

(i)$'$ $A \cup B = B \cup A$

(ii)$'$ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(iii)$'$ $A \times B \sim B \times A$

(iv)$'$ $A \times (B \times C) \sim (A \times B) \times C$

(v)$'$ $A \times (B \cup C) \sim (A \times B) \cup (A \times C)$

(vi)$'$ $({}^B A) \times ({}^C A) \sim {}^{(B \cup C)} A$

(vii)$'$ $({}^C A) \times ({}^C B) \sim {}^C (A \times B)$

(viii)$'$ ${}^C ({}^B A) \sim {}^{(C \times B)} A$

Παρατήρηση: Για οποιουσδήποτε πληθαρίθμους

(i) $\kappa + 0 = \kappa = \kappa \cdot 1$ και $\kappa \cdot 0 = 0$

(ii) Αν $\kappa_i \leq \lambda_i$ για κάθε i, $(1 \leq i \leq n)$ τότε

$$\begin{aligned} \kappa_1 + \kappa_2 + \ldots + \kappa_n &\leq \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n \\ \kappa_1 \kappa_2 \ldots \kappa_n &\leq \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n \end{aligned}$$

Ορισμός 3.12 *Ενα σύνολο A είναι* άπειρο *αν* $\overline{\overline{A}} \neq n$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$.
A είναι απαριθμητό *αν* $\overline{\overline{A}} \leq \aleph_0$.
A είναι αριθμήσιμο *αν* $\overline{\overline{A}} = \aleph_0$.

Αρα A αριθμήσιμο $\leftrightarrow\ \exists f : A \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \mathbb{N}$ ή ισοδύναμα $\exists f : \mathbb{N} \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow A$. Τότε μπορούμε να αναπαραστήσουμε την f με $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ και να την ονομάσουμε μια (απ)αρίθμηση των στοιχείων του A.

Παρατήρηση: Κάθε υποσύνολο ενός απαριθμητού συνόλου είναι απαριθμητό ($B \subseteq A \to \overline{\overline{B}} \leq \overline{\overline{A}} \leq \aleph_0$).

Θεώρημα 3.13 *Κάθε απαριθμητό σύνολο είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμο (δηλ. $\kappa \leq \aleph_0 \Rightarrow \kappa = \aleph_0$ ή $\exists n \in \mathbb{N}$ ώστε $\kappa = n$).*

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε ότι αν $\kappa < \aleph_0$ τότε κ είναι πεπερασμένο. Υποθέτουμε $\overline{\overline{A}} < \aleph_0$. Τότε υπάρχει $f : A \rightarrowtail \mathbb{N}$. Αν A δεν είναι πεπερασμένο τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n' > n$ ώστε $n' \in f[A]$.

Ορίζουμε[6] συνάρτηση $g : \mathbb{N} \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow f[A]$,

$$\begin{array}{lcl} g(0) & = & \text{το μικρότερο } y,\ y \in f[A] \\ g(n+1) & = & \text{το μικρότερο } y,\ y > g(n) \text{ και } y \in f[A] \end{array}$$

Αρα έχουμε $\mathbb{N} \sim f[A] \sim A$. Αρα $A \sim \mathbb{N}$.

Θεώρημα 3.14 *Αν A και B απαριθμητά τότε απαριθμητό είναι και το $A \cup B$.*

Απόδειξη: Εστω $f : A \rightarrowtail \mathbb{N}$ και $g : B \rightarrowtail \mathbb{N}$.

Ορίζουμε $h : A \cup B \rightarrowtail \mathbb{N}$ με

$$\begin{array}{lcll} h(x) & = & 2f(x) & \text{αν } x \in A \\ h(x) & = & 2g(x)+1 & \text{αν } x \in B \setminus A \end{array}$$

Προφανώς h είναι 1-1. Αρα $\overline{\overline{A \cup B}} \leq \aleph_0$.

Πόρισμα 3.15 $\aleph_0 + n = \aleph_0\ \forall n \in \mathbb{N}$ *και* $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.

(Επειδή $\aleph_0, n$ είναι απαριθμητά άρα είναι επίσης και το άθροισμα-ένωση, δηλαδή $\aleph_0 + n \leq \aleph_0$ και επειδή $\aleph_0 \leq \aleph_0 + n$ έχουμε $\aleph_0 + n = \aleph_0$. Το ίδιο και για το $\aleph_0 + \aleph_0$.)

Πόρισμα 3.16 *Η ένωση κάθε πεπερασμένης οικογένειας απαριθμητών συνόλων είναι απαριθμητή. Επίσης* $\underbrace{\aleph_0 + \ldots + \aleph_0}_{n \text{ φορές}} = \aleph_0$.

[6] Ο ορισμός της συνάρτησης γίνεται με επαγωγή (αναδρομή). Αργότερα θα δούμε ότι στα πλαίσια της αξιωματικής συνολοθεωρίας (θεώρημα αναδρομής) τέτοιοι ορισμοί μπορούν να δικαιολογηθούν δηλ. υπάρχει η συνάρτηση με τις αναδρομικές ιδιότητες.

Θεώρημα 3.17 *Αν A και B απαριθμητά και το $A \times B$ είναι απαριθμητό. Επίσης $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.*

Απόδειξη: Αρκεί να αποδείξουμε $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ (διότι αν $\kappa \leq \aleph_0, \lambda \leq \aleph_0$ τότε $\kappa \cdot \lambda \leq \aleph_0 \cdot \aleph_0$). Αρα αρκεί να αποδείξουμε ότι $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$.

Ορίζουμε $f : \mathbb{N} \rightarrowtail \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ με $f(n) = \langle n, 0 \rangle$.

Ορίζουμε $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrowtail \mathbb{N}$ με $g(\langle n, m \rangle) = 2^n \cdot 3^m$.

Από Schröder-Bernstein $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$.

Ασκηση: Να βρεθεί $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathbb{N}$.

Πόρισμα 3.18 $\underbrace{\aleph_0 \cdot \aleph_0 \ldots \aleph_0}_{n \text{ φορές}} = \aleph_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Πόρισμα 3.19 $\overline{\overline{\mathbb{Q}}} = \aleph_0$ *(Άλλη απόδειξη - έχει ήδη αποδειχθεί)*

Εστω $\mathbb{Q}^+ = \{x | x \in \mathbb{Q} \wedge x > 0\}$

$\mathbb{Q}^- = \{x | x \in \mathbb{Q} \wedge x < 0\}$

Ορίζουμε $f : \mathbb{Q}^+ \rightarrowtail \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ με $f(x) = \langle m, n \rangle$ όπου $x = \frac{m}{n} \wedge (m, n) =$ μέγιστος κοινός διαιρέτης $= 1$ άρα $\overline{\overline{\mathbb{Q}^+}} \leq \overline{\overline{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}} = \aleph_0$. Αντιστρόφως, $\overline{\overline{\mathbb{Q}^+}} \geq \overline{\overline{\mathbb{N}}} = \aleph_0$.

Αρα $\overline{\overline{\mathbb{Q}^+}} = \overline{\overline{\mathbb{Q}^-}} = \aleph_0$. Αρα $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^+ \Rightarrow \overline{\overline{\mathbb{Q}}} = \aleph_0 + 1 + \aleph_0 = \aleph_0$.

Θεώρημα 3.20 (Cantor) *Για κάθε σύνολο A, $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{\mathcal{P}(A)}}$.*

Απόδειξη: Προφανώς $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{\mathcal{P}(A)}}$. Επειδή $f : A \rightarrowtail \mathcal{P}(A)$ με $f(x) = \{x\}$.

Εστω ότι υπάρχει $g : \mathcal{P}(A) \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow A$. Εστω $T = \{x | x \in A \,\&\, x \notin g^{-1}(x)\}$. Είναι $g^{-1}(x) \subseteq A$ και $T \subseteq A$.

Ερώτηση: Είναι $g(T) \in T$;

$$g(T) \in T \Leftrightarrow g(T) \notin g^{-1}(g(T)) \Leftrightarrow g(T) \notin T$$

Λήμμα 3.21 *Αν $\overline{\overline{A}} = \kappa$ τότε $\overline{\overline{\mathcal{P}(A)}} = 2^\kappa$.*

Απόδειξη: Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$^A\{0,1\} \sim \mathcal{P}(A)$$

Δοθέντος $f \in {}^A\{0,1\}$ έστω $X_f = \{x | x \in A \wedge f(x) = 0\}$.

Ορίζουμε $F : {}^A\{0,1\} \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathcal{P}(A)$ με $F(f) = X_f \; \forall f \in {}^A\{0,1\}$.

Πόρισμα 3.22 *Για κάθε πληθάριθμο κ,*

$$\kappa < 2^{\kappa} < 2^{2^{\kappa}} < 2^{2^{2^{\kappa}}} < \ldots$$

(από Θεώρημα Cantor). Άρα υπάρχει απειρία συνόλων με διαφορετικές πληθικότητες.

Θεώρημα 3.23 $\overline{\overline{\mathbb{R}}} = 2^{\aleph_0}$ *(έχει αποδειχθεί)*

Πόρισμα 3.24 *Το* $\mathbb{R}$ *είναι μή αριθμήσιμο.*

Πόρισμα 3.25 *Το σύνολο των σημείων του επιπέδου* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ *είναι ισοπληθικό με το* $\mathbb{R}$.

Απόδειξη: $\overline{\overline{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}} = \overline{\overline{\mathbb{R}}}\cdot\overline{\overline{\mathbb{R}}} = 2^{\aleph_0}\cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0+\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \overline{\overline{\mathbb{R}}}$.

Η ανακάλυψη αυτή αποτέλεσε μια έκπληξη για τον Cantor. Πώς είναι δυνατόν η ευθεία με το επίπεδο αλλά και με το χώρο να έχουν τον ίδιο αριθμό σημείων!

Θεώρημα 3.26 *Το σύνολο* Σ *όλων των πεπερασμένων ακολουθιών των φυσικών αριθμών έχει πληθικότητα* $\aleph_0$.

Απόδειξη: Εστω $p_1, \ldots, p_n, \ldots$ αρίθμηση των πρώτων αριθμών. (είναι άπειροι)

Ορίζουμε $f : \Sigma \to \mathbb{N}$, $f\langle k_1, \ldots, k_n\rangle = p_1^{k_1+1}\cdots p_2^{k_2+1}\ldots p_n^{k_n+1}$.

f είναι μονομορφισμός από το θεώρημα μοναδικής παραγοντοποίησης. Αρα $\overline{\overline{\Sigma}} \leq \aleph_0$. Προφανώς $\overline{\overline{\Sigma}} \geq \aleph_0$.

Πόρισμα 3.27 *Το σύνολο των πεπερασμένων ακολουθιών με όρους που ανήκουν σε ένα καθορισμένο απαριθμητό σύνολο* $A \neq \emptyset$ *είναι αριθμήσιμο.*

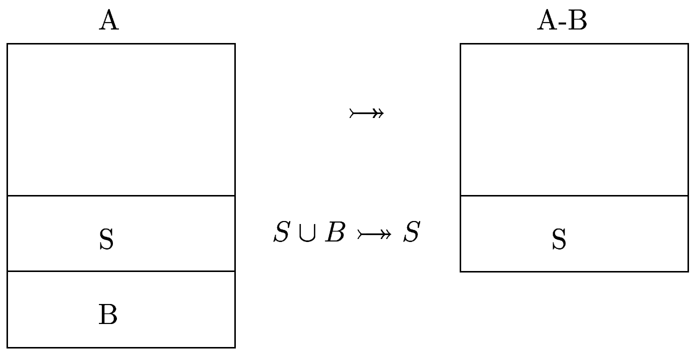
Πόρισμα 3.28 *Το σύνολο όλων των πεπερασμένων υποσυνόλων* $Fin(A)$ *ενός αριθμήσιμου συνόλου* A *είναι αριθμήσιμο.*

Απόδειξη: Χάριν ευκολίας υποθέτουμε $A = \mathbb{N}$. Ορίζουμε μονομορφισμό $f : \mathrm{Fin}(A) \rightarrowtail \Sigma$ με $f(X) = \langle a_0, \ldots, a_{n-1}\rangle$ όπου $X = \{a_0, \ldots, a_{n-1}\} \in \mathrm{Fin}(A)$ και $a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1}$ (δηλ. f τακτοποιεί τα στοιχεία του X στη φυσική τους διάταξη).

Αρα $\overline{\overline{\mathrm{Fin}(A)}} \leq \overline{\overline{\Sigma}} = \aleph_0$. Αλλά $\overline{\overline{\mathrm{Fin}(A)}} \geq \aleph_0$. Αρα $\overline{\overline{\mathrm{Fin}(A)}} = \aleph_0$.

Ορισμός 3.29 *Ενας πραγματικός αριθμός* b *είναι* αλγεβρικός *εάν είναι ρίζα κάποιας εξίσωσης* $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$ *όπου* $a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{Q}$. *Αν* b *δεν είναι αλγεβρικός τότε* b *είναι* υπερβατικός *(*Transcendental*).*

Εστω Al=το σύνολο των αλγεβρικών πραγματικών αριθμών, $\mathrm{Tr} = \mathbb{R}\setminus \mathrm{Al}$.



Σχήμα 2: Απόδειξη του λήμματος

Θεώρημα 3.30 $\overline{\overline{Al}} = \aleph_0$.

Απόδειξη: Κάθε εξίσωση της μορφής $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$ μπορεί να παρασταθεί σαν μια διατεταγμένη n-άδα $\langle a_{n-1}, \ldots, a_0 \rangle$ με $a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{Q}$. Επειδή $\overline{\overline{\mathbb{Q}}} = \aleph_0$, από το Πόρισμα 3.27 του προηγούμενου θεωρήματος το σύνολο αυτών των εξισώσεων είναι αριθμήσιμο. Εστω $q_1(x), q_2(x), \ldots, q_n(x), \ldots$ μία απαρίθμηση των εξισώσεων. Κάθε $q_n(x)$ έχει πεπερασμένο πλήθος ριζών. Αρα μπορούμε να ορίσουμε μονομορφισμό $f : \mathrm{Al} \rightarrowtail \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ με $f(b) = \langle n, m \rangle$ όπου n είναι ο ελάχιστος αριθμός ώστε b είναι ρίζα της $q_n(x)$ και b είναι η m-οστή ρίζα στη φυσική διάταξη των πραγματικών ριζών της $q_n(x)$.

Αρα $\overline{\overline{Al}} \leq \overline{\overline{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}} = \aleph_0$. Αλλά Al είναι άπειρο επειδή περιέχει όλους τους ρητούς. Αρα $\overline{\overline{Al}} = \aleph_0$.

Πόρισμα 3.31 $\overline{\overline{Tr}} = 2^{\aleph_0}$.

Απόδειξη: $\overline{\overline{\mathrm{Tr}}} = \overline{\overline{\mathbb{R} \setminus \mathrm{Al}}}$. Εχουμε $\mathbb{R} = 2^{\aleph_0}, \overline{\overline{\mathrm{Al}}} = \aleph_0$.

Πρώτα αποδεικνύουμε το εξής **λήμμα**: Εστω A σύνολο, B απαριθμητό υποσύνολο του A ώστε $A \setminus B$ έχει αριθμήσιμο υποσύνολο S. Τότε
$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A \setminus B}}$.
Απόδειξη λήμματος: Από το σχήμα 2,
Διότι $S \cup B \sim S$.

Αρα αρκεί να αποδείξουμε ότι Tr έχει αριθμήσιμο υποσύνολο. Αλλά $\mathbb{R} \neq \mathrm{Al} \Rightarrow \mathrm{Tr} \neq \emptyset$.

Εστω $\vartheta \in \mathrm{Tr}$, τότε $\vartheta, 2\vartheta, 3\vartheta, \ldots, n\vartheta, \ldots$ είναι αριθμήσιμο υποσύνολο των υπερβατικών. Αρα $\overline{\overline{\mathrm{Tr}}} = \overline{\overline{\mathbb{R}}} = 2^{\aleph_0}$. [O Cantor απέδειξε την ύπαρξη των υπερβατικών το 1873. O Hermite απέδειξε το 1873 ότι ο αριθμός e είναι υπερβατικός. O Lindemann απέδειξε το 1883 ότι ο π είναι επίσης υπερβατικός, και ότι κατά συνέπεια ο τετραγωνισμός του κύκλου είναι αδύνατος με κανόνα και διαβήτη. Σε εντελώς διαφορετική αρχή στηρίζεται η απόδειξη του Liouville για την ύπαρξη υπερβατικών αριθμών το 1851.]

Στη συνέχεια, παρ'όλο που δεν έχουμε ακόμη παρουσιάσει όλα τα αξιώματα της συνολοθεωρίας και ως εκ τούτου δεν έχουμε αναπτύξει τη θεωρία συνόλων στο αξιωματικό της πλαίσιο, θα παρουσιάσουμε ένα αξίωμα, μια μαθηματική αρχή που υπήρξε πηγή προβληματισμού για τους μαθηματικούς. Υπήρξε το τελευταίο αλλά και το πιο επίμαχο από τα αξιώματα που παρουσίασε ο Zermelo. Αναφέρεται στην επιλογή εκπροσώπων από ένα σύνολο συνόλων. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα αριθμήσιμο σύνολο $(\Pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από ζεύγη παπουτσιών (δηλ. το κάθε Π_n είναι ένα ζεύγος παπουτσιών. Μπορούμε να επιλέξουμε ένα παπούτσι π_n από κάθε ζεύγος Π_n, δηλαδή μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει μία συνάρτηση επιλογής $f : \mathbb{N} \to \cdots$ ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το $f(n) \in \Pi_n$; Η απάντηση είναι ναι, διότι μπορούμε να ορίσουμε τη συνάρτηση f με $f(n) =$ το αριστερό παπούτσι του κάθε ζεύγους Π_n. Ας φανταστούμε τώρα ότι τα Π_n δεν είναι ζεύγη παπουτσιών αλλά ζεύγη καλτσών, δηλαδή ότι έχουμε ένα αριθμήσιμο σύνολο $(K_n)_{\in\mathbb{N}}$ όπου το κάθε K_n είναι ένα σύνολο αποτελούμενο από δύο κάλτσες. Μπορούμε και σ'αυτή την περίπτωση να κάνουμε την ίδια όπως και πριν επιλογή; Εδώ υπάρχει ένα πρόβλημα. Δεν μπορούμε να ορίσουμε την f με τον ίδιο τρόπο διότι τώρα δεν υπάρχει τρόπος να διαχωρίσουμε τις κάλτσες του κάθε ζεύγους (δεν υπάρχει αριστερή και δεξιά κάλτσα).[7] Αν φανταστούμε ότι το σύνολο αυτών των ζευγών είναι πεπερασμένο δηλ. αν έχουμε να κάνουμε με ένα σύνολο $(K_n)_{n\in m}$, όπου $m \in \mathbb{N}$, τότε η ύπαρξη μιας τέτοιας συνάρτησης μπορεί να αποδειχθεί επαγωγικά με επαγωγή στο n. Αλλά στη γενική περίπτωση $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ή και πιο γενικά όταν στην θέση του $\mathbb{N}$ είναι ένα οποιοδήποτε άπειρο σύνολο τότε το μόνο που μας απομένει είναι να **υποθέσουμε** την ύπαρξη αυτής της συνάρτησης επιλογής.

Αξίωμα της επιλογής - Axiom of Choice (AC)

Εαν $\langle A_i\rangle_{i\in I}$ είναι μη-κενή οικογένεια μη-κενών συνόλων (δηλ. $I \neq \emptyset$ και $\forall i \in I, A_i \neq \emptyset$) τότε $\prod_{i\in I} A_i \neq \emptyset$. Δηλαδή $\exists f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i$ ώστε $f(i) \in A_i$. Κάθε στοιχείο του $\prod_{i\in I} A_i$ ονομάζεται *συνάρτηση επιλογής* για την οικογένεια.

Ισοδύναμη διατύπωση (AC*): Αν $A \neq \emptyset$, τότε υπάρχει συνάρτηση $f : \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \to A$ έτσι ώστε $f(X) \in X$ για κάθε $X \in \mathrm{dom}(f)$. Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται *συνάρτηση επιλογής* στο A.

Παρατήρηση: Σύμφωνα με τον ορισμό 2.4 κάθε μέλος του καρτεσιανού γινομένου $\prod_{i\in I} A_i$ είναι μια συνάρτηση επιλογής για την οικογένεια $\langle A_i\rangle_{i\in I}$.

[7] Φανταζόμαστε ότι οι δύο κάλτσες είναι ακριβώς οι ίδιες δηλαδή δεν υπάρχει τρόπος φυσικού ή άλλου διαχωρισμού μεταξύ τους.

Άρα το να λέμε ότι υπάρχει μια τέτοια συνάρτηση επιλογής είναι ισοδύναμο με το να λένε ότι το καρτεσιανό γινόμενο είναι μη κενό. Στην ισοδύναμη διατύπωση η συνάρτηση f μας δίνει την δυνατότητα μέσω των τιμών της να «επιλέγουμε» ένα στοιχείο από κάθε μη κενό υποσύνολο του A. Στο επόμενο θεώρημα θα αποδείξουμε ότι οι δύο αυτές διατυπώσεις είναι όντως ισοδύναμες.

Θεώρημα 3.32 $AC \Leftrightarrow AC^*$.

Απόδειξη: $\Rightarrow$: Εστω $F = \{\langle X, X\rangle | X \subseteq A$ και $X \neq \emptyset\}$. Η F είναι η οικογένεια των μη-κενών υποσυνόλων του A, με δείκτη τον εαυτό τους, δηλ. η οικογένεια $\langle X_X\rangle_{X\in\mathcal{P}(A)\setminus\{\emptyset\}}$ και $X_X = X$.

Από αξίωμα επιλογής $\prod F \neq \emptyset$ ($\prod F = \{f | \mathrm{dom}\, f = \mathrm{dom}\, F \,\&\, \forall X \in \mathrm{dom}\, f, f(X) \in F(X)\}$). Εστω λοιπόν $f \in \prod F$. Τότε $f(X) \in X$ $\forall X \in \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$. Αρα f είναι συνάρτηση επιλογής στο A.

$\Leftarrow$: Ας υποθέσουμε ότι ισχύει το AC^*. Έστω τώρα $\langle A_i\rangle_{i\in I}$ μία μη κενή οικογένεια μη κενών συνόλων. Θέτουμε $A = \cup_{i\in I} A_i$. Τότε από το AC^* υπάρχει συνάρτηση επιλογής f στο A (δηλ για κάθε $X \subseteq A$, $X \neq \emptyset$ ισχύει $f(X) \in X$). Ορίζουμε

$$g = \{\langle i, f(A_i)\rangle \mid i \in I\}$$

Τότε g είναι συνάρτηση επιλογής για την οικογένεια $\langle A_i\rangle_{i\in I}$ επειδή $f(A_i) \in A_i$, $\forall i \in I$.

Θεώρημα 3.33 *Εάν κ είναι άπειρος πληθικός τότε $\aleph_0 \leq \kappa$.*

Απόδειξη: Έστω A ένα άπειρο σύνολο με πληθάριθμο κ και έστω f συνάρτηση επιλογής στο A. Ορίζουμε μία ακολουθία $\langle a_i\rangle_{i\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του A ως ακολούθως:

$a_0 = f(A)$

$a_n = f(A - \{a_0, \ldots, a_{n-1}\})$, τα $a_0, \ldots, a_{n-1}$ έχουν ήδη οριστεί.

Σε κάθε βήμα η f είναι καλά ορισμένη. Επειδή $A - \{a_0, \ldots, a_{n-1}\} \neq \emptyset$, κι'αυτό επειδή A είναι άπειρο, $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq A$ και $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \sim \mathbb{N}$. Άρα $\mathbb{N} \leq \kappa$.

Θεώρημα 3.34 (AC) [8] *Η ένωση μιας απαριθμητής οικογένειας απαριθμητών συνόλων είναι απαριθμητό σύνολο.*

Απόδειξη: Για πεπερασμένη οικογένεια απαριθμητών συνόλων το θεώρημα μπορεί να αποδειχθεί με απλή μαθηματική επαγωγή στον αριθμό των μελών της οικογένειας (χωρίς τη χρήση του αξιώματος της επιλογής). Για τη συνέχεια λοιπόν υποθέτουμε ότι δίδεται μια αριθμήσιμη οικογένεια $\langle A_i\rangle_{i\in\mathbb{N}}$ έτσι ώστε $\overline{\overline{A_i}} \leq \aleph_0$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε $B_i = A_i - \cup_{j<i} A_j$. Τότε τα B_i είναι ξένα μεταξύ τους (δηλ. $B_i \cap B_j = \emptyset$, για $i \neq j$) και κάθε B_i είναι απαριθμητό

[8] Όταν σε ένα θεώρημα ή απόδειξη υπάρχει το AC αυτό σημαίνει ότι στην απόδειξη χρησιμοποιούμε το αξίωμα της επιλογής, AC.

καθώς και $\cup_{i\in\mathbb{N}} B_i = \cup_{i\in\mathbb{N}} A_i$. Επειδή κάθε B_i είναι απαριθμητό, για κάθε $i \in \mathbb{N}$ υπάρχει $f_i : B_i \rightarrowtail \mathbb{N}$. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε επιλέξει μία τέτοια f_i για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Τώρα ορίζουμε $h : \cup_{i\in\mathbb{N}} B_i \rightarrowtail \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ με $h(x) = \langle i, f_i(x)\rangle$ όπου i είναι ο μοναδικός αριθμός ώστε $x \in B_i$. Η h είναι μονομορφισμός. Επειδή: αν υποθέσουμε $h(x) = h(y)$ τότε $\langle i, f_i(x)\rangle = \langle j, f_j(y)\rangle \Rightarrow i = j$ και $f_i(x) = f_j(y) \Rightarrow x = y$, επειδή $f_i : B_i \rightarrowtail \mathbb{N}$ είναι μονομορφισμός.

Άρα $\overline{\overline{\cup_{i\in\mathbb{N}} B_i}} \leq \overline{\overline{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}} = \aleph_0 \Rightarrow \cup_{i\in\mathbb{N}} A_i \leq \aleph_0$.

Όλα είναι καλά στην απόδειξη εκτός από το ότι σε κάποιο σημείο έχουμε υποθέσει την ύπαρξη μιας f_i για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Για να ορίσουμε αυτά τα f_i δουλεύουμε ως εξής:

Για κάθε $i \in \mathbb{N}$ έστω $S_i = \{f | f \in {}^{B_i}\mathbb{N}$ και f είναι $1-1\}$. Από υπόθεση $S_i \neq \emptyset$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Από αξίωμα επιλογής $\prod_{i\in\mathbb{N}} S_i \neq \emptyset$. Αρα έστω $G \in \prod_{i\in\mathbb{N}} S_i$. Ορίζουμε $f_i = G(i)$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Τότε h είναι ο απαιτούμενος μονομορφισμός από το $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i$ στο $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

Ασκηση: (AC) Εστω A σύνολο μη-κενών συνόλων, δηλ. $a \in A \Rightarrow a \neq \emptyset$. Τότε $\exists f$ με $A = \mathrm{dom}(f)$ ώστε $f(a) \in a$, $\forall a \in A$. [Λέμε την f συνάρτηση επιλογής για το A.]

Παρατήρηση: Επιλογές μπορεί να υπάρχουν, όταν μπορούν να οριστούν, και χωρίς το αξίωμα της επιλογής.

Παράδειγμα: Εστω A σύνολο μη-κενών υποσυνόλων πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $a \in A \rightarrow a \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ (π.χ. A είναι ένα σύνολο ανοικτών συνόλων). Τότε υπάρχει συνάρτηση επιλογής για το A.

(Απόδειξη χωρίς το AC): Έστω $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ μια αρίθμηση του $\mathbb{Q}$. Η συνάρτηση επιλογής μπορεί να οριστεί ως $f : A \rightarrow \mathbb{Q}$, όπου $f(a) \in a$ είναι ο πρώτος ρητός του a που απαντάται στην πιο πάνω αρίθμηση. Οπότε αν A σύνολα ξένα μεταξύ τους τότε f είναι 1-1.

Λήμμα 3.35 (AC) *Αν A, B μη-κενά σύνολα τότε $\exists f : A \rightarrowtail B \Leftrightarrow \exists g : B \twoheadrightarrow A$.*

Απόδειξη: $\Rightarrow$ Εστω $a \in A$. Ορίζουμε $g : B \twoheadrightarrow A$ επί με

$$\begin{array}{ll} g(x) = f^{-1}(x) & \text{αν } x \in f[A] \\ g(x) = a & \text{αν } x \notin f[A] \end{array}$$

$\Leftarrow$ Εστω $g : B \twoheadrightarrow A$ και έστω F μια συνάρτηση επιλογής στο B. Ορίζουμε $f : A \rightarrowtail B$ με

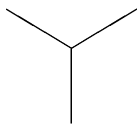
$$f(x) = F(\{y \mid y \in B \wedge g(y) = x\}).$$

[*Παρατήρηση:*] Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
(i) $A \preccurlyeq B$
(ii) $\exists f : B \twoheadrightarrow A$]

Λήμμα 3.36 (AC) *Εστω A αναπαρίθμητο και $f : A \to \mathbb{N}$. Τότε υπάρχει αναπαρίθμητο $B \subseteq A$ ώστε f είναι σταθερή στο B.*

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}[\{n\}]$. Αν το καθένα από τα $f^{-1}[\{n\}]$ είναι απαριθμητό τότε η ένωση είναι απαριθμητή, άρα A απαριθμητό (άτοπο). Αρα για κάποιο n, $f^{-1}[\{n\}] \subseteq A$ είναι αναπαρίθμητο και βέβαια $x \in f^{-1}[\{n\}] \Rightarrow f(x) = n$ δηλ. η f είναι σταθερή στο $B = f^{-1}[\{n\}]$.

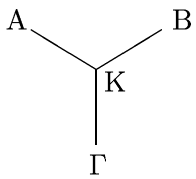
Παράδειγμα: Ένα τρίκρανο στο επίπεδο είναι κάθε σχήμα που έχει τη μορφή



με τις τρεις ακτίνες ίσες και τη γωνία μεταξύ των ακτίνων 120. Δύο τρίκρανα είναι μη τεμνόμενα όταν δεν έχουν κανένα κοινό σημείο. Ας φανταστούμε τώρα ένα σύνολο από (ανά δύο) μη τεμνόμενα τρίκρανα στο επίπεδο. Μέχρι πόσο μπορεί να φθάσει το πλήθος ενός τέτοιου συνόλου; Ας σημειωθεί ότι σε ένα τέτοιο σύνολο το κάθε τρίκρανο μπορεί να έχει διαφορετικό μέγεθος και διαφορετική κλίση από ένα άλλο.

Πρόταση 3.37 *Κάθε τέτοιο σύνολο A μη τεμνομένων τρικράνων στο επίπεδο είναι απαριθμητό.*

Απόδειξη: Κάθε τρίκρανο z θα έχει τη μορφή



Το K είναι το κέντρο του και το συμβολίζουμε $ct(z)$ και το μήκος της ακτίνας AK το συμβολίζουμε με $\mathrm{rad}(z)$. Όταν δύο τρίκρανα z_1 και z_2 δεν τέμνονται θα γράφουμε $z_1 \cap z_2 = \emptyset$. Όταν δύο τρίκρανα $z_1 \subseteq z_2$ είναι το ένα μέρος του άλλου θα λέμε ότι το z_1 είναι υποτρίκρανο του z_2 (σ'αυτή την περίπτωση βέβαια τα z_1 και z_2 θα έχουν κοινό κέντρο και οι ακτίνες του z_1 θα είναι υποδιαστήματα του z_2).

Θα αποδείξουμε την πρόταση με την εις άτοπο απαγωγή.

Εστω A αναπαρίθμητο.

Εστω $z \in A$, τότε $\mathrm{rad}(z) > 0$. Εστω n το ελάχιστος αριθμός που ανήκει στο $\mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n} < \mathrm{rad}(z)$ και έστω $p(z)$ το υποτρίκρανο του z με το ίδιο κέντρο και rad$= \frac{1}{n}$. Τότε για z_1, z_2 διαφορετικά στοιχεία του A, $z_1 \cap z_2 = \emptyset$ άρα

$p(z_1) \cap p(z_2) = \emptyset$ (ως υποσύνολα διαφορετικών σημειοσυνόλων). Αρα το $p[A]$ είναι σύνολο μη τεμνομένων τρικράνων και επειδή $p : A \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow p[A]$, το $p[A]$ είναι επίσης αναπαρίθμητο.

Σημειώστε ότι $z \in p[A] \Rightarrow \mathrm{rad}(z) \in \mathbb{Q}^+$.

Ορίζουμε $g : p[A] \to \mathbb{Q}$ με $g(z) = \mathrm{rad}(z)$. Επειδή $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$, από προηγούμενο λήμμα υπάρχει αναπαρίθμητο $B \subseteq p[A]$ στο οποίο g είναι σταθερή, έστω $g(z) = s$ για $z \in B$, δηλαδή όλα τα τρίκρανα στο B έχουν ίδια ακτίνα μήκους s.

Εστω $t : \mathbb{N} \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ (υπάρχει από προηγούμενο αποτέλεσμα).

Για $z \in B$ έστω $m(z)$ είναι ο ελάχιστος $m \in \mathbb{N}$ ώστε $|t(m) - ct(z)| \leq \frac{s}{6}$, δηλ. $|t(m(z)) - ct(z)| \leq \frac{s}{6}$ (Δηλαδή το $t(m(z))$ είναι ένα σημείο του επιπέδου με ρητές συντεταγμένες το οποίο απέχει από το $ct(z)$ απόσταση μικρότερη από το $\frac{s}{6}$).

Τώρα για διαφορετικά $z_1, z_2 \in B$ από γεωμετρική θεώρηση επειδή $z_1 \cap z_2 = \emptyset$, $|ct(z_1) - ct(z_2)| \geq \frac{s}{2}$. Δηλαδή δύο ίσα τρίκρανα δεν μπορούν να «πλησιάσουν» το ένα το άλλο, χωρίς να τμηθούν, με τα κέντρα τους να απέχουν απόσταση μικρότερη του ημίσεος της ακτίνας τους.

Αρα $|t(m(z_1)) - t(m(z_2))| \geq \frac{s}{6}$. Δηλαδή εφόσον τα δύο διαφορετικά αλλά με ίση ακτίνα τρίκρανα δεν μπορούν να «πλησιάσουν» ώστε τα κέντρα τους να απέχουν λιγότερο από το μισό της ακτίνας τους, τα ρητά σημεία που επιλέξαμε γιαυτά σε καμιά περίπτωση δεν μπορούν να ταυτιστούν.

Αρα $m(z_1) \neq m(z_2)$.

Αυτό σημαίνει ότι η αντιστοιχία $m : B \rightarrowtail \mathbb{N}$ είναι 1–1, άτοπο επειδή το B είναι αναπαρίθμητο.